

Instytut Fizyki  
Uniwersytet Mikołaja Kopernika

Piotr Targowski i Bernard Ziętek

Pracownia Optoelektroniki  
Specjalność: Fizyka Medyczna

**BADANIE WIĄZKI GAUSSOWSKIEJ**

Zadanie III

Zakład Optoelektroniki

Toruń 2001

## I. Cel zadania

Celem zadania jest poznanie podstawowych własności wiązki gaussowskiej.

## II. Podstawowe definicje i wzory

### A. Definicja wiązki gaussowskiej

Każda fala elektromagnetyczna rozchodząca się w ośrodku (o współczynniku załamania  $n$ ) musi spełniać równanie falowe:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(x, y, z, t) - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Najprostszym rozwiązaniem tego równania jest fala płaska. Jeżeli dodatkowo układ współrzędnych zostanie tak zorientowany, by kierunek propagacji fali był zgodny z kierunkiem osi  $z$  to falę taką można opisać wzorem:

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 e^{-ikz} \cdot e^{i\omega t}. \quad (2)$$

Należy zauważyć, że pole w tym przypadku nie zależy od  $x$  i  $y$ , a więc jest nieograniczone w przestrzeni. Jednakże, na przykład energia wiązki lasera z pewnością jest skupiona w przestrzeni wokół kierunku propagacji. Dlatego ważną klasą rozwiązań równania (1) są fale "nieco" odbiegające od płaskiej i ograniczone w przestrzeni. Poszukuje się więc rozwiązań w postaci:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = E_0 \Psi(x, y, z) \cdot e^{-ikz} \cdot e^{i\omega t}, \quad (3)$$

gdzie niezależną od czasu modyfikację fali płaskiej opisuje funkcja  $\Psi(x, y, z)$ .

Podstawiając funkcję (3) do (1) otrzymuje się ściśle równanie na funkcję zespoloną  $\Psi$ :

$$\nabla_t^2 \Psi - i 2 k \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0, \quad (4)$$

gdzie  $\nabla_t$  oznacza gradient w kierunku prostopadłym do  $z$ . Ponieważ można założyć, że  $\Psi$  jest wolno zmienną funkcją  $z$ , trzeci człon w równaniu (4) można pominąć wobec pierwszego.

W laserze, będącym źródłem światła w zadaniu, rura wyładowcza oraz zwierciadła mają symetrię cylindryczną. Powoduje to, że również pole ma symetrię cylindryczną. Wówczas gradient  $\nabla_t$  przyjmuje postać:

$$\nabla_t^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right); \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (5)$$

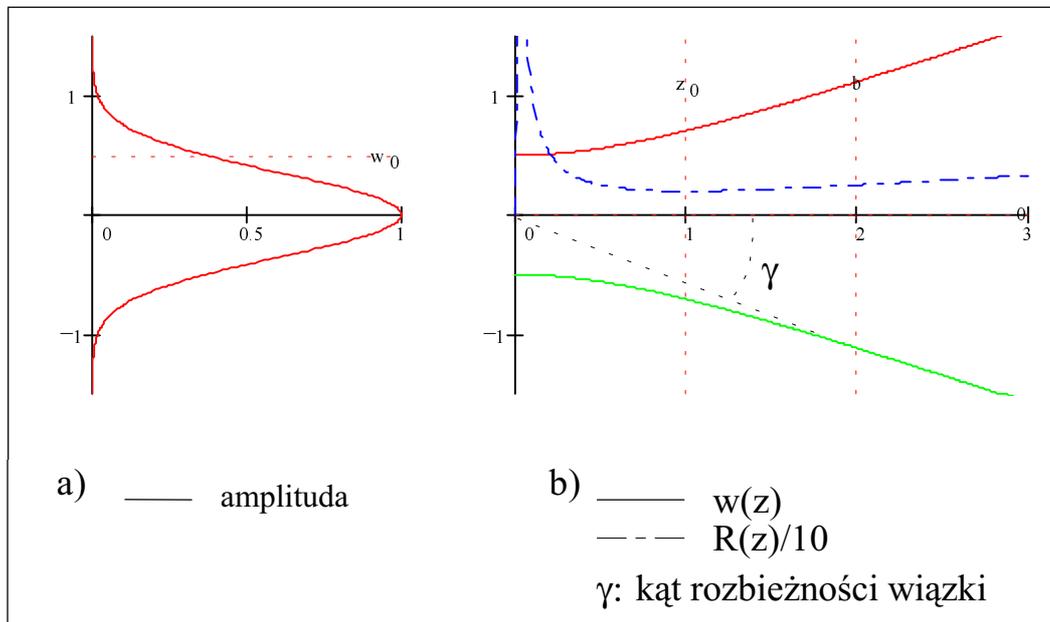
Wówczas najprostszym rozwiązaniem równania (4) jest funkcja:

$$\Psi(r, z) = \frac{w_0}{w(z)} \exp \left[ -i k \left( \frac{r^2}{2q(z)} - \arctan \frac{z}{z_0} \right) \right], \quad (6)$$



### B. Rozkład amplitudy we wiązce gaussowskiej

Na Rys. 1a przedstawiono rozkład amplitudy pola elektrycznego we wiązce w płaszczyźnie prostopadłej do osi optycznej i dla  $z=0$ , na Rys. 1b wartości funkcji  $w(z)$  albo inaczej odległość od osi optycznej dla której amplituda pola maleje  $e$  razy.



Rys. 1 Wiązka gaussowska,  $w_0=0.5$ ,  $z_0=1$ ,  $E_0=1$

*Uwaga:* dla przejrzystości wykreślono wiązkę z  $\lambda_0=1.57$  jednostki długości i  $w_0=0.5$  tej samej jednostki. Odpowiada to wartości wektora falowego  $k = 4$ . Fala elektromagnetyczna z zakresu rozważanego w optyce ma  $k$  rzędu  $10^7 \text{ m}^{-1}$  i wiązki są bardziej "smukłe".

Jak wynika z rysunku wiązka gaussowska charakteryzuje się więc pewną rozbieżnością, którą można opisać **kątem rozbieżności**  $\gamma$ . Kąt ten (wyrażany w mierze łukowej) zawarty jest pomiędzy kierunkiem w którym w danej odległości amplituda maleje  $e$  razy i osią optyczną. Innymi słowy: kątowne rozmiary plamki światła za ekranie w odległości  $z$  można z dobrym przybliżeniem określić na  $2 \cdot \gamma$ . Kąt  $\gamma$  jest oczywiście równy:

$$\gamma(z) = \arctan\left(\frac{w(z)}{z}\right) = \arctan\left(\frac{w_0}{z_0} \sqrt{1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2}\right) \quad (11)$$

### C. Rozkład amplitudy we wiązce gaussowskiej w strefie dalekiej

Dla odległości  $z$  znacznie większych od  $z_0$  funkcję  $w(z)$  (7) można przedstawić w postaci przybliżonej:  $w(z) = w_0 \frac{z_0}{z}$ . W takim przypadku kąt rozbieżności  $\gamma$  (11) nie zależy od  $z$  (od odległości od przewężenia) i wynosi:

$$\tan(\gamma) = \frac{w(z)}{z} = \frac{w_0}{z_0} = \frac{2}{k w_0} = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{w_0} \quad (12)$$

### D. Mody wyższych rzędów

Funkcja (10) jest najprostszym (ale nie jedynym) rozwiązaniem równania (1) dla fali typu (3) z symetrią cylindryczną. W ogólności pole we wnęce opisywane jest funkcją:

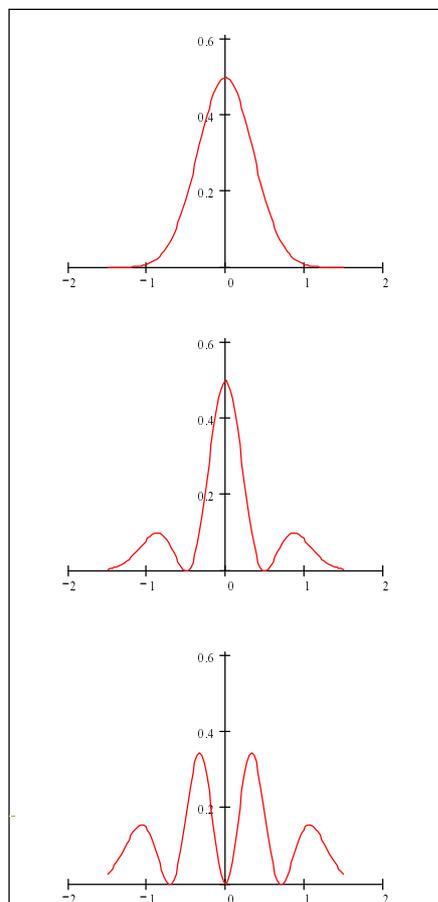
$$E(r, \phi, z) = E_0 \left( \sqrt{2} \frac{r}{w(z)} \right)^m L_n^m \left( 2 \frac{r^2}{w(z)^2} \right) \exp(-im\phi) \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{w(z)^2}\right) \exp\left[-i\left(kz + \frac{kr^2}{2R(z)} - (2n+m+1)\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right)\right)\right] \quad (13)$$

gdzie  $L_n^m(x)$  są uogólnionymi wielomianami Laguerre'a:

$$L_0^m(x) = 1, \quad L_1^m(x) = m + 1 - x, \quad L_2^m(x) = \frac{1}{2}(m+1)(m+2) - (m+2)x + \frac{1}{2}x^2.$$

Oczywiście funkcja (13) sprowadzi się do (10) dla  $m=0$  i  $n=0$ . Indeksów  $m$  i  $n$  używa się do oznaczenia modów wiązki: mod podstawowy (10) oznacza się  $TEM_{00}$ .

Na Rys. 2 przedstawiono poprzeczny rozkład natężenia oświetlenia ( $E^2$ ) dla kilku modów najniższych rzędów.



Rys.2 Poprzeczny (wzdłuż osi  $x$ , dla  $y=0, z=1$ ) rozkład natężenia  $E^2$  dla modów  $TEM_{00}$ ,  $TEM_{10}$  i  $TEM_{11}$  (symetrii cylindrycznej) wiązki gaussowskiej o parametrach z Rys.1.

Należy zauważyć, że jakkolwiek wszystkie mody z Rys. 2 opisane są tym samym  $w_0$ , to dla wyższych modów energia jest mniej skupiona wzdłuż kierunku propagacji. Zazwyczaj laser emitujący wiązkę wielomodową pracuje w kilku modach równocześnie (na przykład 00, 01, 11 i 10) i w rezultacie obserwuje się sumę natężeń z Rys. 2. W konsekwencji laser pracujący wyłącznie w modzie 00 zapewnia największą koncentrację energii.

**E. Transformacja wiązki gaussowskiej przez układ optyczny**

Do opisu transformacji wiązki gaussowskiej zostanie zastosowany formalizm optyki macierzowej (patrz Zadanie II). Zgodnie z *twierdzeniem ABCD* wiązka gaussowska o zespolonym parametrze Kogelnika  $q(z)$  przechodząc przez układ optyczny opisany macierzą  $[ABCD]$  przekształca się na wiązkę o parametrze  $q_1(z)$  danym wzorem:

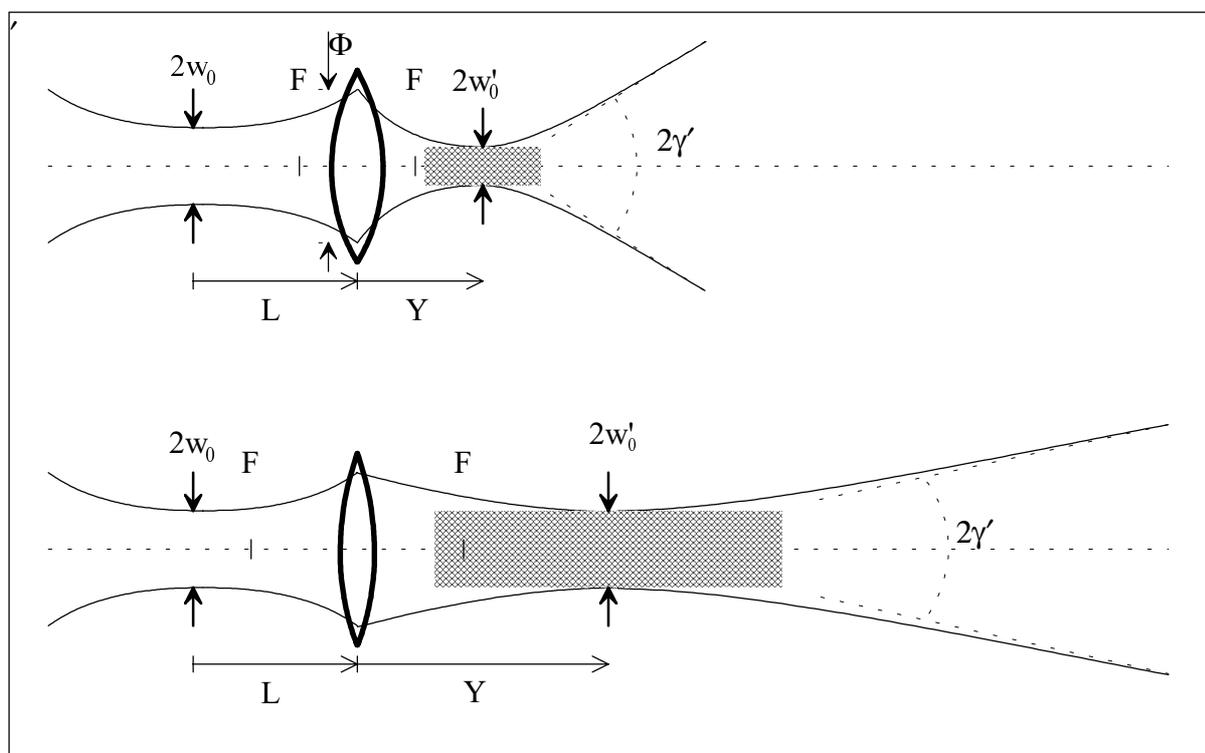
$$q_1(z) = \frac{A \cdot q(z) + B}{C \cdot q(z) + D} \tag{14}$$

Tak więc, aby uzyskać wartość parametru Kogelnika w odległości  $y$  za soczewką cienką o ogniskowej  $f$  umieszczoną w odległości  $L$  od przewężenia wiązki, do wzoru (14) należy podstawić macierz o współczynnikach:

$$\begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f-y}{f} & y \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

oraz parametr Kogelnika  $q(L)$ . Tak więc nowy parametr Kogelnika w odległości  $y$  od soczewki będzie wyrażał się wzorem:

$$q_1(y) = \frac{\frac{f-y}{f} \cdot (L + i \cdot z_0) + y}{-\frac{1}{f} \cdot (L + i \cdot z_0) + 1} \tag{16}$$



Rys. 3. Transformacja wiązki gaussowskiej przez soczewki o różnych ogniskowych. W obszarze zakreskowanym gęstość mocy spada nie więcej niż o połowę.

Na podstawie zależności (9) można obliczyć  $w(y)$  i  $R(y)$  dla nowej wiązki. Położenie  $Y$  i wartość nowego przewężenia można wyznaczyć z warunku:  $R(D)=\infty$ . Po prostych przekształceniach otrzymuje się:

$$Y = f \cdot \frac{L(L-f)+z_0^2}{(L-f)^2+z_0^2} \quad w'_0 = w_0 \cdot \frac{f}{\sqrt{(L-f)^2+z_0^2}} \quad \gamma' = \gamma \cdot \frac{\sqrt{(L-f)^2+z_0^2}}{f} \quad (17)$$

Należy podkreślić, że z zależności (12) wynika związek:

$$\gamma \cdot w_0 = \gamma' \cdot w'_0 = \frac{\lambda}{\pi} \quad , \quad (18)$$

a więc iloczyn rozbieżności wiązki i wielkości jej przewężenia jest niezmiennikiem przekształcenia optycznego. Tak więc stosując soczewkę o krótkiej ogniskowej można uzyskać bardzo małą plamkę, jednak kosztem dużej rozbieżności wiązki małej głębokości ostrości.

*Głębokość ostrości* (depth of focus, DOF) jest długością, wzdłuż której gęstość mocy wiązki maleje dwukrotnie w stosunku do wartości mierzonej w przewężeniu. Łatwo pokazać, że przedział ten rozciąga się na  $\pm z_0$  wokół przewężenia. A więc  $DOF=2z_0$ .

Jeżeli ogniskowa soczewki jest mała wobec odległości  $L$  ( $L \gg f$ ), to można łatwo pokazać, że:

$$Y = f; \quad w'_0 = \frac{2\lambda}{\pi} \left( \frac{f}{\Phi} \right); \quad 2\gamma' = \left( \frac{f}{\Phi} \right)^{-1}; \quad DOF = \frac{8\lambda}{\pi} \left( \frac{f}{\Phi} \right)^2, \quad (19)$$

gdzie  $\Phi$  jest średnicą plamki na soczewce (Rys. 3.)

### III. Literatura

1. R. Józwicki, "Optyka laserów", WNT - Warszawa 1981
2. N. W. Karłow, "Wykłady z fizyki laserów", WNT - Warszawa 1989
3. Opis zadania II pracowni optoelektronicznej.

### IV. Aparatura

W skład aparatury niezbędnej do wykonania zadania wchodzi następujące urządzenia:

- Laser He-Ne z zasilaczem NG-HN 25/40 (pracujący w modzie 00) lub podobny.
- Zestaw zwierciadeł.
- Miernik mocy lasera KB 6301 albo MERATRONIK z głowicą pomiarową zaopatrzoną w mały otwór.

## V. Pomiary i opracowanie wyników

### A. Wymagania dotyczące opracowania

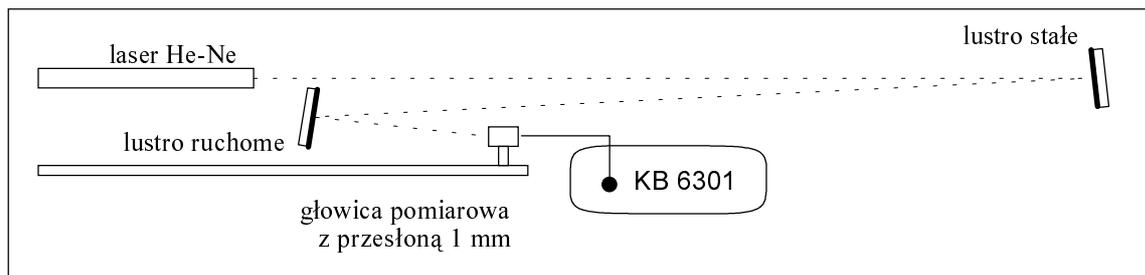
1. W opracowaniu zadania należy zamieścić wyprowadzenia wzorów (15) do (17) oraz (19).
2. Opracować sposób wyznaczenia rozkładu kąтового natężenia promieniowania dla układu pomiarowego z Rys. 4 na podstawie Rys. 5. Promieniowanie emitowane w pewnym kierunku  $\alpha$  kierowane jest do detektora za pomocą ruchomego lustra, które obraca się o kąt  $\theta$  wskutek przesunięcia śruby mikrometrycznej o odległość  $x$ . Kąt  $\alpha$  w którym emitowane jest promieniowanie i kąt obrotu lustra  $\theta$  wymagany, aby skierować to promieniowanie do detektora związane są zależnością::

$$\alpha = \frac{2D}{D+L} \theta, \quad (20)$$

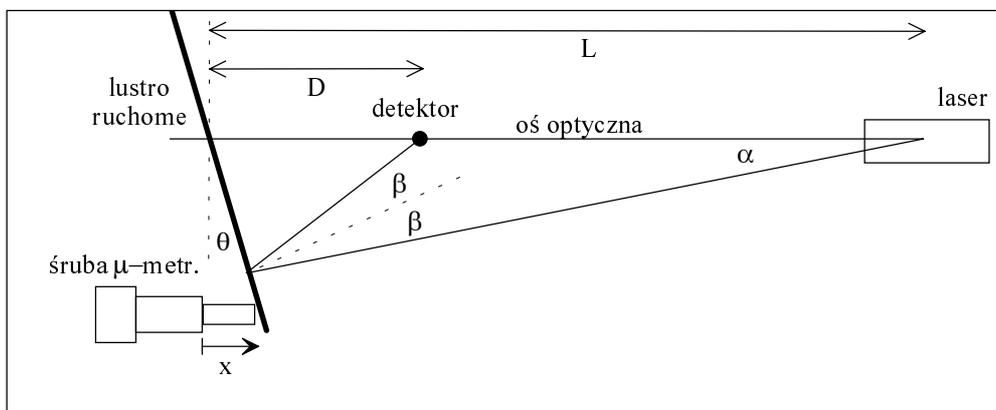
gdzie  $L$  jest całkowitą odległością laser - lustro ruchome,  $D$  jest odległością lustro ruchome - detektor. Należy znaleźć sposób pomiaru kąta  $\theta$  oraz wyprowadzić wzór (20).

### B. Wyznaczenie parametrów wiązki gaussowskiej emitowanej przez laser He-Ne.

Zestawić układ pomiarowy jak na Rys. 4.



Rys 4. Pomiar rozkładu przestrzennego emisji lasera He-Ne - widok z boku.



Rys 5. Konstrukcja geometryczna do wyznaczenia kąta  $\alpha$  - widok z góry (wielkość kątów znacznie przesadzona).

**Przebieg pomiaru:**

1. Dokonać systematycznego pomiaru  $I(x)$  w płaszczyźnie poziomej przechodzącej przez oś optyczną.
2. W oparciu wzór (20) wykreślić zależność  $I(\alpha)$ .
3. Zweryfikować hipotezę o gaussowskim rozkładzie natężenia dopasowując do uzyskanych danych funkcję:

$$I(\alpha) = I_{tla} + I_{\max} * \exp\left[-\frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{d^2}\right]. \quad (21)$$

4. Na podstawie dopasowanego parametru  $d$  (w radianach) obliczyć wartość funkcji  $w(z=L)$  w miejscu detektora porównując wzór (21) ze wzorem (10) pamiętając, że natężenie promieniowania  $I$  jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy pola  $E$ :

$$I(\alpha) \sim \exp\left[-\frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{d^2}\right] \propto [E(r, L)]^2 \sim \left[\exp\left[-\frac{r^2}{w(L)^2}\right]\right]^2.$$

Ponieważ kąty w obrębie wiązki są małe, odległość  $r$  od osi optycznej można zastąpić kątem  $\alpha$ :  $r = \alpha \cdot L$ . Po podstawieniu i wykorzystaniu wzoru (12) uzyskuje się:

$$d = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{w(L)}{L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma$$

Zakładając, że przewężenie wiązki leży w połowie długości rezonatora lasera wyznaczyć wartość parametru  $w_0$  ze wzoru (12) oraz korzystając z zestawionych w tabeli związków pomiędzy parametrami obliczyć  $z_0$  i  $b$  dla tej wiązki wiedząc, że długość fali promieniowania lasera He-Ne wynosi  $\lambda_0 = 632.8$  nm.

**C. Zaprojektowanie układu optycznego o zadanych parametrach**

1. Zdemonstrować przesłonę z miernika mocy lasera KB 6301. Zmierzyć całkowitą moc wiązki laserowej.
2. W oparciu o wzory (19) zaproponować układ optyczny (określić  $L$ ,  $f$  oraz  $\Phi$ ) skupiający wiązkę lasera do plamki o gęstości mocy =  $1000$  W/cm<sup>2</sup>. Obliczyć DOF i rozbieżność wiązki.