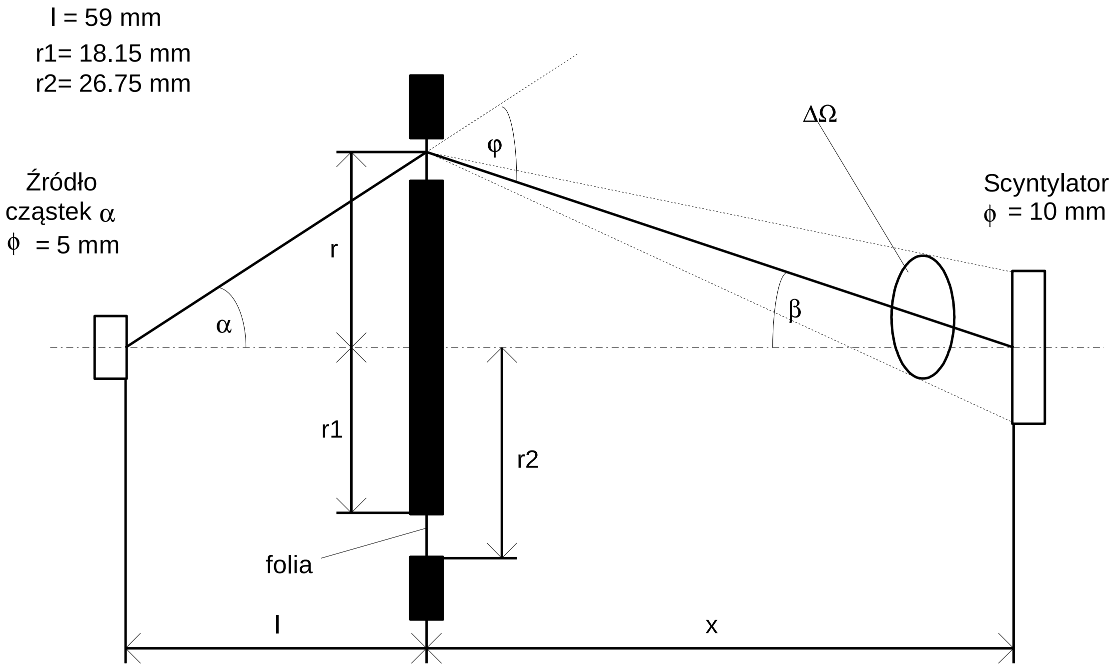
Doświadczenie Rutherforda - część doświadczalna

Schemat użytego przyrządu przedstawia rysunek. Ze względu na małe rozmiary źródło cząstek α uważamy za punktowe. W stałej odległości l od źródła znajduje się pierścień ze złotej folii o promieniu wewnętrznym r_1 i zewnętrznym r_2. W odległości x znajduje się scyntylator o powierzchni S.



Cząstka α wylatuje ze źródła i jeżeli trafi na folię, zostanie odchylona o kąt φ; jeżeli zmieści się w kącie bryłowym $d\Omega$, zostanie zarejestrowana. Dla punktu pierścienia z folii leżącego w odległości r od źródła słuszny jest wzór

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = C \cdot \frac{1}{\sin^4(\varphi/2)}$$

gdzie

$$C = \frac{1}{16}\left(\frac{zZe^2}{2Mv^2}\right)^2 = const$$

Wyrażenie to jest proporcjonalne do ilości cząstek α rozproszonych pod kątem φ w kąt bryłowy $d\Omega$, a więc do ilości cząstek zarejestrowanych. Wielkość kąta bryłowego zależy oczywiście od odległości folii od scyntylatora. Kąt bryłowy określa się jako stosunek powierzchni wycinka sfery do kwadratu promienia. W naszym przypadku z wystarczającą dokładnością można napisać

$$\Delta\Omega = \frac{S \cdot \cos\beta}{x^2 + r^2}$$

gdzie $\sqrt{x^2+r^2}$ jest odległością wybranego punktu folii od scyntylatora. Uwzględniając fakt, że

$$\cos\beta = \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

otrzymujemy

$$\Delta\Omega = \frac{xS}{\sqrt{\left(x^2+r^2\right)^3}}$$

Wobec tego ilość zliczeń

$$N \approx d\sigma = C \cdot \frac{1}{\sin^4(\varphi/2)} \cdot \frac{xS}{\sqrt{\left(x^2+r^2\right)^3}}$$

Aby uwzględnić ilość zliczeń od wszystkich punktów, na których nastąpiło rozproszenie, należy przeprowadzić całkowanie po całej powierzchni pierścienia. Zauważmy, że wszystkie punkty leżące na okręgu o promieniu r wnoszą jednakowy wkład do całkowitej ilości zliczeń

$$N \approx \frac{2\pi r}{\sin^4(\varphi/2)} \cdot \frac{xS}{\sqrt{\left(x^2+r^2\right)^3}}$$

Biorąc pod uwagę pierścień o grubości dr można napisać:

$$dN \approx \frac{2\pi r}{\sin^4(\varphi/2)} \cdot \frac{xS}{\sqrt{\left(x^2+r^2\right)^3}} dr$$

Należy teraz scałkować po wszystkich takich pierścieniach. Kąt φ jest funkcją r i x. Zauważmy, że

$$\frac{1}{\sin^4(\varphi/2)} = \frac{1}{(1-\cos\varphi)^2}, \quad \varphi = \alpha+\beta$$

wobec czego

$$\frac{1}{\sin^4(\varphi/2)} = \frac{1}{\left(1-\cos(\alpha+\beta)\right)^2} = \frac{1}{\left(1-\frac{lx-r^2}{\sqrt{l^2+r^2}\sqrt{x^2+r^2}}\right)^2}$$

gdzie wykorzystano zależności

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2+r^2}}, \quad \cos\beta = \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{r}{\sqrt{l^2+r^2}}, \quad \sin\beta = \frac{r}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Otrzymujemy więc

$$dN \approx C \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{lx-r^2}{\sqrt{l^2+r^2}\sqrt{x^2+r^2}}\right)^2} \cdot \frac{xr}{\sqrt{\left(x^2+r^2\right)^3}} dr$$

Aby określić charakter funkcji $N(x)$ wykorzystamy twierdzenie o wartości średniej: istnieje taki punkt $\xi \in (a,b)$, że

$$f(\xi)(a-b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

Zastosujemy ten wzór przyjmując $\xi=\frac{1}{2}(r_1+r_2)$. Wówczas

$$N\approx C\cdot(r_2-r_1)\cdot\frac{\dfrac{\frac{1}{2}(r_1+r_2)x}{\sqrt{\left(x^2+\left[\frac{1}{2}(r_1+r_2)\right]^2\right)^3}}}{\left(1-\dfrac{lx-r^2}{\sqrt{l^2+\left[\frac{1}{2}(r_1+r_2)\right]^2}\sqrt{x^2+\left[\frac{1}{2}(r_1+r_2)\right]^2}}\right)^2}$$

Wzór ten pozwala oszacować przybliżony kształt zależności N od x. Należy podkreślić jego szacunkowy charakter: poza przybliżeniami natury rachunkowej nie uwzględnia on też żadnych szczegółów doświadczalnych poza geometrią urządzenia rozpraszającego.