ANEMOMETRIA LASEROWA

1 Wstęp

Anemometria laserowa pozwala na bezdotykowy pomiar prędkości cząsteczek (elementów) rozpraszających światło. Źródłem światła jest laser, którego wiązka jest dzielona się na dwie wiązki. Wiązki są skupiane na poruszającym się obiekcie. Prędkość poruszającego się obiektu wyznacza się przez pomiar zmian natężenia prążków interferencyjnych w czasie.

Zjawiska występujące przy rozproszeniu światła opisywane są na dwa sposoby dające ten sam końcowy rezultat.

2 Model dopplerowski

2.1 Efekt Dopplera

Efekt Dopplera polega na zmianie częstotliwości (długości) fali w wyniku względnego ruchu źródła fali i obserwatora. W akustyce, jeśli źródło porusza się z prędkością v, a dźwięku – u, to

$$\lambda' = \lambda_0 \left(1 \pm \frac{v}{u}\right),$$

gdzie: „–" dotyczy zbliżania się źródła światła.

Jeśli porusza się detektor, wówczas

$$\lambda' = \lambda_0 \left(\frac{u}{u \pm v}\right).$$

W optyce, ponieważ światło propaguje się bez względu na istnienie ośrodka oraz ponieważ prędkość światła jest stała bez względu na detektor, to efekt Dopplera wyraża się wzorem (w ogólności uwzględniającym poprawkę relatywistyczną)

$$\lambda' = \lambda_0 \frac{1 - (v/c)\cos\delta}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \tag{1}$$

gdzie: $v\cos\delta$ jest rzutem prędkości względnej źródła względem obserwatora na kierunek propagacji światła, a δ jest kątem między prędkością względna źródła a kierunkiem propagacji.

Z (1) wynika, że przy $\gamma = \pi/2$ obserwuje się przesunięcie dopplerowskie długości fali. Jest to *relatywistyczny efekt Dopplera*.

Przyjmijmy, że $v \ll c$, wtedy wyrażenie (1) możemy rozwinąć w szereg pomijając pierwiastek relatywistyczny

$$\nu' = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c}\cos\delta\right)$$

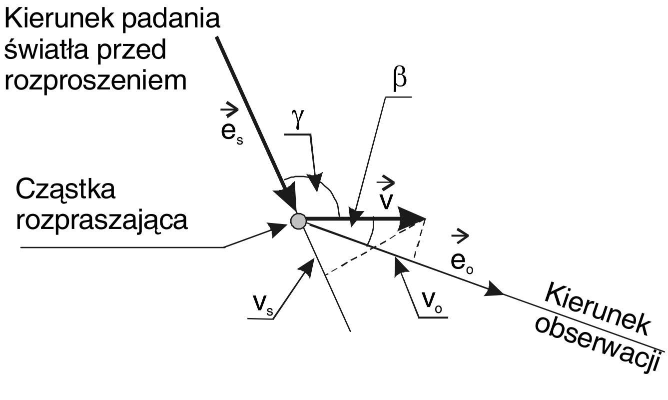
Rzut prędkości $\vec{v}$ na kierunek propagacji wynosi

$$v_s = v\cos(\pi - \gamma)$$

i częstość mierzonego promieniowania wyraża się wzorem

$$\nu' = \nu_0 \left(1 - \frac{v}{c}\cos\gamma\right). \tag{2}$$

Niech $\vec{v}$ oznacza prędkość cząsteczki, na której rozprasza się promieniowanie rozchodzące się wzdłuż wektora $\vec{e}_s$ (rys. 1).



Rys. 1. Geometria rozpraszania światła na cząsteczce

Przyjmijmy, że obserwacja rozproszonego na cząsteczce promieniowania zachodzi w kierunku wyznaczonym przez wektor $\vec{e}_o$, czyli prędkość zbliżania się do detektora źródła promieniowania rozproszonego

$$v_o = v\cos\beta,$$

a

$$\nu'' = \nu' \left(1 + \frac{v}{c}\cos\beta\right).$$

Zatem detektor widzi częstość

$$\begin{aligned}\nu'' &= \nu_0 \left(1 - \frac{v_s}{c}\right)\left(1 + \frac{v_o}{c}\right) = \\ & \nu_0 \left(1 - \frac{v_s}{c} + \frac{v_o}{c} - \frac{v_s}{c}\frac{v_o}{c}\right).\end{aligned}$$

Odrzucamy ostatni wyraz jako mały i otrzymujemy

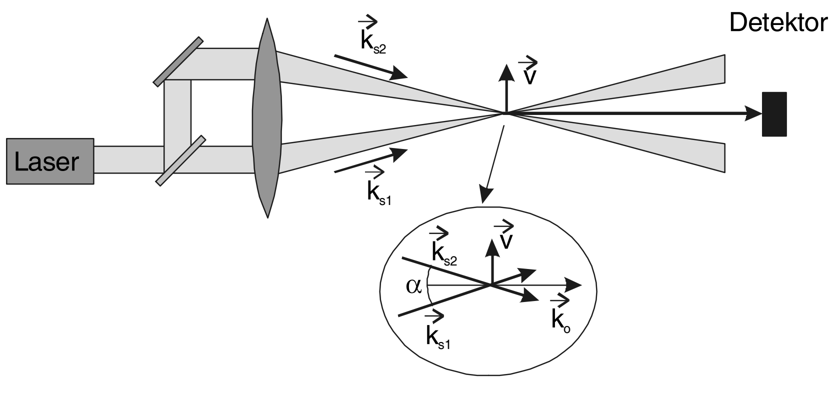
$$\begin{aligned}\nu'' &= \nu_0 \left(1 - \frac{v_s}{c} + \frac{v_o}{c}\right) = \\ &= \nu_0 \left[1 - \frac{\vec{v}\cdot(\vec{e}_s - \vec{e}_o)}{c}\right].\end{aligned}$$

Stąd zmianę częstości przy oświetleniu jedną wiązką wyznaczamy ze wzoru

$$\Delta\nu = \nu'' - \nu = \nu_0 \frac{\vec{v}\cdot(\vec{e}_s - \vec{e}_o)}{c}.$$

2.2 Rozpraszanie skrzyżowanych wiązkach

Pomiar prędkości przeprowadza się w układzie pomiarowym przedstawionym na rys. 2.



Rys. 2. Schemat układu doświadczalnego

Za pomocą soczewki o ogniskowej f krzyżuje się pod kątem α dwie wiązki laserowe o wektorach falowych $\vec{k}_{s1}$ i $\vec{k}_{s2}$(rys.2). Padają na obiekt poruszający się z prędkością $\vec{v}$ prostopadle do dwusiecznej kąta zawartego między wiązkami (kierunek z). Zatem ponieważ kąt $\beta = \pi/2$, to $\cos\beta = 0$, natomiast kąty między wiązkami a wektorem prędkości cząstki rozpraszającej wynoszą

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2},\\ \gamma_2 &= \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

Przesunięcie dopplerowskie częstości obserwowane przez detektor dla jednej i dla drugiej wiązki z (2) wynoszą

$$\Delta\omega_1 = \nu\frac{v}{c}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \nu\frac{v}{c}\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$$

i

$$\Delta\omega_2 = \nu\frac{v}{c}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \nu\frac{v}{c}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Niech

$$\begin{aligned}E_1 &= E_0 \exp\left[i\left(\omega_1 t - k_1 z\right)\right],\\ E_2 &= E_0 \exp\left[i\left(\omega_2 t - k_2 z\right)\right],\end{aligned}$$

gdzie: $\omega_{1,2} = \omega_0 + \Delta\omega_{1,2}$.

W wyniku interferencji występują dudnienia obserwowane jako zmiany natężenia światła w czasie, ponieważ

$$\begin{aligned}I &= \left(E_1 + E_2\right)^2 =\\ &= 2E_0^2 + 2E_0^2 \exp\left\{\left[i\left(\omega_1 t - k_1 z\right)\right] + \left[-i\left(\omega_2 t - k_2 z\right)\right]\right\} =\\ &= 2I_0 + 2I_0 \exp\left\{i\left[\left(\omega_1 - \omega_2\right)t + \left(k_2 - k_1\right)z\right]\right\}.\end{aligned} \tag{3}$$

Tak więc część rzeczywista (3)

$$I\left(t\right) = 2I_0\left[1 + \cos\left(\Delta\omega t\right)\right].$$

Podstawiając odpowiednie wartości

$$I\left(t\right) = 2I_0\left\{1 + \cos\left[2\frac{2\pi}{\lambda}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]\right\},$$

a to znaczy, że częstotliwość dudnień będzie wynosić

$$f = \frac{2v}{\lambda}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Stąd znając częstotliwość dudnień możemy wyznaczyć prędkość cząsteczki.

Z parametrów układu optycznego znajdujemy kąt między wiązkami

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{d}{\sqrt{d^2 + f^2}}. \tag{4}$$

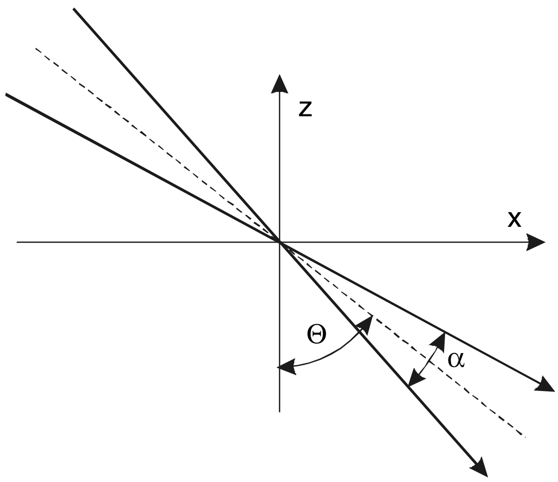
3 Model prążkowy

3.1 Interferencja skrzyżowanych wiązek

Przyjmijmy, że wiązki światła o takim samym natężeniu

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 \exp(i\phi_1), \\ E_2 &= E_0 \exp(i\phi_2), \end{aligned}$$

krzyżują się pod kątem α padają na ekran tak, że dwusieczna kąta α tworzy kąt Θ z normalną (z) do ekranu (równoległy do osi x) (rys. 3)



Rys. 3. Schemat interferencji dwu wiązek na ekranie wzdłuż osi x

Fazy fal

$$\phi = \vec{k} \cdot \vec{r}.$$

dla dwu wymiarów wynoszą (pomijając część czasową)

$$\begin{aligned} \phi_1 &= k\left[x \sin\left(\Theta - \frac{\alpha}{2}\right) + z \cos\left(\Theta - \frac{\alpha}{2}\right)\right], \\ \phi_2 &= k\left[x \sin\left(\Theta + \frac{\alpha}{2}\right) + z \cos\left(\Theta + \frac{\alpha}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Na ekranie wiązki interferują i natężenie wypadkowe wynosi

$$I = (E_1 + E_2)^2 .$$

Pojawienie się prążków interferencyjnych zależy od różnicy faz

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= k\left\{\left[x\sin\left(\Theta-\frac{\alpha}{2}\right)+z\cos\left(\Theta-\frac{\alpha}{2}\right)\right]-\right.\\ &\left.-\left[x\sin\left(\Theta+\frac{\alpha}{2}\right)+z\cos\left(\Theta+\frac{\alpha}{2}\right)\right]\right\}\\ &= 2k\sin\frac{\alpha}{2}\left(-x\cos\Theta+z\sin\Theta\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Tak więc czynnik interferencyjny ma postać

$$\cos\frac{2\pi}{d}\left(z\sin\Theta-x\cos\Theta\right).$$

Równanie przedstawia falę płaską o wektorze falowym leżącym w płaszczyźnie $(x,\, y)$ pod kątem Θ do osi x i długości fali

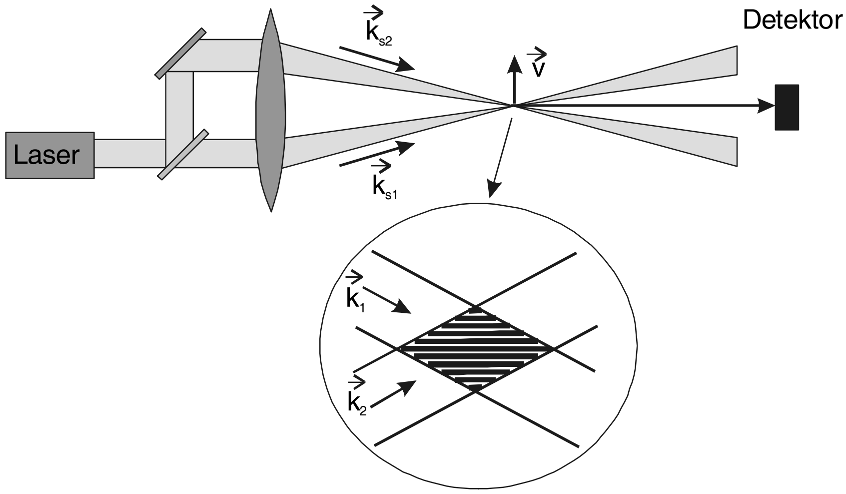
$$\lambda'=\frac{\lambda}{2\sin\left(\alpha/2\right)}.$$

Co wynika z (5), ponieważ długość nowego wektora falowego wynosi

$$k'=\frac{2\pi}{\lambda'}=2k\sin\frac{\alpha}{2}=2\frac{2\pi}{\lambda}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Stąd, dla $\Theta=0$, odległość między prążkami interferencyjnymi, które są równoległe do dwusiecznej kąta α, w płaszczyźnie ekranu wyraża się wzorem

$$d=\frac{\lambda}{2\sin\left(\alpha/2\right)}.$$



Rys. 4. Schemat aparatury i obraz interferencyjny w obszarze przecinania się wiązek

Schemat aparatury przedstawia rys. 4.

4 Wyznaczenie prędkości

Bez względu na zastosowany opis problem polega na zmierzeniu częstotliwości zmian natężenia promieniowania w czasie. W obu przypadkach

$$f = \frac{2v \sin(\alpha/2)}{\lambda}.$$

W jednym przypadku jest to częstotliwość zdudnień, a w drugim – częstotliwość przechodzenia cząsteczek rozpraszających przez maksima interferencyjne w obszarze nakładania się wiązek. Z (4) wyznaczamy kąt α i stąd znamy prędkość.

W rozwiązaniach eksperymentalnych częstotliwość można wyznaczyć stosując procedurę szybkiej transformaty Fouriera (FFT).

5 Literatura

1. Kjell J. Gåsvik, *Optical metrology*, John Wiley & Sons, Chichester –New York 1995.