Sympleksy w wielu wymiarach

Wstęp do katalogu "Komplex symplexu" wystawy Jerzego Olka i Witolda Szymańskiego, Wrocław: Oficyna Wydaw. Politechniki Wrocławskiej 2001

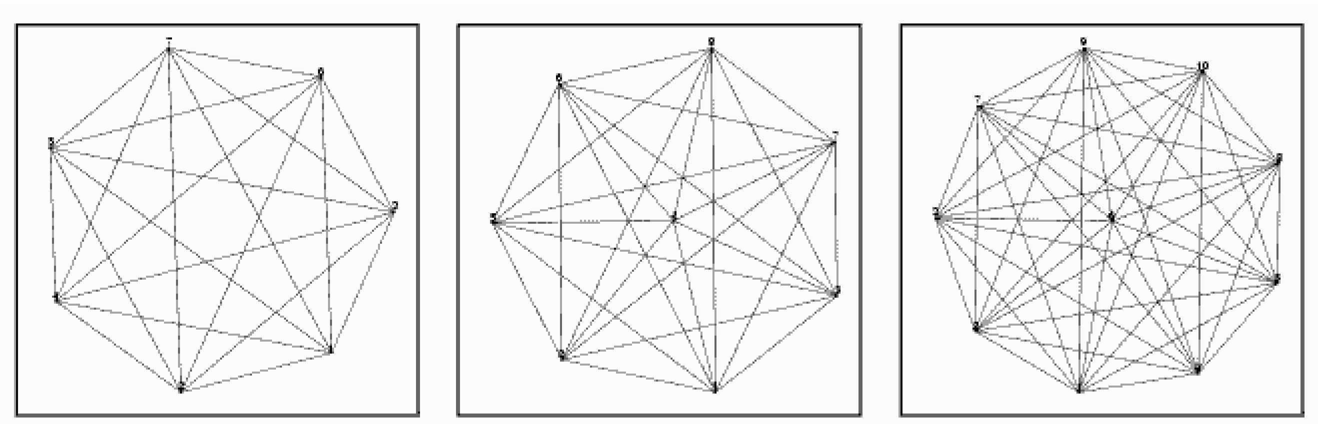
Tworzywem rzeczywistości jest wielowymiarowa geometria. Począwszy od Platona filozofowie i uczeni starali się odkryć świat idei, którego cienie widzimy wokół. Fundamentalne teorie fizyki to teorie geometryczne, z symetrii wynikają prawa zachowania wielkości fizycznych, dzięki symetriom możemy istnieć. Jak wygląda ten wielowymiarowy świat Prawdy i Piękna? Czy jest dostępny tylko abstrakcyjnym umysłom matematyków i fizyków? Nie potrafimy sobie wyobrazić wielowymiarowych obiektów, sztuka nie potrafiła nas do niego zbliżyć. Wystawa Jerzego Olka i Witolda Szymańskiego „Komplex symplexu" po raz pierwszy pozwala nam zajrzeć do tego świata Platońskiego piękna.

Sympleks to najprostsza i najbardziej symetryczna figura. Na płaszczyźnie to trójkąt równoboczny. Sympleks w 3 wymiarach to piramidka o 4 wierzchołkach. Wszystkie wierzchołki oddalone są od siebie o taką samą odległość, powiedzmy 1. W N wymiarach sympleks ma N+1 wierzchołków. Czy możemy sobie wyobrazić sympleksy w wielu wymiarach?

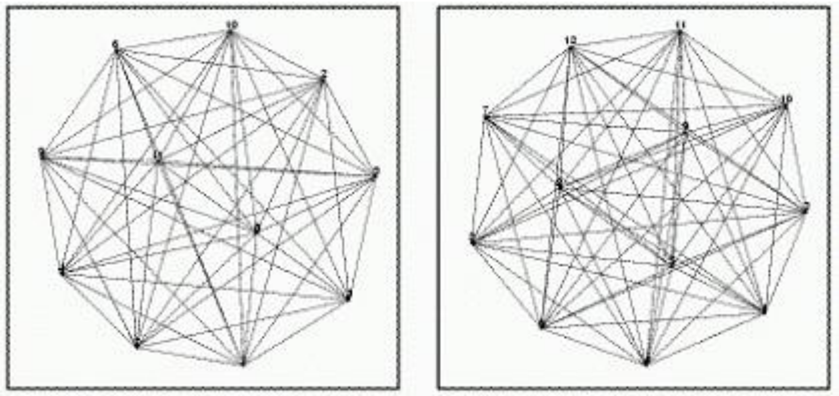
Niestety, nawet wyobraźnia artysty nie potrafi wykroczyć poza 3 wymiary, do których jesteśmy przystosowani ewolucyjnie. Możemy jednak spróbować tak odwzorować położenia wierzchołków sympleksów by zmniejszyć zniekształcenia w przedstawianych odległościach pomiędzy nimi. Jeśli odległość R_{ij} dowolnych wierzchołków o numerach i, j jest zawsze 1 to odległości r_{ij} pomiędzy odpowiadającymi im punktami na płaszczyźnie też powinny być jak najbliższe 1. Możemy wprowadzić miarę zniekształceń:

$$S = \min \sum_{i>j} \left(1 - r_{ij}\right)^2$$

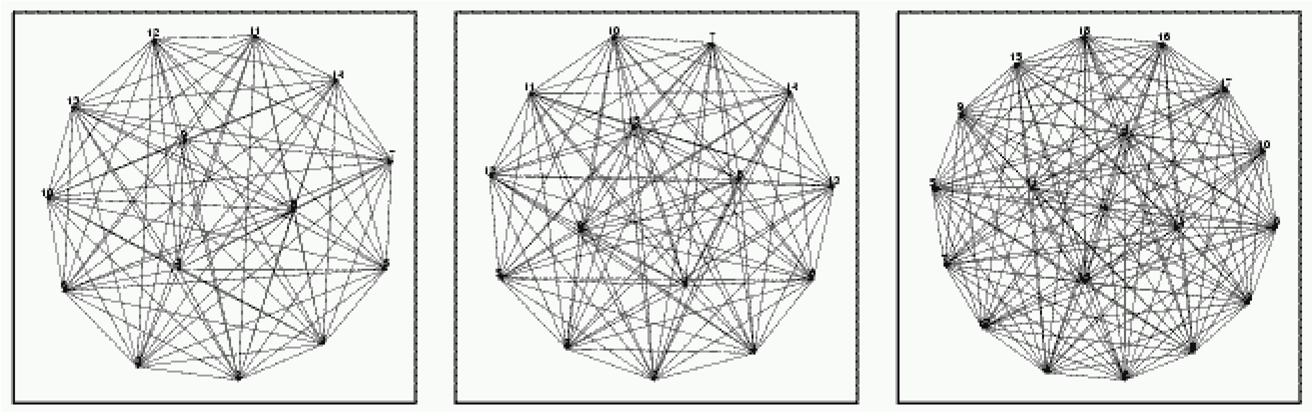
Minimum znajdziemy układając punkty na płaszczyźnie na wszelkie możliwe sposoby I obliczając odległości r_{ij}, Otrzymamy w ten sposób najmniej zniekształcony obraz sympleksu. Gdyby był to sympleks 2-wymiarowy, czyli trójkąt, to otrzymamy oczywiście zerowe zniekształcenia dla S=0. Dla większej liczby wymiarów rezultaty przedstawione są na rysunkach.



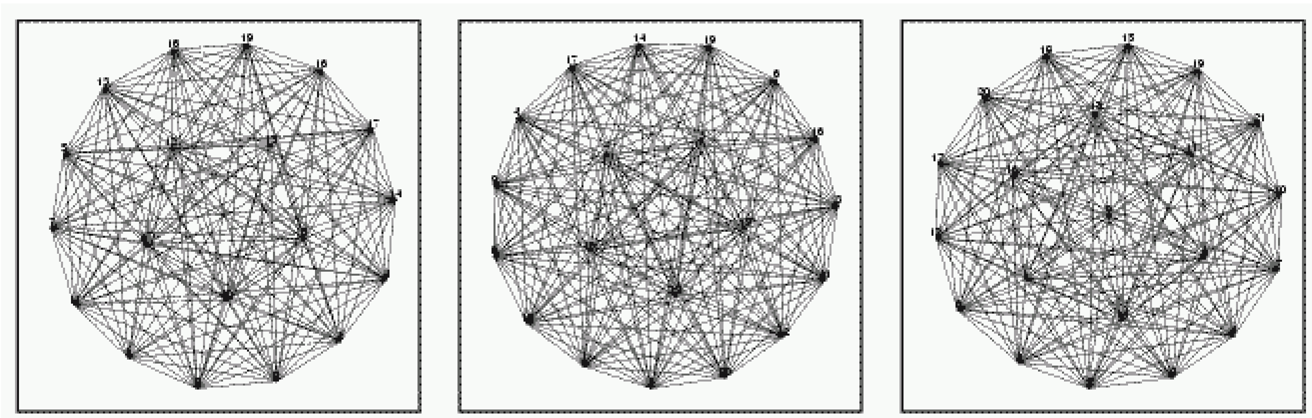
Do wymiaru 6 punkty układają się regularnie na okręgu; nie są one oczywiście wszystkie oddalone od siebie o 1, ale każde inne ułożenie punktów zwiększa miarę stopnia zniekształcenia S. Dla 7 do 9 wymiarów powstają rysunki z 1 punktem w centrum okręgu.



Dla 10 wymiarów pojawiają się 2 punkty wewnątrz a dla 11 wymiarów zaczyna się tworzyć wewnętrzny okrąg. Ten i następne rysunki nie są doskonale symetryczne – zapewne wynika to z niedoskonałości używanej przez nas minimalizacji (była nią oczywiście metoda sympleksów!).



Dla 12 i 13 wymiarów dodatkowe punkty pojawiają się na zewnętrznym okręgu; dla 14 wymiarów dodatkowy punkt pojawia się na okręgu wewnętrznym. Zwiększanie wymiaru do 17 pozostawia 4 punkty wewnątrz dodając kolejne znowu na zewnętrznym okręgu (rys. po prawej stronie). Punkt w centrum okręgu nie odpowiada wierzchołkowi, powstaje tylko na skutek przecięcia linii łączących wierzchołki.

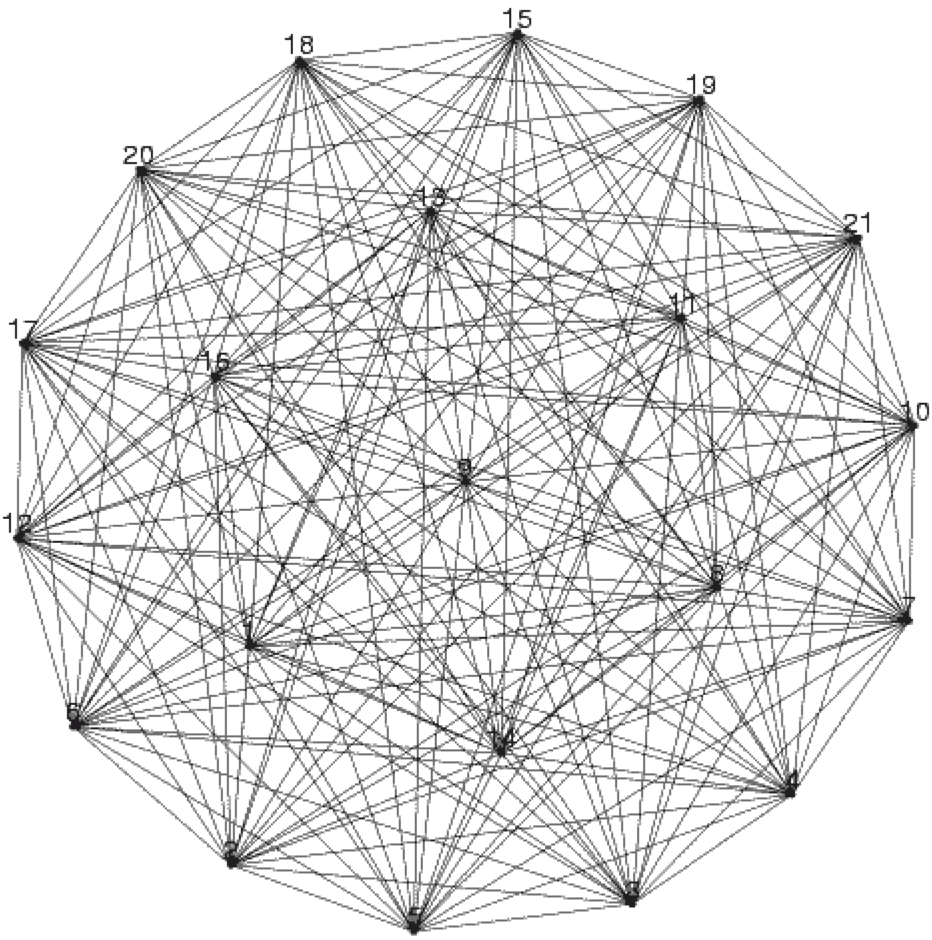


Dla 18 wymiarów pojawia się 5 punktów na wewnętrznym okręgu, dla 19 dodatkowy punkt na zewnętrznym a dla 20 jeden punkt w centrum okręgu. Czy jest tu jakaś regularność? Czy dla większej liczby wymiarów pojawią się kolejne okręgi wewnętrzne? Jak będą wyglądać sympleksy jeśli zastosować inne miary zgodności topograficznej?

Obrazki, które otrzymaliśmy przypominają eksperymenty ze sztuką iluzji geometrycznych op-art z lat 60. Widzimy wiec, że sztuka op-art jest szczególnym przypadkiem odwzorowania wielowymiarowych sympleksów!

Literatura:

Duch W and Naud A, *Simplexes, Multi-Dimensional Scaling and Self-Organized Mapping*. Proc. of the 8th Joint EPS-APS International Conference on Physics Computing '96, Kraków 17-21.9.1996, str. 367-370



Szczegóły odwzorowania 20-wymiarowego sympleksu.