

WYZNACZANIE PRZYSPIESZENIA ZIEMSKIEGO ZA POMOCĄ WAHADŁA PROSTEGO

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest praktyczne wykorzystanie elementów teorii drgań harmoniczných do opisu ruchu wahadła o zmiennej długości. Uznanie go za wahadło matematyczne oraz zastosowanie innego koniecznego przybliżenia pozwala potraktować je jak nietłumiony oscylator harmoniczny. Dzięki pomiarom czasów drgań wahadła przy różnych długościach potwierdza się izochroniczność ruchów oraz wyznacza się wartość przyspieszenia ziemskiego.

2. Zagadnienia do przygotowania

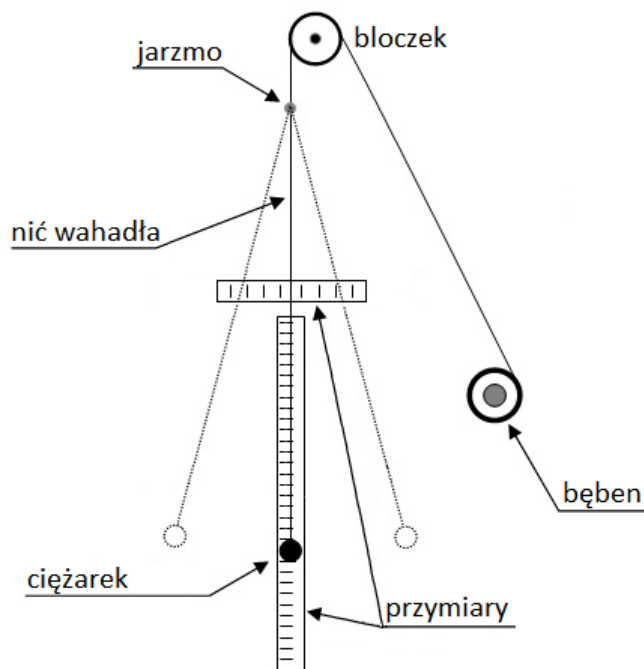
- ruch harmoniczny bez tłumienia
- wahadło matematyczne (w tym konieczne przybliżenia opisu) i fizyczne (mniej szczegółowo)
- pojęcie izochronizmu
- przyspieszenie grawitacyjne jako przejaw ciężenia powszechnego
- przyspieszenie ziemskie

3. Opis układu pomiarowego

Głównym elementem zestawu do pomiaru przyspieszenia ziemskiego jest wahadło proste – mosiężny ciężarek zawieszony na długiej nici (schemat przedstawiono na rys. 1). Punkt zawieszenia wahadła wyznacza nieruchome jarzmo przez które przewleczona jest nić, przełożona następnie przez bloczek i nawinięta na bęben z pokrętłem. Długość wahadła można regulować zwijając/rozwijając nić obrotami bębna.

Poniżej jarzma umocowane są przymiary przy pomocy których określa się położenia ciężarka oraz amplitudy jego drgań. Pomiary polegają na wyznaczeniu okresów drgań dla różnych długości wahadła (część główna), a także przy ich zmienionej amplitudzie (część końcowa).

Niezbędne przyrządy dodatkowe: stoper, kątownica ułatwiająca odczyt położenia ciężarka względem przymiaru pionowego.



Rys. 1. Schemat zestawu doświadczenia wahadła prostego o zmiennej długości.

* Aktualizacja: 2017-10-17

4. Przebieg ćwiczenia

Przymiar poziomy zamocowany jest w odległości około 128 cm od jarzma. Ustalamy odpowiednią amplitudę drgań wahadła:

- Obracając bębniem podnosimy ciężarek na wysokość przymiaru poziomego.
- Obliczamy wychylenie ciężarka w kierunku poziomym odpowiadające na tej wysokości kątowi odchylenia nici o 5° , zapisujemy obliczoną wartość jako A_1 . Sprawdzamy czy drgania o tej amplitudzie zachodzą bez przeszkód.

*W dalszym ciągu ćwiczenia, po każdej zmianie długości wahadła amplitudę wychyleń ciężarka należy dobrać tak, by skrajna pozycja **nici** względem przymiaru poziomego wynosiła A_1 (zapewniając amplitudę kątową ok. 5° niezależnie od długości wahadła).*

- Obracając bębniem opuszczamy ciężarek w pobliże (ale poniżej) górnego końca przymiaru pionowego i notujemy pierwszą pozycję ciężarka H_1 względem przymiaru pionowego.

Położenie ciężarka względem skali przymiaru pionowego należy ustalać z użyciem kątownicy. Przykłada się ją do przymiaru i do ciężarka w punkcie położonym najniżej a następnie odczytuje jego położenie z podziałki. Pozwala to zmniejszyć błędy pomiarów przez uniknięcie tzw. paralaksy.

- Odchylamy wahadło o kąt $\approx 5^\circ$ i mierzymy czas 15 pełnych cykli drgań; zapisujemy wynik t_1 w tabeli pomiarów (przykład: tab.1).
 - Czynności z punktu powyżej powtarzamy jeszcze czterokrotnie; uzyskane dane pozwolą wyznaczyć okres drgań T_1 dla pierwszej długości wahadła.
- Zatrzymujemy drgania i obracając bęben obniżamy ciężarek zmieniając tym samym długość wahadła o około 100 mm (pokrętko działa skokowo); wyznaczamy i zapisujemy nowe położenie H_2 ciężarka wahadła.

Uwaga: Nić przechodzi przez jarzmo z pewnym oporem. Przy zwiększaniu długości wahadła (rozwijaniu nici z bębna) należy upewnić się, że nić jest naciągnięta po obydwu stronach bloczka pociągając w dół ciężarek (niezbyt mocno, do wyczuwalnego oporu).

- Wykonujemy pomiary jak w punktach a) i b) powyżej, uzyskując dane do ustalenia średniego okresu drgań T_2 dla drugiego ustawienia długości wahadła.
- Ponownie wydłużamy wahadło o około 100 mm i powtarzamy te same czynności uzyskując dane do wyznaczenia średniego okresu drgań T_3 dla trzeciego ustawienia położenia ciężarka H_3 .
- Powtarzamy czynności dla następnych, coraz niższych położzeń ciężarka aż do H_{11} , w celu wyznaczenia kompletu odpowiadających im wartości okresów (T_1, \dots, T_{11}).

Tabela 1. Czasy 15 cykli drgań wahadła dla różnych długości – wyniki pomiarów.

| i | Pozycja ciężarka H_i (mm) | Amplituda (kątowna) | Czasy 15 cykli drgań t_i (s) | | | |
|-----|-----------------------------|---------------------|--------------------------------|--|--|--|
| 1 | | $\approx 5^\circ$ | | | | |
| 2 | | $\approx 5^\circ$ | | | | |
| ... | | $\approx 5^\circ$ | | | | |
| 11 | | $\approx 5^\circ$ | | | | |
| 11' | j.w. | $\approx 2,5^\circ$ | | | | |

- dla ostatniego położenia ciężarka (H_{11}) powtarzamy jeszcze raz taką samą serię pomiarów czasu – punkty a) i b) – przy amplitudzie drgań zmniejszonej o około połowę (wychylając ciężarek tak, by pozycja nici względem przymiaru poziomego wyniosła $A_1/2$) uzyskując dane do wyznaczenia średniego okresu T_{11}' .
- zapisujemy informacje o źródłach błędów i dokładnościach użytych przyrządów.

5. Opracowanie wyników

Obliczamy średnie czasy \bar{t}_i trwania 15 cykli drgań dla wszystkich ustawień H_i wahadła (także dla zmniejszonej amplitudy). Szacujemy niepewności standardowe wszystkich wielkości zmierzonych bezpośrednio. Wyniki obliczeń przedstawiamy w formie tabeli (przykład poniżej – tab. 2) z podaniem niepewności standardowych.

Tabela 2. Zależności pomiędzy ustawieniem wahadła (długością) i okresem drgań – wyniki obliczeń.

| i | H_i (m) | \bar{t}_i (s) | T_i (s) | T_i^2 (s ²) |
|-----|------------------|-----------------|-----------|---------------------------|
| 1 | wart. ± niep.st. | ± | ± | ± |
| 2 | ± | ± | ± | ± |
| ... | ± | ± | ± | ± |
| 9 | ± | ± | ± | ± |
| 11 | ± | ± | ± | ± |
| 11' | ± | ± | ± | ± |

Następnie wyznaczamy okresy drgań $T_i = \bar{t}_i/15$ i ich niepewności standardowe. Na potrzeby dalszej analizy wyliczamy również kwadraty okresów T_i^2 i ich niepewności standardowe.

Dysponując takimi danymi można obliczyć przyspieszenie ziemskie w oparciu o wybrane pary danych $\{H_i, T_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, 11$) korzystając z formuły:

$$g_{ij} = 4\pi^2 \frac{H_i - H_j}{T_i^2 - T_j^2} \quad \left(g_{ij} = 4\pi^2 \frac{L_i - L_j}{T_i^2 - T_j^2} \right), \quad (1)$$

która wynika ze znanej zależności okresu drgań wahadła od jego długości:

$$T = 2\pi\sqrt{L/g} \quad (2)$$

oraz faktu, że różnice długości wahadła $L_i - L_j$ są równe różnicom $H_i - H_j$ położen ciężarka względem pionowego przymiaru. Dokładne wyznaczenie długości L wahadła jest bardzo trudne, natomiast pomiary położen ciężarka H daje się wykonać ze znacznie mniejszymi niepewnościami względnymi. Z tego powodu wahadło o zmiennej długości nazywane jest często *wahadłem różnicowym*.

Mimo wszystko, wartości g_{ij} wyznaczone przy pomocy równania (1) dla różnych par $\{i, j\}$ ustawień wahadła nierzadko wykazują duży rozrzut (w opracowaniu należy podać dwa skrajne wyniki i przeanalizować czy ich przedziały ufności mają część wspólną). Lepsze efekty można uzyskać stosując metodę wykorzystującą jednocześnie wszystkie uzyskane dane.

Wprowadzając oznaczenia:

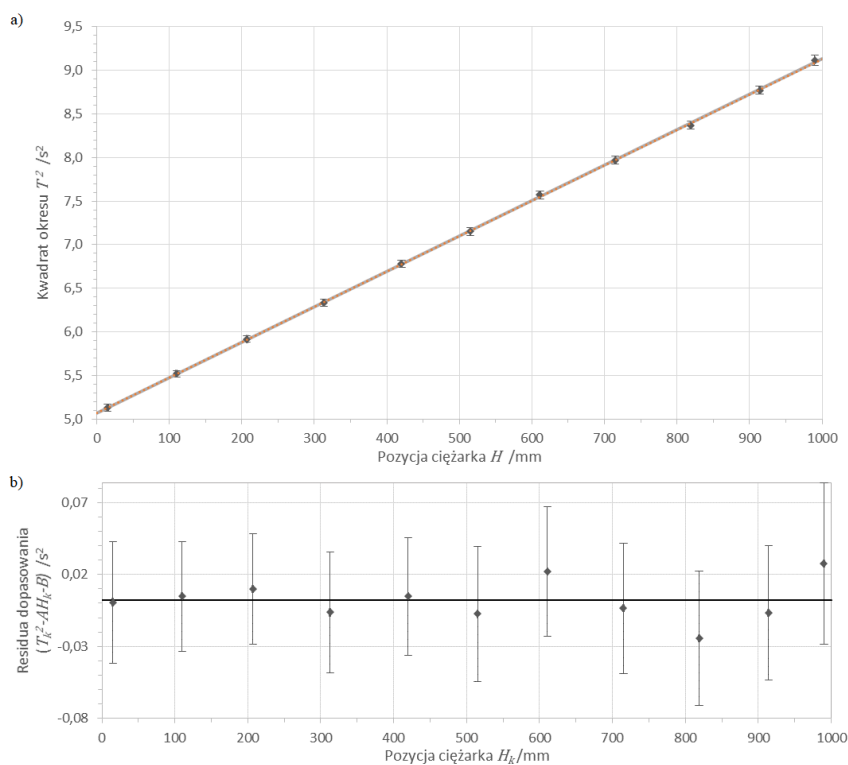
$$\text{a) } L_k = H_k + L_0 \quad \text{b) } A = \frac{4\pi^2}{g} \quad \text{c) } B = \frac{4\pi^2}{g} L_0 \quad (3)$$

(gdzie L_0 jest określone położeniem zera skali przymiaru pionowego względem punktu zawieszenia wahadła), możemy w kilku krokach przekształcić równanie (2) do postaci:

$$T_k^2 = A \cdot H_k + B \quad (4)$$

którą potraktujemy jako równanie prostej ($y = Ax + B$). Metodą najmniejszych kwadratów dopasowujemy prostą do 11 punktów pomiarowych $\{x_k, y_k\} = \{H_k, T_k^2\}$ ($k = 1, 2, \dots, 11$): obliczamy wartości współczynników A i B oraz ich niepewności standardowe, które następnie należy wykorzystać do wyliczenia przyspieszenia ziemskiego g i jego niepewności standardowej (w oparciu o stosowne przekształcenie równania (3b)). Należy także wyjaśnić czym jest współczynnik B – dość często parametry funkcji modelowych posiadają zrozumiałą interpretację fizyczną.

Jak w każdym przypadku zastosowania metody dopasowania modelowej zależności do punktów pomiarowych przygotowujemy wykres zawierający te punkty ($\{H_k, T_k^2\}$, $k = 1, 2, \dots, 11$) razem z linią stanowiącą wykres dopasowanej funkcji modelowej (tutaj prosta $T^2 = A \cdot H + B$). Pełne przedstawienie graficzne ilustrujące dopasowanie powinno zawierać także tzw. słupki błędów o wielkościach odpowiadających oszacowanym niepewnościom danych doświadczalnych (przykład na rys. 2a). Należy pamiętać, że taki wykres niekoniecznie skutecznie wykazuje skalę ewentualnych rozbieżności pomiędzy modelem i punktami pomiarowymi. Najczytelniejszym sprawdzianem jakości dopasowania jest wykres tzw. residuów taki jak na rys. 2b.



Rys. 2. Wykresy ilustrujące dopasowanie modelu do danych pomiarowych.

Oprócz wyników obliczeń i wykresu (lub wykresów), w sprawozdaniu umieszczamy także wnioski z porównania otrzymanej wartości przyspieszenia ziemskiego z wartością referencyjną $g_r = 9,813 \text{ m/s}^2$ przyjmowaną dla Torunia. Przeprowadzamy także weryfikację izochronizmu ruchów wahadła, porównując ze sobą wyznaczone okresy T'_{11} i T_{11} drgań wahadła dla tej samej długości, ale przy różnych amplitudach wahań.

6. Literatura

- T. Dryński, „Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki”, wyd. VI, PWN, Warszawa 1977 (lub inne wydanie)
- H. Szydłowski, „Pracownia fizyczna”, wyd. IX, PWN, Warszawa 1997 (lub inne wydanie)
- D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, „Podstawy fizyki”, PWN, Warszawa 2007
- C. Kittel. W.D. Knight, M.A. Ruderman, „Mechanika”, PWN, Warszawa 1973
- A.H. Piekara, „Mechanika ogólna”, wyd. VII, PWN, Warszawa 1986 (lub inne wydanie)
- A.W. Wróblewski, J.A. Zakrzewski, „Wstęp do fizyki”, tom 1, PWN, Warszawa 1984
- A. Bielski, R. Ciuryło, „Podstawy metod opracowania pomiarów”, wyd. II, Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń 2001