I PRACOWNIA FIZYCZNA, INSTYTUT FIZYKI UMK, TORUŃ

Instrukcja do ćwiczenia nr 104 *

WYZNACZANIE GĘSTOŚCI CIAŁ STAŁYCH IV

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wykonanie prostych pomiarów na elementach zbioru ciał stanowiących zespół – próbkę statystyczną, pozwalających na zastosowanie – z jednej strony – podstawowych metod analizy danych (szczególnie niepewności pomiarowych), z innej – jednego ze sposobów prezentacji danych statystycznych. Bezpośrednim pomiarom podlegają masy i wymiary brył regularnych. Wielkościami wyznaczanymi pośrednio są objętości i średnie gęstości brył.

2. Przebieg ćwiczenia

- mierzymy suwmiarką lub śrubą mikrometryczną średnicę każdej ze 100 kulek (notujemy *błąd graniczny* przyrządu)
- wyznaczamy łączną masę M wszystkich 100 kulek przy pomocy wagi precyzyjnej (notujemy informacje o dokładności pomiaru)
- spośród 100 zbadanych kulek wybieramy 10 dowolnych, a następnie mierzymy średnicę d_k (k = 1,…,10) oraz jednokrotnie ważymy każdą z nich osobno na wadze precyzyjnej (ustalając m_k)

3. Opracowanie wyników - schemat wykonania obliczeń

- obliczamy średnią dla zbioru średnicę kulki i odchylenie standardowe stosując wzory:

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i \qquad (1) \qquad\qquad S_{\mathrm{d}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2} \qquad (2)$$

  (gdzie n oznacza liczbę kulek, w tym przypadku n = 100)

- szacujemy niepewność standardową $U_{\bar{d}}$ z jaką wyznaczona została uśredniona w zbiorze średnica kulki uwzględniając zarówno błędy przypadkowe, jak i przyczynki do niepewności związane z dokładnością przyrządu pomiarowego (dodatkowe wyjaśnienia umieszczono na końcu instrukcji)
- w celu sporządzenia histogramu: znajdujemy najmniejszą i największą wartość średnicy $d_{\min}$ i $d_{\max}$, po czym dobieramy szerokość przedziałów Δd: dzielimy tzw. rozstęp, czyli różnicę $d_{\max} - d_{\min}$, przez liczbę przedziałów, np. N = 10; najczytelniejsze histogramy uzyskuje się tak dobierając N oraz zaokrąglając Δd i dolną granicę pierwszego przedziału ($d_0 < d_{\min}$), by uzyskane w ten sposób granice przedziałów wartości średnic: $\langle d_0, d_0 + \Delta d\rangle, \langle d_0 + \Delta d, d_0 + 2\Delta d\rangle, \ldots, \langle d_0 + (N-1)\Delta d, d_0 + N\Delta d\rangle$ nie miały postaci wielocyfrowych ułamków dziesiętnych utrudniających korzystanie z histogramu
- każdą zmierzoną wartość średnicy zaliczamy do tylko jednego z przedziałów (przedtem, dla ułatwienia, należy posortować wyniki pomiarów w porządku rosnącym)
- wykonujemy histogram, w postaci wykresu kolumnowego, w którym wysokości kolumn określone są liczebnością wyników mieszczących się w poszczególnych przedziałach; uwaga: fakt, że średnica jest wielkością ciągłą należy zasygnalizować na histogramie przez użycie kolumn o podstawach równych szerokości przedziałów

* Aktualizacja: 2017-02-27

- na histogramie zaznaczamy wartość średniej $\bar{d}$ oraz zakresy niepewności standardowej $U_{\bar{d}}$ i odchylenia standardowego S_d
  - histogram można przygotować wykorzystując wbudowane funkcje arkusza kalkulacyjnego nie polegając jednak zbyt mocno na domyślnych ustawieniach oprogramowania
  - dobrym pomysłem jest wypróbowanie więcej niż jednego wariantu N i d_0 i wybranie tego, który najlepiej przedstawia szczegóły rozkładu wartości w zbiorze
- dla każdej ze średnic d_i obliczamy odpowiadająca jej objętość kulki $V_i = \pi d_i^3/6$
- następnie obliczamy uśrednioną w zbiorze objętość kulki i jej niepewność standardową:

$$\bar{V} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i \qquad U_{\bar{V}} = \frac{\pi}{2n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^4} \cdot U_{\bar{d}} \quad **$$

- znając masę 100 kulek obliczamy średnią masę pojedynczej kulki oraz niepewność standardową, z jaką została wyznaczona:

$$\bar{m} = \frac{M}{n} \qquad U_{\bar{m}} = \frac{U_M}{n}$$

  (gdzie U_M oznacza niepewność standardową dla łącznej masy 100 kulek)
- na podstawie powyższych danych obliczamy gęstość materiału z którego wykonane są kulki i jej niepewność standardową:

$$\rho = \frac{\bar{m}}{\bar{V}} \qquad U_\rho = \rho\sqrt{\left(\frac{U_{\bar{m}}}{\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{U_{\bar{V}}}{\bar{V}}\right)^2}$$

- na podstawie zmierzonych 10 par wartości $\{d_k, m_k\}$ obliczamy gęstości ρ_k (k =1, …, 10) poszczególnych kulek i ich *niepewności standardowe* U_{ρ_k} (ze względu na jednokrotne pomiary ustalamy je uwzględniając tylko przyczynki *typu B* związane z ograniczoną dokładnością przyrządów)
- wyniki wszystkich obliczeń przedstawiamy stosując odpowiednie zasady zapisu i zaokrągleń
- przedstawiamy wyniki analizy zgodności wyników ρ_k (k =1, …, 10) między sobą oraz z wartością ρ ustaloną dla zbioru 100 kulek
- porównujemy ustaloną wartość gęstości materiału, z którego wykonane są kulki z danymi literaturowymi (szkło bezołowiowe)

** W formule służącej do obliczenia szacunkowej wartości niepewności standardowej średniej objętości kulki przyjęto, że niepewności standardowe indywidualnych średnic należy zastąpić niepewnością standardową wyznaczonej średniej (czyli $U_{\bar{d}}$)

Wyjaśnienia dotyczące szacowania niepewności

<u>*Niepewność standardowa*</u> wielkości *x*, której wartość wyznaczana jest w serii *N* pomiarów bezpośrednich przyrządem o błędzie granicznym Δ_{gr} oblicza się jako:

$$\boldsymbol{U_x = \sqrt{u_A^2 + u_B^2 + u_{B'}^2 + \cdots}}$$

Szczegóły obliczeniowe:

$\boldsymbol{u_A = t_{N-1;\,0{,}6827} \cdot S_{\bar{x}}}$ - ***niepewność standardowa typu A*** związana ze źródłami błędów przypadkowych, obliczana z założeniem normalnego rozkładu odchyleń wyników pomiarów od wartości właściwej

Wielkości $S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$ (*odchylenie standardowe średniej*) i $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ (*średnia arytmetyczna*) to dwa z podstawowych parametrów statystycznych serii o wynikach $\{x_i, i = 1, 2, \ldots, N\}$, które najlepiej obliczyć przy pomocy arkusza kalkulacyjnego. $t_{N-1;\,0{,}6827}$ oznacza *współczynnik Studenta-Fishera* dla liczby *N* powtórzeń pomiarów w serii oraz dla *poziomu ufności* 0,6827. Wartość współczynnika odczytujemy z tablic *współczynników Studenta-Fishera* (dostępnych np. na stronie internetowej I Pracowni Fizycznej i w wielu podręcznikach analizy niepewności pomiarowych). Istnieją także funkcje w arkuszach kalkulacyjnych obliczające ich wartości.

Użycie *współczynników Studenta-Fishera* jest konieczne przy „krótkich" seriach pomiarowych (przyjmuje się za takie serie z *N* nieprzekraczającym 30). Niewielka liczba powtórzeń stwarza ryzyko otrzymania danych o niereprezentatywnym, zbyt małym rozrzucie. Z analizy metodami statystyki i rachunku prawdopodobieństwa (przeprowadzonej po raz pierwszy przez W.S. Gosseta – ps. Student,1908), wynika prawidłowość, zgodnie z którą, określony odsetek serii pomiarowych dostarcza danych zaniżających wartości miary rozrzutu. Przy niewielkich liczbach pomiarów odsetek ten jest przeważający i dość znaczący. Skutki zaniżenia korygowane są (z punktu widzenia statystyki wielu serii pomiarowych) przy pomocy *współczynników Studenta-Fishera*. W przypadkach „długich" serii pomiarowych ($N > 30$) wartości $t_{N-1;\,0{,}6827}$ są bardzo bliskie 1, więc jako wartości *niepewności standardowej typu A* przyjmuje się wtedy *odchylenia standardowe średniej* $S_{\bar{x}}$.

$\boldsymbol{u_B = \Delta_{gr}/\sqrt{3}}$ - ***niepewność standardowa typu B*** związana z błędami pomiarowymi wynikającymi z ograniczonej dokładności zastosowanego przyrządu

Jeżeli producent specyfikuje dla przyrządu więcej (niż jeden) niezależnych przyczynków do niepewności tego typu, każdemu z nich powinien odpowiadać dodatkowy składnik w sumie pod pierwiastkiem w równaniu na U_x. Czasami producenci zamiast błędów granicznych Δ_{gr} (z oznaczeniem ±), podają ich miary odpowiadające odchyleniom standardowym rozkładów błędów, czyli bezpośrednio wartości przyczynków $\boldsymbol{u_B}$.

Wskazówka: w bieżącym ćwiczeniu, w związku z jednokrotnymi pomiarami mas, w niepewnościach U_M i U_{m_j} uwzględnia się tylko przyczynki *typu B*. Jeden z nich jest specyfikowany przez producenta w postaci miary $\boldsymbol{u_B}$.