Literatura:

- Henryk Głowacki *Mechanika techniczna, statyka i kinematyka*
- Jan Misiak *Mechanika techniczna, tom 1,2*
- R.Feynman *Feynmana wykłady z fizyki*
- Janusz Araminowicz *Zbiór zadań z fizyki*
- Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, David F. Mazurek, Phillip J. Cornwell, Elliot R. Eisenberg *Vector Mechanics For Engineers*

Statyka punktu i bryły

Statyka punktu materialnego

1. *Ciężar wisi na dwóch linkach o różnych długościach jak na rysunku 1 . Oblicz naprężenia linek.*

2. *Sztywna rama z drutu w kształcie trójkąta jest umieszczona w płaszczyźnie pionowej. Na bokach ramy o kątach nachylenia α i β do poziomu i wspólnym wierzchołku nawleczone są dwa koraliki o masach odpowiednio m_1 i m_2 połaczone nierozciągliwą nitką. Koraliki mogą się ślizgać po bokach ramy bez tarcia. Jaki kąt γ tworzy nić z poziomem, gdy układ jest w równowadze?*

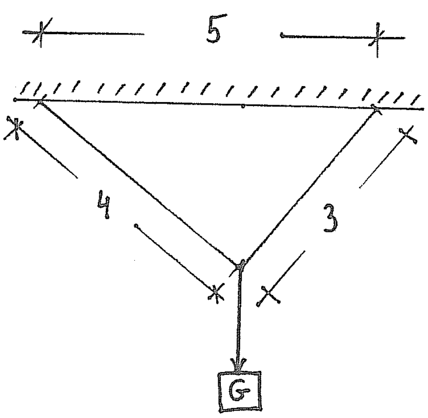
Odp. $\operatorname{tg}\gamma = \frac{m_2 \operatorname{ctg}\alpha - m_1 \operatorname{ctg}\beta}{m_2 + m_1}$

W poniższych zadaniach wystarczy wiedzieć, że nić po obu stronach bloczka jest napięta tę samą siłą.

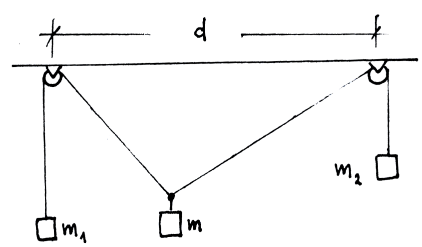
3. *Dla układu z rysunku 2 oblicz położenie równowagi ($\max\{m_1, m_2\} < m < m_1 + m_2$). Podaj jego współrzędne względem lewego bloczka.*

4 (*). *Rozwiąż te same zadanie minimalizując energię układu przy warunku stałej odległości między punktami. Czy położenie równowagi jest stabilne?*

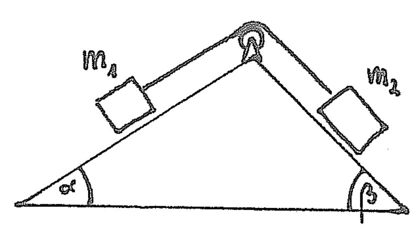
5. *Na dwóch zboczach równi obustronnej o kątach α i β leżą klocki o masach m_1 i m_2, połączone nieważką linką przechodzącą przez nieważki bloczek na szczycie równi, jak na rysunku 3. Jaki musi być stosunek mas, by układ był w równowadze? Jaki jest zakres stosunku mas by układ pozostał w równowadze, jeżeli maksymalny współczynnik tarcia statycznego wynosi f?*



Rys. 1: Rysunek do zadania 1



Rys. 2: Rysunek do zadania 3

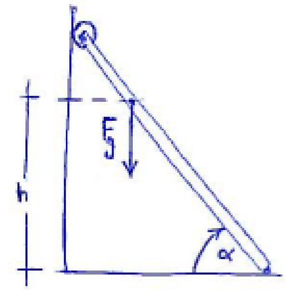


Rys. 3: Rysunek do zadania 5

Statyka bryły

6. *Drabina długości l zakończona kółeczkami stoi oparta o ścianę pod kątem α. Na wysokości h jest obciążona ciężarem F_g. Ciężar drabiny pomijamy.*

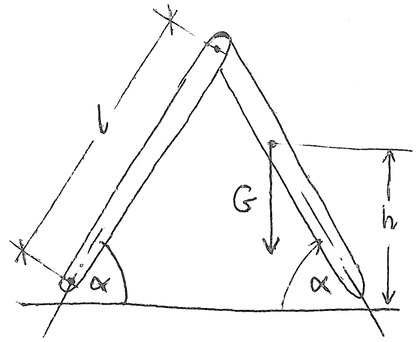
- *Jakie rodzaje podpór występują w tej sytuacji*
- *Jakie są siły reakcji w podporach?*



Rys. 4: Drabina oparta o ścianę, rysunek do zadań 6 i 7

7. *Załóżmy że drabina z poprzedniego zadania jest składana i że łączenie dwóch członów występuje w jej połowie. Jakie siły i jaki moment przenosi łączenie? Rozważ przypadki gdy $h < l/2$ i gdy $h > l/2$.*

8. *Drabina podwójna o długości obu ramion l połączonych przegubowo tworzy kąt α z podłożem i jedna jej część jest obciążona na wysokości h ciężarem G (rysunek 5). Jakie są reakcje podłoża i jakie siły przenosi łączenie?*

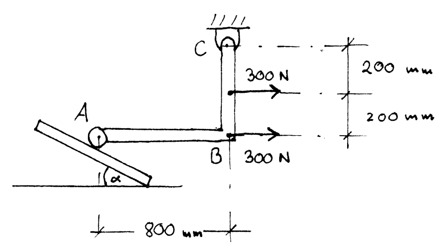


Rys. 5: Drabina podwójna, rysunek do zadania 8

9. *Wyznacz reakcje w punktach A i C dla wartości kąta α wynoszących $0°$ i $30°$ na rysunku 6.*

Wykorzystanie środków sił równoległych

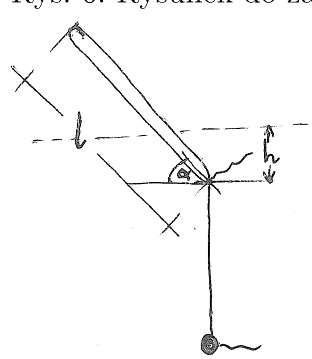
10. *Drabina z zadania 6 ma współczynnik tarcia o podłogę równy $\mu = 0.4$. Jaki może być być minimalny kąt α, dla którego drabina się nie ślizga?*



Rys. 6: Rysunek do zadania 9

11. *Drabina z zadania 6 ma współczynnik tarcia o podłogę równy $\mu = 0.2$, a kąt α wynosi $30°$. Na jakiej maksymalnej wysokości można umieścić masę 70 kg, by drabina nie ślizgała się? Rozwiąż to zadanie dla masy drabiny wynoszącej 12 kg i rozłożonej równomiernie.*

12. *Spławik ma długość l, kształt patyczka o stałym przekroju poprzecznym i jest wykonany z balsy o gęstości 9 razy mniejszej niż woda. Spławik jest przytwierdzony do dna za pomocą żyłki z ciężarkiem, a jego dolny koniec jest na głębokości $h < l$ pod powierzchnią (rysunek 7). Jaki kąt tworzy spławik z powierzchnią wody i dla jakiego h spławik będzie stał pionowo?*



Rys. 7: Rysunek do zadania 12

13. *Skrzynia o długości l i wysokości h stoi na równi pochyłej o kącie nachylenia α na czterech nóżkach w rogach podstawy. Jakie są składowe prostopadłe reakcji podłoża działających na nóżki?*

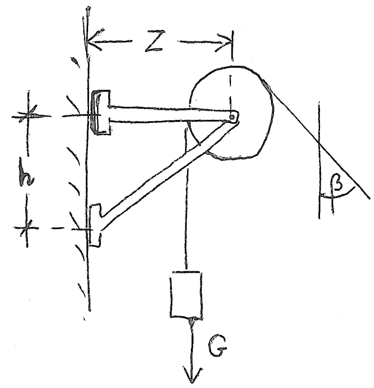
14. *Akwarium o masie m_0 jest podparte na dwóch podporach na poziomym podłożu. W akwarium jest piasek o masie m usypany pod kątem α. Jakie są reakcje podpór?*

15. *Drut o masie m wygięto tak, że tworzy trzy boki kwadratu i jego jeden koniec zawieszono. Na drugim końcu powieszono masę M i przekątna kwadratu jest w pionie. Jaka jest wartość masy M?*

16. *Jaki kąt tworzy przekątna z pionem w poprzednim zadaniu, jeżeli drut nie jest obciążony dodatkową masą?*

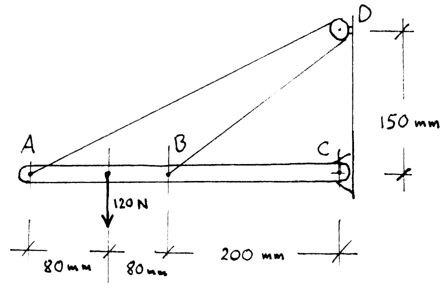
Bloczki

17. *Dźwigar prętowy jest zamocowany w dwóch miejscach prętami do ściany a na drugim końcu ma bloczek przez który przerzucona jest lina. jeden koniec liny jest obciążony ciężarem G, a drugi koniec liny jest trzymany pod kątem β do pionu. Jakie są siły reakcji podpór dźwigara? Jak można regulować rozkład składowej równoległej pomiędzy wkręty?*



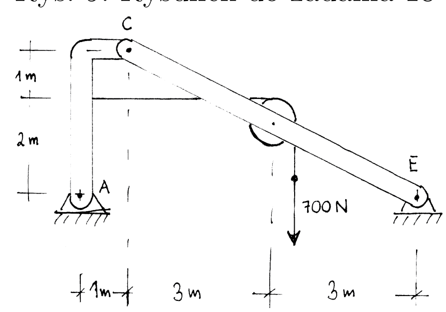
Rys. 8: Rysunek do zadania 17

18. *Wyznacz naprężenie linki i reakcję w punkcie C dla konstrukcji z rysunku 8.*



Rys. 9: Rysunek do zadania 18

19. *Wiedząc że promień bloczku na rysunku 9 jest równy 0.5m, wyznacz reakcje w punktach A i E oraz reakcję wewnętrzną w punkcie C.*



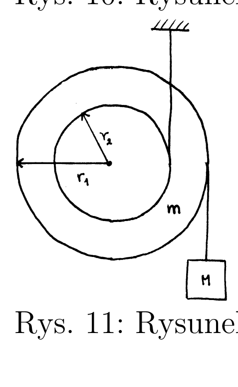
Rys. 10: Rysunek do zadania 19

20. *Zblocze to dwa (lub więcej) nieruchome względem siebie współosiowe bloczki. Przez większe koło zblocza przerzucona jest lina. Po jednej stronie do liny przyłożona jest pionowa siła F_1, po drugiej stronie lina przechodzi przez blok obciążony siłą pionową F i wraca na drugie koło w zbloczu na który jest nawinięta. Oblicz:*

- *Zależność między siłą F_1 a siłą F*
- *Z zasady zachowania energii zależność prędkości wiszącego bloku od prędkości wolnego końca liny*

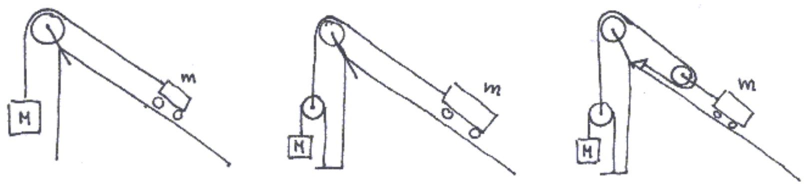
Oblicz to samo w przypadku gdy lina nawinięta jest na koła zblocza w kierunkach zgodnych.

21. *Zblocze o masie m i promieniach szpul r_1 i r_2 jest zawieszone na lince nawiniętej na szpulę o mniejszym promieniu. Na szpuli o większym promieniu nawinięta jest linka na których wisi masa M (rysunek 10). Ile wynosi M, jeżeli układ jest w równowadze?*

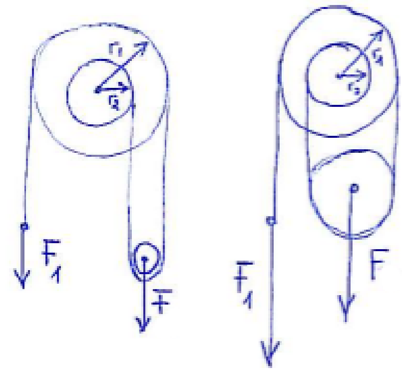


Rys. 11: Rysunek do zadania 21

22. *Jaki musi być stosunek mas m i M by układ z rysunku 12 pozostał w równowadze? Równia ma kąt nachylenia α.*



Rys. 12: Rysunki do zadania 22



Rys. 13: Rysunki do zadania 20

Siły i momenty rozłożone

Obliczanie środków ciężkości

23. *Wyznaczyć środek ciężkości trójkąta prostokątnego o o bokach a, b.*

24. *Wyznaczyć środek ciężkości kwadratu o o boku a z wyciętym otworem o promieniu r w 2/3 przekątnej.*

25. *Wyznaczyć środek ciężkości jednorodnego stożka o promieniu podstawy r i wysokości h.*

Odp. na wysokości $h/4$.

26. *Wyznaczyć środek ciężkości jednorodnego walca o promieniu r i wysokości h.*

27. *Wyznaczyć środek ciężkości jednorodnej półkuli.*

Odp. na wysokości $3/8r$.

28. *Figura składa się z półkuli o promieniu R na której jest stożek o promieniu R i wysokości h. Figura stoi pionowo, stożkiem do góry. Jaka jest graniczna wartość wysokości, dla której równowaga przestaje być równowagą trwałą?*

29. *Figura składa się z półkuli o promieniu R na której jest walec o promieniu r i wysokości h. Figura stoi pionowo, walcem do góry. Dla jakich wartości r i h równowaga jest trwała?*

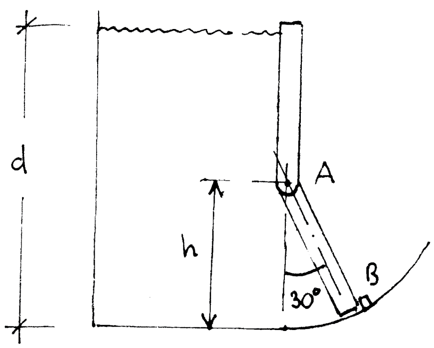
Hydrostatyka

30. *Dla tamy na kanale o przekroju prostokątnym o głębokości h i szerokości w oblicz siłę naporu wody na tamę i moment tej siły liczony od punktu przy dnie na środku tamy. W którym punkcie należy przyłożyć do tamy tę siłę?*

31. *Dla tamy na kanale o przekroju trapezu o głębokości h, szerokości przy dnie a i szerokości przy lustrze wody b oblicz siłę naporu wody na tamę i moment tej siły liczony od punktu przy dnie na środku tamy. W którym punkcie należy przyłożyć do tamy tę siłę?*

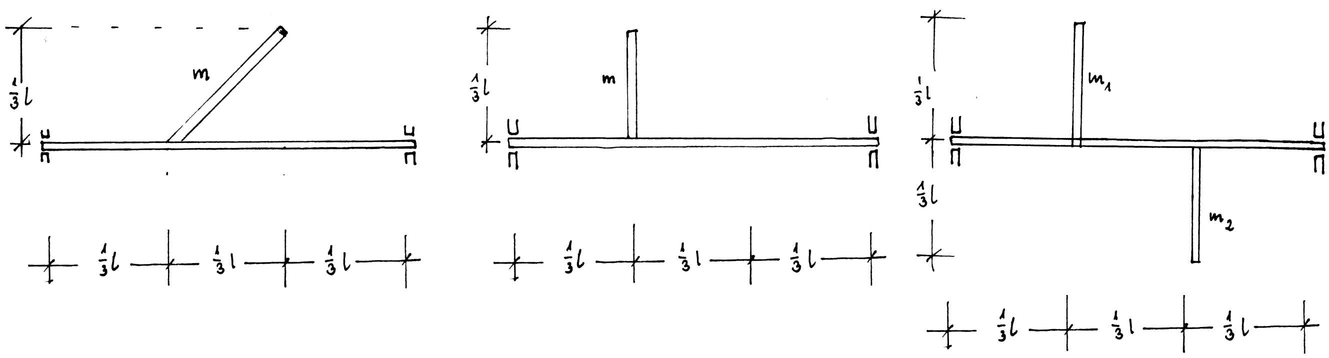
32. *Na rysunku 14 kwadratowe wrota AB są umieszczone na zawiasach w punkcie A i utrzymywane przez trzpień w punkcie B pod kątem 30° w stosunku do pionu. Wyznacz reakcję w punkcie B.*

33. *Wrota dziobowe promu mają przekrój trapezu równoramiennego o szerokości na dole a , szerokości na górze b i wysokości h i są nachylone w stosunku do pionu o 30°. Wrota mają grubość w i są wykonane ze stali o gęstości ρ. Oblicz siłę naporu wody na wrota i punkt jej przyłożenia oraz ciężar wrót i punkt jego przyłożenia.*

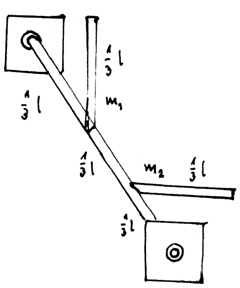


Rys. 14: Rysunek do zadania 32

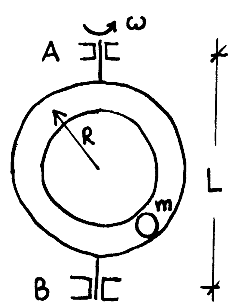
Reakcje dynamiczne łożysk



Rys. 15: Rysunek do zadania 34



Rys. 16: Rysunek do zadania 34



Rys. 17: Rysunek do zadania 36

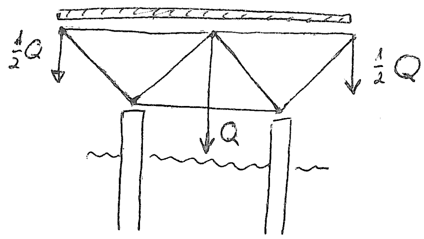
34. *Oblicz reakcje dynamiczne łożysk przy prędkości kątowej ω dla wałów z rysunków 15, 16.*

35. *Koło o masie m i promieniu r umieszczone jest w środku wału o długości l. Płaszczyzna koła nie jest prostopadła do wału - różnica wynosi α. Oblicz reakcje dynamiczne łożysk przy prędkości kątowej wału ω.*

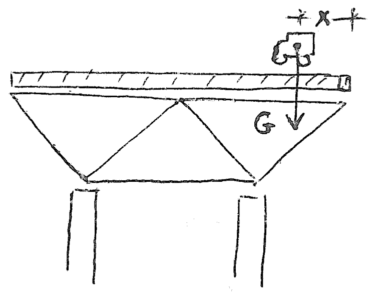
36. *Na środku wału AB o długości L umieszczony jest torus o promieniu zewnętrznym R tak, że wał leży w płaszczyźnie torusa (rysunek 36). W torusie porusza się swobodnie kulka o masie m. Oblicz reakcje dynamiczne w łożyskach A i B jeżeli wał obraca się z prędkością kątową ω, a kulka nie porusza się względem torusa.*

Kratownice i belki

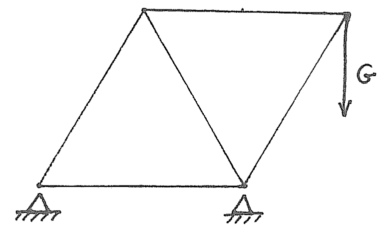
Kratownice 2d



Rys. 18: Rysunek do zadania 37



Rys. 19: Rysunek do zadania 38



Rys. 20: Rysunek do zadania 40

37. *Most jest podparty z dołu dwoma przęsłami a z góry obciążony asfaltem o ciężarze Q jak na rysunku 18 Jakie siły przenoszą poszczególne pręty w kratownicy?*

38. *Most z poprzedniego zadania jest dodatkowo obciążony ciężarówką o ciężarze G odległą od początku mostu o x jak na rysunku 19. Jakie siły zewnętrzne działają na kratownicę?*

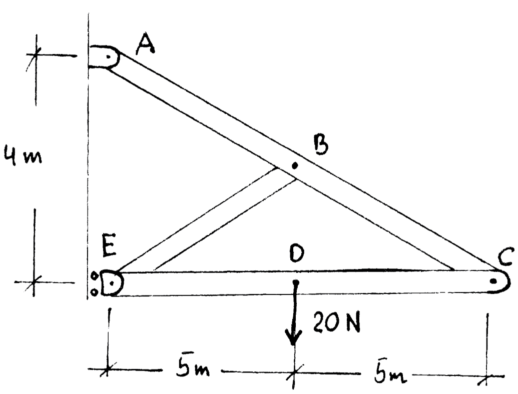
Odp. Siły działające na górne węzły: $\frac{1}{4}Q, \frac{1}{2}Q + \frac{x}{l}G, \frac{1}{4}Q + \frac{l-x}{l}G$, siły działające na dolne węzły: $\frac{1}{2}Q + G(\frac{1}{2} - \frac{l-x}{l}), \frac{1}{2}Q + G(\frac{1}{2} + \frac{l-x}{l})$.

39. *Jakie siły przenoszą pręty w kratownicy w sytuacji z ciężarówką?*

40. *Oblicz reakcje podpór i reakcje wewnętrzne w kratownicy z rysunku 20. Wszystkie pręty kratownicy mają długość l a wszystkie kąty wynoszą $60°$*

41. *Rozwiąż poprzednie zadanie uwzględniając ciężary prętów zaczepione w ich środkach.*

42. *Znajdź wszystkie siły działające na element ABC na rysunku 21*



Rys. 21: Rysunek do zadania 42

Kratownice 3d

43. *Kratownicę w kształcie czworościanu foremnego podparto w wierzchołkach podstawy (w płaszczyźnie poziomej) i obciążono ciężarem G w górnym wierzchołku. Oblicz reakcję podpór i reakcje wewnętrzne w kratownicy.*

44. *Kratownicę z poprzedniego zadania obciążono w górnym wierzchołku siłą F o dowolnym kierunku. Wyznacz pionowe składowe sił reakcji podstawy.*

45. *Załóżmy, że na wierzchołku kratownicy z poprzedniego zadania umieszczony jest ciężarek na nitce poruszający się po okręgu. Nitka tworzy z pionem kąt α. Jak zmieniają się w czasie pionowe składowe sił reakcji podstawy?*

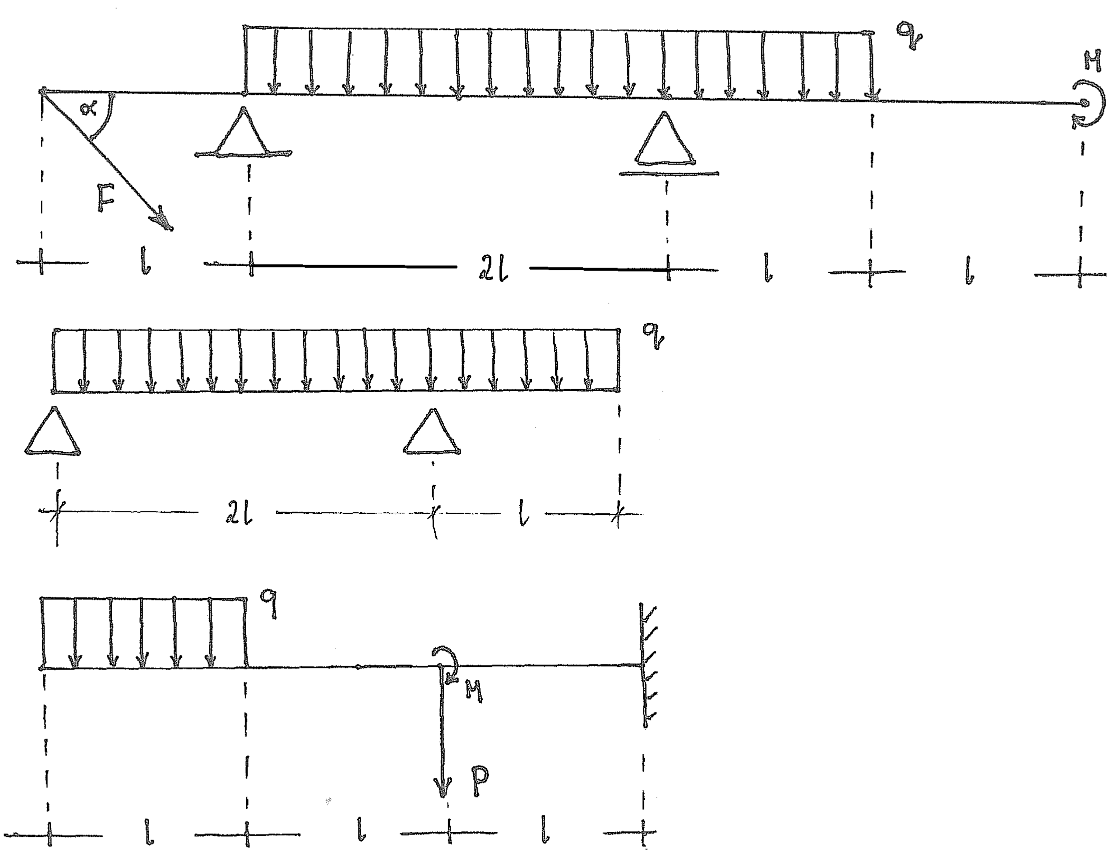
46. *Maszt antenowy o masie m ma 4 odciągi na północ, południe, wschód i zachód. Odciągi odchodzą w 3/4 wysokości masztu i tworzą z pionem kąt 60°. Gdy nie ma wiatru, każdy odciąg napina ta sama siła N. Jaka jest wtedy siła nacisku masztu na fundament na którym stoi?*

Odp. $mg + 2N$

47. *Jak zmienią się siły naprężenia odciągów i nacisku na fundament masztu gdy będzie wiał wiatr z kierunku α względem północy? Za punkt przyłożenia siły naporu wiatru bierzemy środek masztu.*

Belki

48. *Dla poniższych belek wyznacz reakcje podpór i narysuj wykresy rozkładu w belce: sił podłużnych, sił poprzecznych, momentu gnącego. Dla prostoty obliczeń przyjmij $\alpha = 45°$, $F = \sqrt{2}ql$, $M = ql^2$.*



Ruch płaski punktu i bryły

Współrzędne biegunowe

Współrzędne biegunowe to r (odległość od środka UW) i ϕ kąt od osi OX do wektora wodzącego punktu. Punkt o współrzędnych biegunowych (r, ϕ) ma współrzędne kartezjańskie $(r\cos\phi, r\sin\phi)$.

Kolejne wektory jednostkowe uzyskujemy biorąc pochodne punktu po kolejnych współrzędnych, które następnie normujemy do jedności.

49. *Znajdź bazę wektorów jednostkowych w punkcie* (r, ϕ)

50. *Ile wynoszą pochodne wektorów bazowych po kącie* ϕ *?*

51. *Współrzędne biegunowe punktu są znanymi funkcjami czasu. Jaki jest wzór na wektor prędkości i przyśpieszenia.*

Odp. $a = (\ddot{r} - r\ddot{\phi}^2)\vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\vec{e_\phi}$

52. *Mucha idzie ruchem jednostajnym z prędkością v po średnicy płyty gramofonowej obracającej się z prędkością kątową ω. Jaki jest tor muchy? Jakie siły działają na muchę?*

53. *Ramię robota o zmiennej długości wykonuje ruch opisany równaniami:*

$$r(t) = r_0 - A\cos(\omega t), \qquad \phi(t) - \phi_0 - a\sin(\omega t),$$

Gdzie $r_0 = 1.5\mathrm{m}$, $A = 0.5\mathrm{m}$, $\phi = 0.7\mathrm{rad}$, a=0.3rad, $\omega = 2\pi\mathrm{Hz}$. *Obliczyć prędkość końca ramienia we współrzędnych biegunowych i kartezjańskich w chwili* $t = 0.6\mathrm{s}$.

54. *Dane są równania ruchu punktu:* $r(t) = vt, \phi(t) = e^{\Omega t}$. *Wyznacz składowe prędkości i przyśpieszenia.*

55. *Dane są równania ruchu punktu:* $r(t) = Re^{\lambda t}, \phi(t) = \Omega t$. *Wyznacz składowe prędkości i przyśpieszenia. Co jest torem punktu? Wyznacz promień krzywiny toru w funkcji czasu.*

56. *Punkt porusza się po krzywej, której długość s dana jest wzorem* $s = s_0\exp(ct)$, *gdzie* $s_0, c = \mathrm{const} > 0$. *Wiedząc, że wektor przyspieszenia tworzy stały kąt φ ze styczną do toru w każdym punkcie, wyznacz wartości:*

- *prędkości*
- *przyspieszenia stycznego*
- *przyspieszenia normalnego*
- *promienia krzywizny toru w funkcji długości łuku krzywej*

57. *Ruch punktu materialnego dany jest w układzie kartezjańskim równaniami:*

$$x = ct\cos(\omega t), \quad y = ct sin(\omega t), \quad \text{gdzie } c = \text{const}, \quad \omega = \text{const}, \quad t\text{–czas.}$$

Wyznacz w biegunowym układzie współrzędnych:

- *równanie toru* $r(\varphi)$
- *wartość wektora prędkości i przyspieszenia punktu*
- *składowe wektora przyspieszenia styczną i normalną*
- *promień krzywizny toru w funkcji czasu*

58. *Dane są równania ruchu punktu:* $r(t) = \frac{A}{1+e\cos\phi}, \phi(t) = \Omega t$. *Wyznacz składowe prędkości i przyśpieszenia (dla $e < 1$ torem jest elipsa, dla $e = 1$ parabola, dla $e > 1$ hiperbola).*

Krzywizna toru we współrzędnych kartezjańskich

59. *Równanie ruchu punktu materialnego ma postać:* $\vec{r} = A\cos(\omega t)\vec{\imath} + A\sin(\omega t)\vec{\jmath}$. *Jak wygląda tor punktu? Jak zależy od czasu wektor prędkości i przyśpieszenia tego punktu?*

Prędkość jest zawsze styczna do toru. Zatem przyśpieszenie styczne a_t to rzut prostopadły wektora przyśpieszenia na kierunek wektora prędkości, a przyśpieszenie normalne a_n to różnica przyśpieszenia i jego składowej stycznej.

Dla ruchu po okręgu mamy $a_n = \frac{v^2}{r}$. Dla ruchu po dowolnym torze promień krzywizny może się zmieniać od punktu do punktu i można go wyznaczyć ze wzoru $t = \frac{v^2}{a_n}$

60. *Równanie ruchu punktu materialnego ma postać:* $\vec{r} = A\cos(\omega t)\vec{\imath} + B\sin(\omega t)\vec{\jmath}$. *Jak wygląda tor punktu? Jak zależy od czasu wektor prędkości i przyśpieszenia tego punktu? Wyznacz promień krzywizny toru dla* $\omega t = 0, \omega t = \frac{\pi}{2}, \omega t = \frac{\pi}{4}$.

61. *Równanie ruchu punktu materialnego ma postać:* $\vec{r} = A\cos(\omega t^2)\vec{\imath} + A\sin(\omega t^2)\vec{\jmath}$. *Jak wygląda tor punktu? Jak zależy od czasu wektor prędkości i przyśpieszenia tego punktu? Znajdź zależność od czasu przyśpieszenia stycznego i normalnego. Wyznacz promień krzywizny toru w dowolnym punkcie.*

62. *Równanie ruchu punktu materialnego ma postać:* $\vec{r} = A\cos^2(\omega t)\vec{\imath} + B\sin^2(\omega t)\vec{\jmath}$. *Jak wygląda tor punktu? Jak zależy od czasu wektor prędkości i przyśpieszenia tego punktu?*

63. *Równanie ruchu punktu materialnego ma postać:* $\vec{r} = v_{0x} \cdot t\vec{\imath} + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}\vec{\jmath}$. *Jak wygląda tor punktu? Jak zależy od czasu wektor prędkości i przyśpieszenia tego punktu?*

64. *Równanie ruchu punktu materialnego ma postać:* $\vec{r} = A\sin(\omega t)\vec{\imath} + A\cos(2\omega t)\vec{\jmath}$. *Jak wygląda tor punktu? Jak zależy od czasu wektor prędkości i przyśpieszenia tego punktu? Wyznacz promień krzywizny toru dla* $\omega t = 0, \omega t = \frac{\pi}{2}, \omega t = \frac{\pi}{4}$.

Tor w przestrzeni trójwymiarowej

65. *Równanie ruchu punktu materialnego ma postać:* $\vec{r} = A\cos(\omega t)\vec{\imath} + A\sin(\omega t)\vec{\jmath} + vt\vec{k}$. *Jak wygląda tor punktu? Jak zależy od czasu wektor prędkości i przyśpieszenia tego punktu? Znajdź zależność od czasu przyśpieszenia stycznego i normalnego. Wyznacz krzywiznę toru w danym punkcie.*

66. *Równanie ruchu punktu materialnego ma postać:* $\vec{r} = A\sin(\omega t)\vec{\imath} + A\sin(2\omega t)\vec{\jmath} + \epsilon\cos(\omega t)\vec{k}$. *Jak wygląda tor punktu? Jak zależy od czasu wektor prędkości i przyśpieszenia tego punktu? Wyznacz promień krzywizny toru dla* $\omega t = 0, \omega t = \frac{\pi}{2}, \omega t = \frac{\pi}{4}$.

Współrzędne biegunowe - rozwiązywanie równań ruchu

67. ***Przykład z wykładu*** *Koralik ślizga się bez tarcia na pręcie wirującym w płaszczyźnie wokół swojego końca ze stałą prędkością kątową* ω. *W chwili* $t = 0$ *koralik ma położenie* r_0 *a* $v_r(0) = v_0$. *Znajdź zależność prędkości radialnej od wspórzędnej radialnej.*

Odp. $v_r - v_0 - \omega^2(r^2 - r_0^2)$.

68. *W powyższym zadaniu wyznacz równanie na* $r(t)$ *i rozseparuj w nim zmienne.*

Odp.

$$\int_0^t dt = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{v_0^2 - \omega^2 r_0^2 + \omega r^2}}$$

69. ***Przykład z wykładu*** *Koralik jest nawlęczony na pręt obracający się w płaszczyźnie wokół swojego końca ze stałą prędkością kątową. Koralik umocowany jest na sprężynie o stałej sprężystości k i w chwili $t = 0$ sprężyna nie jest rozciągnięta ani ściśnięta, natomiast składowa radialna prędkości wynosi v_0. Obliczyć składowe v_r i v_ϕ w funkcji r.*

70. ***Zadanie Hugona Steinhausa*** *W rogach kwadratowej łąki siedzą cztery psy. W chwili $t = 0$ każdy z psów zaczyna gonić swojego sąsiada po prawej stronie ze stałą prędkością v.*

- *Wyznacz zależność czasową współrzędnej radialnej*
- *Po jakim czasie psy się spotkają, jaką drogę przebiegną?*
- *Wyznacz zależność czasową współrzędnej transwersalnej*
- *Wyznacz kształt toru psa*

71. *Ćma porusza się tak, by widzieć światło cały czas pod tym samym kątem. To dostosowanie ewolucyjne pozwala latać po linii prostej korygując tor na podstawie światła księżyca. Co się dzieje, jeżeli źródłem światła jest lampa?*

- *Wyznacz równanie toru lotu ćmy*
- *Wyznacz zależność współrzędnej kątowej ćmy od czasu*

Niech α oznacza kąt pod jakim ćma widzi źródło światła. W chwili $t = 0$ ćma ma współrzędne $r = r_0, \phi = 0$. Prędkość ćmy jest stałą i wynosi v.

72. *W kasecie magnetofonowej pierwsza szpula kręci się ze stałą prędkością ω. W chwili początkowej promienie nawojów są równe odpowiednio r_{01} i r_{02}. Grubość taśmy wynosi a.*

- *Jak się zmienia prędkość przesuwu taśmy?*
- *Jak się zmienia prędkość kątowa drugiej szpuli?*

73. *Wyznacz równanie toru $r(\phi)$ dla cząstki w polu grawitacyjnym masy punktowej. Wykorzystaj zasadę zachowania energii: $\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (\omega r)^2) - \frac{GMm}{r} = E$ i zasadę zachowania momentu pędu $mr^2\omega = L = \text{const}$. Dokonaj separacji zmiennych w równaniu.*

Odp.

$$\int \frac{\pm\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{\frac{2Em}{L^2} + \frac{2GMm^2}{L^2}\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}}} = \phi + C$$

74. *Rozwiąż powyższe równanie. W całce dokonaj podstawienia $u = \frac{1}{r}$ i doprowadź wyrażenie w mianowniku do postaci stała minus kwadrat wyrażenia liniowego.*

Odp.

$$r = \frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1 + \sqrt{1 + 2\frac{E}{m}\left(\frac{L}{GMm}\right)^2}\sin(\phi - \phi_0)}$$

Jeżeli $E < 0$ pierwiastek jest mniejszy od 1 i ruch odbywa się po elipsie. Jeżeli $E > 0$ pierwiastek jest większy od 1 i ruch odbywa się po hiperboli. W przypadku granicznym ruch odbywa się po paraboli.

Ruch płaski bryły sztywnej

Chwilowy środek obrotu

Twierdzenie Eulera mówi, że dowolne infintezymalnie małe przemieszczenie bryły sztywnej w jej płaszczyźnie ruchu może być dokonane przez obrót wokół punktu zwanego *chwilowym środkiem obrotu.*

Dzieląc odległość dowolne wybranego punktu bryły przez odległość od jej chwilowego środka obrotu uzyskamy *chwilową prędkość kątową.*

75. *Końce belki mają współrzędne* $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ *i prędkości* $\vec{v}_1$ *i* $\vec{v}_2$*. Wyznacz chwilowy środek obrotu belki. Wyznacz chwilową prędkość kątową:*

1. $\vec{r}_1 = [0, -1], \quad \vec{r}_2 = [4, -1], \quad \vec{v}_1 = [1, -1], \quad \vec{v}_2 = [1, 1]$
2. $\vec{r}_1 = [-2, 6], \quad \vec{r}_2 = [-2, 3], \quad \vec{v}_1 = [6, 8], \quad \vec{v}_2 = [0, 8]$
3. $\vec{r}_1 = [2, 3], \quad \vec{r}_2 = [5, -2], \quad \vec{v}_1 = [1, 1], \quad \vec{v}_2 = [-\frac{3}{7}, \frac{1}{7}]$
4. $\vec{r}_1 = [5, 5], \quad \vec{r}_2 = [-2, -1], \quad \vec{v}_1 = [1, -\frac{2}{3}], \quad \vec{v}_2 = [-1, \frac{5}{3}]$

76. *Dla powyższych sytuacji znaleźć wektor położenia i prędkości dla środka belki.*

77. *Chwilowe położenie wierzchołków trójkąta dane jest wektorami* $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$*. Prędkości chwilowe dwóch pierwszych wierzchołków wynoszą* v_1 *i* v_2*. Znaleźć prędkość chwilową trzeciego wierzchołka.*

1. $\vec{r}_1 = [-2, 3], \quad \vec{r}_2 = [2, 0], \quad \vec{r}_3 = [3, 4], \quad \vec{v}_1 = [3, \frac{3}{4}], \quad \vec{v}_2 = [\frac{3}{4}, -\frac{9}{4}]$
2. $\vec{r}_1 = [-2, 4], \quad \vec{r}_2 = [0, 0], \quad \vec{r}_3 = [6, 0], \quad \vec{v}_1 = [0, -3], \quad \vec{v}_2 = [2, -2]$
3. $\vec{r}_1 = [4, 3], \quad \vec{r}_2 = [5, -1], \quad \vec{r}_3 = [1, 5], \quad \vec{v}_1 = [-1, 1], \quad \vec{v}_2 = [1, \frac{3}{2}]$
4. $\vec{r}_1 = [-1, 4], \quad \vec{r}_2 = [2, 0], \quad \vec{r}_3 = [5, 6], \quad \vec{v}_1 = [-\frac{5}{9}, \frac{1}{3}], \quad \vec{v}_2 = [-1, 0]$

Zbiór chilowych środków obrotu tworzy krzywą zwaną *centroidą*

78. *Belka ślizga się w płaskim narożu. Wyznacz równanie centroidy w układzie naroża i w układzie belki.*

79. *Kwadrat ślizga się w płaskim narożu. Bok kwadratu wynosi* a*, jest obrócony względem naroża o kąt* α *a prędkość wierzchołka stycznego do pionowej ściany wynosi* v*. Znajdź wektory chwilowych prędkości wierzchołków.*

80. *Tłok porusza się wzdłuż osi* x*. Środek tłoka połączony jest korbowodem długości* l *z punktem tarczy kołowej w odległości* r *od jej środka. Tarcza porusza się ze stałą prędkością kątową* ω*.*

1. *Jakie jest równanie ruchu tłoka?*
2. *Kiedy chwilowy środek obrotu jest w nieskończoności?*
3. *Jakie jest równanie centroidy? (równania paramatryczne wzgl. kąta obrotu tarczy)*

81. *Koło kolejowe toczy się ze stałą prędkością po szynie bez poślizgu. Znaleźć równania ruchu punktu:*

- *pomiędzy powierzchnią toczenia a środkiem koła*
- *na powierzchni toczenia*
- *na obrzeżu koła, dalej od środka niż powierzchnia toczenia*

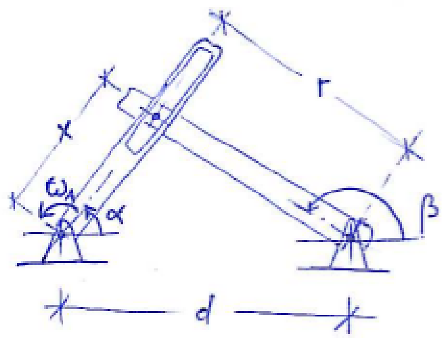
Co jest w tym przypadku centroidą?

Ruch płaski złożony

82. *Szpulka o promieniu zewnętrznym R i wewnętrznym $r < R$ toczy się bez poślizgu po poziomej powierzchni na skutek odwijania nici ze szpulki w kierunku poziomym. Jaka jest zależność prędkości toczenia szpulki od prędkości odwijania nici?*

83 (*). *Jeżeli siła z jaką jest ciągnięta nić wynosi F, a moment bezwładności szpulki wynosi $I = mr^2/2$, to ile wynosi siła tarcia pomiędzy szpulką a podłożem?*

84. *W powyższym zadaniu rozważ sytuację, gdy nić odwija się ze szpulki pod kątem α do poziomu. Jaki jest kąt graniczny pomiędzy ruchem szpuli w lewo i w prawo przy odwijaniu nici?*



Rys. 22: Mechanizm płaski z zadania 85

85. *Mechanizm płaski składa się z dwóch ramion zamocowanych do podłoża w przegubach w odległości d. Drugie ramię ma długość r i jest zakończone trzpieniem, który porusza się w prowadnicy w ramieniu pierwszym. Odległość trzpienia od punktu zaczepienia ramienia pierwszego oznaczamy jako x. Kąty jakie pierwsze i drugie ramię tworzą z podłożem wynoszą odpowiednio α i β. Zakładając że znamy $\dot{\alpha}$, oblicz:*

- *$\dot{x}$ i $\dot{\beta}$ korzystając ze wzoru na prędkość trzpienia w ruchu względnym.*
- *$\dot{\beta}$ korzystając z twierdzenia sinusów*
- *wyprowadź wzór na x i zróżniczkuj go po czasie.*

Odpowiedź:

$$\dot{x} = -\frac{d \sin\beta}{\cos(\beta-\alpha)}\dot{\alpha} = -\frac{d\dot{\alpha}}{\cos\alpha \operatorname{ctg}\beta + \sin\alpha}$$

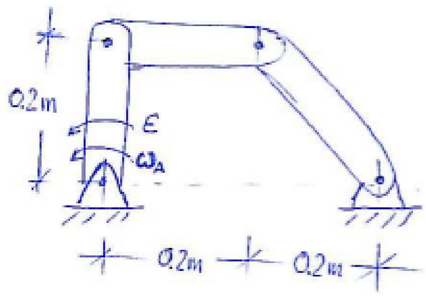
$$\dot{\beta} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha\cos(\beta-\alpha)}\dot{\alpha} = \frac{\dot{\alpha}}{\sin\alpha(\cos\alpha\operatorname{ctg}\beta + \sin\alpha)}$$

86. *Dla sytuacji z poprzedniego zadania wyraź $\operatorname{ctg}\beta$ przez d, r oraz α.*

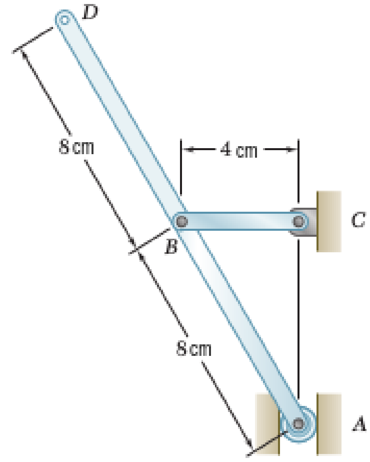
87. *Mechanizm płaski składa się z trzech prętów połączonych przegubami B, C i jest przymocowany do podłoża przegubami A i D. Prędkość i przyśpieszenie kątowe elementu AB wynosi $\omega_A = 10\text{rad/s}, \epsilon_A = 300\text{rad/s}^2$. Wyznacz:*

- *Prędkości kątowe elementów BC i DC*
- *Chwilowy środek obrotu (stąd alternatywnie prędkości kątowe)*
- *Przyśpieszenia kątowe elementów BC i DC*

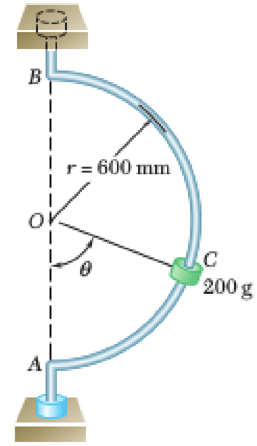
88. *Znając prędkość i przyśpieszenie kątowe elementu BC na rysunku 24 określ prędkości i przyśpieszenia punktów A i D*



Rys. 23: Mechanizm płaski z zadania 87



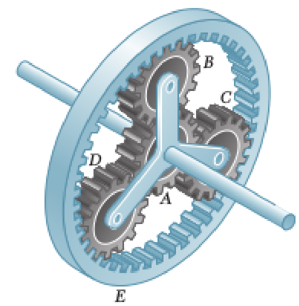
Rys. 24: Mechanizm płaski z zadania 88



Rys. 25: Mechanizm płaski z zadania 90

89. *W przekładni planetarnej na rysunku 26 promienie kół wynoszą: $r_A, r_B = r_C = r_D, r_E$. Jaka jest zależność pomiędzy rękościami kątowymi jarzma, koła A i koła E? Jaką zależność między promieniami wymusza płaska konfiguracja przekładni?*

90. *Półokrąg na rysunku na rysunku 25 obraca się z prędkością kątową ω_0. Na nim ślizga się koralik z prędkością v względem półokręgu skierowaną w górę. Kąt θ wynosi $60°$. Oblicz składowe prędkości i przyśpieszenia koralika w ukadzie nieruchomym.*



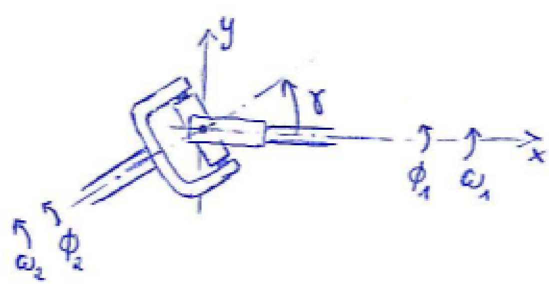
Rys. 26: Przekładnia z zadania 89

Ruch kulisty

Przegub Cardana

Rozważać będziemy przegub krzyżakowy (Cardana). Łącznik przegubu (krzyżak) wykonuje ruch kulisty. Łącznik jest połączony parą antypodycznych sworzni do wału czynnego i drugą parą antypodycznych sworzni do wału biernego. Pomiędzy parami sworzni jest kąt prosty.

Zakładamy, że wał czynny tworzy z wałem biernym kąt γ. Zauważmy, że sworznie każdej z par pozostają na ustalonych okręgach, utrzymywane przez widełki swoich wałów.



Rys. 27: Przegub krzyżakowy (Cardana)

91. *Jakie są równania parametryczne ruchu punktu po okręgach o promieniu R:*

1. *o płaszczyźnie prostopadłej do wektora $\vec{\imath}$, w chwili zero punkt na osi OZ*

2. *o płaszczyźnie prostopadłej do wektora $\cos\gamma\vec{\imath}+\sin\gamma\vec{\jmath}$, w chwili zero punkt w płaszczyźnie XY.*

   Odp. $\vec{r}_1 = [0, \sin\phi_1, \cos\phi_1]$, $\vec{r}_2 = [\sin\gamma\cdot\cos\phi_2, -\cos\gamma\cdot\cos\phi_2, \sin\phi_2]$.

92. *Na ruchy z poprzedniego zadania nakładamy warunek, że kąt pomiędzy punktami na obu okręgach w danej chwili czasu jest prosty. Jaki to daje warunek wiążący kąty obrotu obu wałów?*

Odp. $\operatorname{tg}\phi_2 = \operatorname{tg}\phi_1\cdot\cos\gamma$

93. *Jaka jest zależność pomiędzy prędkościami kątowymi obu wałów?*

Odp. $\omega_2 = \omega_1\cdot\cos\gamma/(1-\sin^2(\phi_1)\cdot\sin^2\gamma)$. Jeżeli wał czynny obraca się ze stałą prędkością kątową, to $\omega_2 = \omega_1\cdot\cos\gamma/(1-\sin^2(\omega_1 t)\cdot\sin^2\gamma)$

94. *Dwa wały połączone są przy pomocy przegubu dwukrzyżakowego (dwa przeguby krzyżakowe połączone wałkiem pośrednim). Kąty pomiędzy wałami na obu przegubach są takie same, a ruch przegubu drugiego jest przesunięty w fazie względem ruchu przegubu pierwszego o $\pi/2$ (czyli cztery sworznie na przegubie leżą w tej samej płaszczyźnie). Jaka jest zależność prędkości kątowych wału czynnego i biernego?*

Odp. Są zawsze równe.

95. *Dwa wały połączone są przy pomocy dwóch przegubów krzyżakowych połączonych długim wałkiem pośrednim. Wał wyjściowy i wejściowy pozostają równoległe, a zastosowanie wałka pośredniego zapewnia możliwość przesuwania się względem siebie wałów. Ruch przegubu drugiego jest przesunięty w fazie względem ruchu przegubu pierwszego o $\pi/2$ (czyli cztery sworznie na przegubie leżą w tej samej płaszczyźnie). Jaka jest zależność pomiędzy prędkościami obu wałów?*

Odp. Są zawsze równe.

96. *Jak zmienia się wektor chwilowej prędkości obrotowej krzyżaka w przegubie krzyżakowym?*

Wskazówka: Chwilowa prędkość kątowa jest prostopadła do prędkości liniowych obu sworzni, a $\vec{r_1}\times\omega = r_1\omega_1$.
Odp:

$$\omega = -\omega_1\vec{\imath} - \omega_1\sin\gamma\cos\gamma\frac{\sin\phi_1}{\cos^2(\phi_1)+\cos^2\gamma\sin^2(\phi_1)}(\sin(\phi_1)\vec{\jmath}+\cos(\phi_1)\vec{k}).$$

Koniec wektora chwilowej prędkości kątowej zakreśla elipsę w płaszczyźnie YZ. Powierzchnia stożkowa na której leżą te wektory jest aksoidą nieruchomą krzyżaka.

Precesja

Szczególnym przypadkiem ruchu kulistego jest precesja. Jest to złożenie dwóch ruchów wokół ustalonej osi. Ruch wokół pierwszej osi odbywa się z prędkością kątową $\vec{\omega}_1$, która wiruje wokół drugiej osi z prędkością $\vec{\omega}_2$. W każdej chwili ruch każdego punktu odbywa się z prędkością kątową $\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2$.

97. *Prędkość punktu $\vec{x}$ w ruchu kulistym z chwilową prędkością kątową $\vec{\omega}$ wynosi $\vec{\omega}\times\vec{x}$. Pokaż, że dla punktu ciała w precesji:*

- *chwilowe przyśpieszenie kątowe wynosi $\vec{\omega}_1\times\vec{\omega}_2$.*
- *chwilowe przyśpieszenie liniowe wynosi $(\vec{r}\cdot\vec{\omega})\vec{\omega} - \omega^2\vec{r} + r\times(\vec{\omega}_1\times\vec{\omega}_2)$.*

98. *Stożek o wysokości h i o kącie α pomiędzy wysokością a tworzącą toczy się bez poślizgu po płaszczyźnie wokół swojego wierzchołka.*

- *Co jest aksoidą ruchomą, a co nieruchomą?*
- *Ile wynosi wartość chwilowej prędkości kątowej?*
- *Jaka jest chwilowa prędkość i przyspieszenie najwyższego punktu stożka?*

99. *Kula o promieniu R_2 toczy się jednocześnie po poziomej powierzchni i wokół pionowego walca o promieniu R_1.*

- *Co jest chwilową osią obrotu? Gdzie leży środek ruchu kulistego?*
- *Co jest osią obrotu własnego? Jaki jest kąt nutacji?*
- *Umieszczając początek UW w środku ruchu kulistego tak by środek kuli miał współrzędną $y = 0$, wyznacz wektory prędkości kątowych: $\vec{\omega}_1$ (obrotu własnego) i $\vec{\omega}$ (chwilową) przez ω_2 (wartość prędkości kątowej precesji).*
- *Wyznacz wektor przyśpieszenia kątowego kuli*
- *Wyznacz prędkość i przyśpieszenie najwyższego punktu kuli*
- *Wyznacz prędkość i przyśpieszenie punktu kuli: $[-R_1 - R_2, -R_2, -R_1]$*