Algebra liniowa

Zadania

Macierze:

1. Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

   znaleźć macierz X spełniającą równanie

   (a) $4(A - X) + 5(3X + B) = A - B + 8X$;

   (b) $B^T X = [1\ 1\ 0]^T$.

2. Znaleźć macierz X spełniającą równanie:

   (a)

$$X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

   (b)

$$X \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X^T.$$

3. Wyznaczyć macierz X spełniającą równanie: $AX - 2B^2 = C$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Na przykładzie macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 2 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

   sprawdzić relację $(AB)^T = B^T A^T$.

5. Sprawdzić, czy macierz B jest odwrotna do macierzy A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

6. Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

obliczyć podane wyrażenia:

a) $2A - B$; b) AB^T; c) $A^T B$; d) $(B^T A)^2$.

7. Obliczyć $B^{13} + B$ dla macierzy:

$$a) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad b) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Znaleźć wzór na n-tą potegę macierzy:

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c) \begin{bmatrix} \cos x & \sin x & 0 \\ -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Niech A będzie dowolną macierzą. Pokazać, że macierz $B = A + A^T$ jest symetryczna, a macierz $C = A - A^T$ jest antysymetryczna. Przedstawić macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

jako sumę macierzy symetrycznej i niesymetrycznej.

10. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć rkA.

11. Niech

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

gdzie $a,\ b\ , c\ d \in R$ oraz $ad - bc \neq 0$. Wykazać, że macierz

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

jest macierzą odwrotną do A.

12. Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć AB, BA, A^{-1}, oraz B^{-1}. Zbadać, czy $A^{-1}B^{-1} = (AB)^{-1}$, czy też $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$.

13. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć z definicji macierz odwrotną do A.

14. Niech

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć A^n i B^n dla n naturalnego (zobczyć jak wyglądają postacie A^n i B^n dla pierszych liczb naturalnych, postawić hipotezę dotyczącą ogólnego wzoru i przeprowadzić dowód indukcyjny).