Blok IV: Wektory i geometria

IV.1 Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku ABCD. Ile różnych, niezerowych wektorów wyznaczają te punkty?

IV.2 Każda para spośród punktow A, B, C, D kwadratu ABCD o boku 2 określa pewien wektor. Wypisz wektory, które:

a) są zerowe

b) są przeciwne do wektora $\overrightarrow{CD}$

c) mają tę samą długość, co wektor $\overrightarrow{CD}$

d) mają długość $2\sqrt{2}$.

IV.3 W sześciokącie foremnym ABCDEF wyznacz wektory:

a) o tym samym kierunku, co wektor $\overrightarrow{AE}$

b) o tej samej dlugości, co wektor $\overrightarrow{AE}$

c) o tym samym zwrocie, co wektor $\overrightarrow{AE}$

d) równe wektorowi $\overrightarrow{AE}$

e) przeciwne do wektora $\overrightarrow{AE}$.

IV.4 W ośmiokącie foremnym ABCDEFGH każda para punktów określa pewien wektor. Podaj wszystkie wektory:

a) o tym samym kierunku, co wektor $\overrightarrow{AD}$

b) o tej samej długości, co wektor $\overrightarrow{AD}$

c) o tym samym zwrocie, co wektor $\overrightarrow{AD}$

d) równe wektorowi $\overrightarrow{AD}$

e) przeciwne do wektora $\overrightarrow{AD}$

f) prostopadłe do wektora $\overrightarrow{AD}$

IV.5 W dowolnym czworokącie $ABCD$ (nie prostokącie) zaznacz wektor równy:

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$

c) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$

d) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

e) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}$

IV.6 Narysuj dwa dowolne, niezerowe wektory $\vec{u}$, $\vec{w}$. Graficznie znajdź wektor $\vec{z}$ równy odpowiednio:

a) $\vec{u} + \vec{w}$

b) $\vec{u} - \vec{w}$

c) $\vec{u} + 2\vec{w}$

d) $2\vec{u} - \vec{w}$

IV.7 Narysuj dwa jakiekolwiek wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Znajdź wektor $\vec{w}$ (graficznie), gdy:

a) $\vec{w} = 2\vec{u}$

b) $\vec{w} = -3\vec{v}$

c) $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$

d) $\vec{w} = 1,5\vec{u}$

e) $\vec{w} = -4\vec{v}$

f) $\vec{w} = 2.5\vec{u} - 3.5\vec{v}$

IV.8 Punkty A, B, C, D, E są kolejnymi wierzchołkami pięciokąta ABCDE. Znajdź wektory:

a) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD}$

b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{EC}$

c) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}$

d) $[(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE})] + \overrightarrow{EA}$

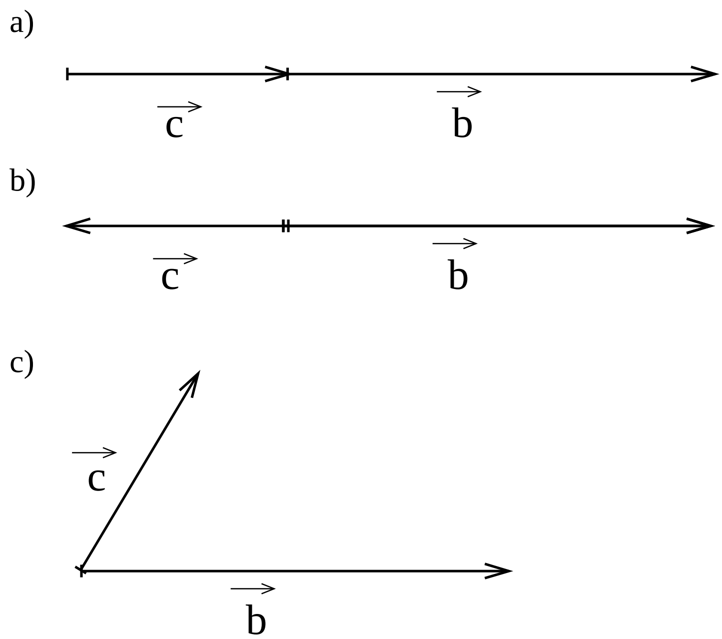
IV.9 Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku ABCD. Wykaż, że:

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$

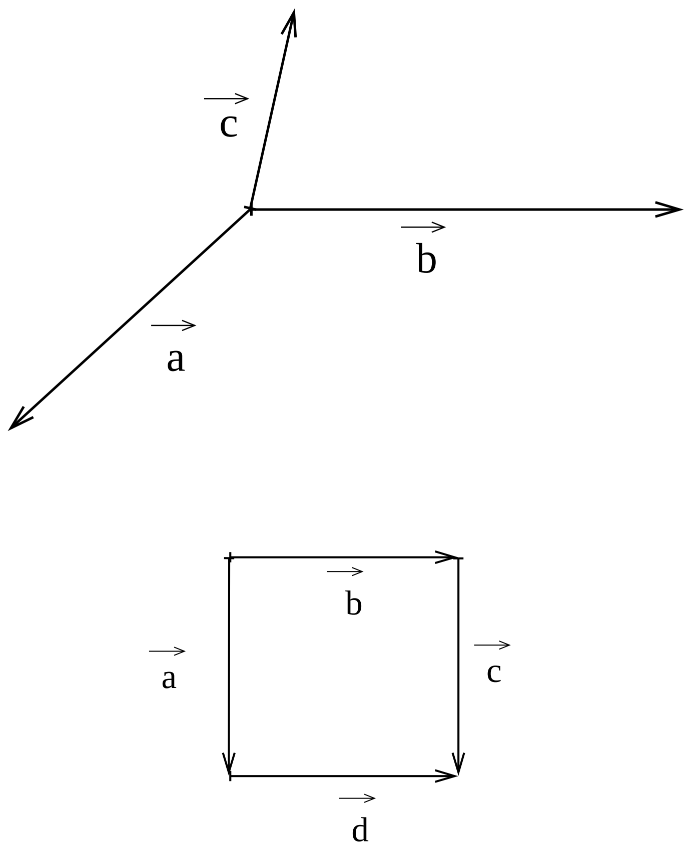
b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$

IV.10 Narysuj wektor $\vec{a}$ mając dane wektory $\vec{b}$ i $\vec{c}$, jeśli: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ (przypadki a), b), c), Rys. 1).

IV.11 Znajdź sumę wektorów leżących w tej samej płaszczyźnie (Rys. 2):



Rysunek 1: Znajdź wektor $\vec{a}$, jesli $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$



Rysunek 2: Znajdź sumę wektorów

a) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

b) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$

IV.12 Sprawdź analitycznie i geometrycznie tożsamości:

a) $\vec{a}+\dfrac{\vec{b}-\vec{a}}{2}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

b) $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\dfrac{\vec{b}-\vec{a}}{2}=\vec{b}$

IV.13 Wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ są bokami trójkąta. Wyznacz środkowe tego trójkąta w zależnosci od wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

IV.14 Niech ABC będzie dowolnym trójkątem, punkt D — środkiem boku AB. Wyznacz wektor $\overrightarrow{CD}$ w zależności od wektorów $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$.

IV.15 Wyznacz wektor $\overrightarrow{AC}$ w zależności od wektora $\overrightarrow{AB}$, gdy:

a) dane są wektory wspołliniowe $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ takie, dla których $\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

b) dane są wektory wspołliniowe $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ takie, dla których $\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

IV.16 Dany jest prostokąt ABCD, przy czym wektor $\overrightarrow{AB}=3\vec{p}$ oraz $\overrightarrow{AD}=4\vec{q}$. Wyznacz wektory $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ i $\overrightarrow{MN}$ w zależności od wektorow $\vec{p}$ i $\vec{q}$, jeżeli M i N sa odpowiednio środkami bokow CD i BC.

IV.17 Na prostej k dane są punkty A i B. Dla jakiego punktu C zachodzi równość $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$?

IV.18* Mając dany sześciokąt foremny ABCDEF przedstaw wektory $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{FC}$ w postaci kombinacji liniowej wektorow $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$.

IV.19 Mamy trzy wektory odpowiadające wysokości, dlugości i szerokości sali zaczepione w danym rogu sali. Wskaż wektor wypadkowy.

IV.20 Jaki warunek muszą spełniać niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, aby zachodziła równość:

a) $|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}|+|\vec{v}|$

b) $|\vec{u}-\vec{v}|=|\vec{u}|-|\vec{v}|$

c) $|\vec{u}-\vec{v}|=||\vec{u}|-|\vec{v}||$

d) $|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}|-|\vec{v}|$

IV.21* Narysuj dwa nierównoległe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ oraz trzeci wektor $\vec{w}$. Przedstaw $\vec{w}$ w postaci sumy dwóch wektorów, z których jeden jest równoległy do $\vec{u}$, a drugi do $\vec{v}$. Czy dla każdego niezerowego wektora $\vec{w}$ zadanie ma rozwiązanie? Jaki stąd wniosek?

IV.22 Pokazać, że wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ leżące na płaszczyźnie są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy gdy nie są wspólliniowe.

IV.23* Pokazać, że wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ leżące w przestrzeni są liniowo niezależnie wtedy i tylko wtedy gdy nie są współpłaszczyznowe.

IV.24 Wektory $\vec{f_1}$ i $\vec{f_2}$ są liniowo niezależne na płaszczyźnie. Uzasadnić, że następujące wektory są również liniowo niezależne.

a) $\vec{f_1}$ i $-\vec{f_2}$

b) $\vec{f_1}-\vec{f_2}$ i $\vec{f_1}+\vec{f_2}$

c) $2\vec{f_1}-\vec{f_2}$ i $\vec{f_1}-2\vec{f_2}$

d) $\vec{f_1}+\vec{f_2}$ i $\vec{f_2}$

IV.25 Wektory $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, $\vec{f_3}$ są liniowo niezależne w przestrzeni. Uzasadnić, że następujące wektory są również liniowo niezależne.

a) $\vec{f_1},\ -\vec{f_2},\ \vec{f_3}$

b) $\vec{f_1}-\vec{f_2},\ \vec{f_1}+\vec{f_2},\ \vec{f_3}$

c) $2\vec{f_1}-\vec{f_2}+\vec{f_3},\ \vec{f_1}-2\vec{f_2}-\vec{f_3},\ 2\vec{f_1}-\vec{f_2}-\vec{f_3}$

d) $\vec{f_1}+\vec{f_2},\ \vec{f_2},\ -\vec{f_3}$

IV.26 Wektory $\vec{f_1}$ i $\vec{f_2}$ są liniowo niezależne oraz $\vec{f_3} = 3\vec{f_1} - 2\vec{f_2}$. Czy układ wektorów $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, $\vec{f_3}$ stanowi bazę w przestrzeni? Odpowiedź uzasadnić.

IV.27 Oblicz współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$, jeśli:

a) $A(-2,1)$, $B(-3,-5)$

b) $A(0,0)$, $B(5,-2)$

c) $A(1,1)$, $B(6,6)$

d) $A(1,0,-2)$, $B(2,-1,6)$

e) $A(-2,3,0)$, $B(0,2,-3)$

f) $A(2,0,1)$, $B(-2,1,3)$

IV.28 Oblicz współrzędne punktu A, jeśli $\overrightarrow{AB} = [-5,4]$, a $B(1,-3)$.

IV.29 Dane są punkt $A = (-2,3)$ i wektor $\vec{a} = [3,4]$. Znajdź współrzędne takiego punktu B, dla którego:

a) $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$

b) $\overrightarrow{AB} = -\vec{a}$

c) $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}$

d) $2\overrightarrow{AB} = \vec{a}$

IV.30 Dane są punkty $A = (1,2)$, $B = (3,6)$. Znajdź punkt C taki, dla którego:

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$

e) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

f) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB}$

g) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

IV.31 Znajdź długość wektora:

a) $\vec{a} = (2,4,1)$.

b) $\vec{a} = (\frac{1}{2},0,-2)$.

c) $\vec{a} = (-1,2,\frac{5}{2})$.

d) $\vec{a} = (-\frac{1}{3},3,-1\frac{1}{2})$.

e) $\vec{a} = (\frac{2}{3},-1,2)$.

f) $\vec{a} = (0,-2,\frac{2}{3})$.

g) $\vec{a} = (-1\frac{1}{3},-2,1)$.

h) $\vec{a} = (2,0,1)$.

i) $\vec{a} = (-2,-2\frac{1}{3},\frac{2}{3})$.

j) $\vec{a} = (1,0,\frac{1}{4})$.

k) $\vec{a} = (3,2,4)$. %

l) $\vec{a} = (2,3,\sqrt{3})$.

IV.32 Wyznacz sumę wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Oblicz ich długości oraz długość ich sumy.

a) $\vec{a} = [4,3]$, $\vec{b} = [-3,1]$

b) $\vec{a} = [3,1]$, $\vec{b} = [6,2]$

c) $\vec{a} = [1,1,-1]$, $\vec{b} = [2,4,-2]$

d) $\vec{a} = [-1,0,1]$, $\vec{b} = [-2,3,-2]$

e) $\vec{a} = [-1,1,1]$, $\vec{b} = [-2,0,-1]$

IV.33 Zaznacz na płaszczyźnie wektor $\vec{u}$ o początku w dowolnym punkcie i oblicz jego długość, gdy:

a) $\vec{u} = [2,1]$

b) $\vec{u} = [-3,2]$

c) $\vec{u} = [-4,-3]$

d) $\vec{u} = [0,5]$

e) $\vec{u} = [-2,0]$

IV.34 Dane są trzy punkty A, B, C. Przedstaw wektor $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ jako kombinację liniową wektorów $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ i $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, gdzie O jest początkiem układu współrzędnych, jeśli

a) $A = (5,2)$, $B = (1,4)$, $C = (-2,-1)$

b) $A = (-1,1)$, $B = (2,-1)$, $C = (0,-1)$

c) $A = (0,1)$, $B = (1,-1)$, $C = (3,2)$

d) $A = (1,-2)$, $B = (-1,3)$, $C = (3,-1)$.

e) $A = (-2,2)$, $B = (3,1)$, $C = (-2,4)$.

IV.35 Sprawdź, czy podane wektory są liniowo niezależne

a) $\vec{a} = [-1, 2]$, $\vec{b} = [1, 1]$

b) $\vec{a} = [1, -1]$, $\vec{b} = [-1, 1]$

c) $\vec{a} = [-1, -2]$, $\vec{b} = [1, 0]$

d) $\vec{a} = [-1, 2, 1]$, $\vec{b} = [1, 1, 2]$, $\vec{c} = [0, 0, 2]$

e) $\vec{a} = [0, 2, -1]$, $\vec{b} = [-1, 1, 2]$, $\vec{c} = [-3, 5, 5]$

f) $\vec{a} = [-1, 2, 0]$, $\vec{b} = [0, 1, -2]$, $\vec{c} = [-1, 1, 0]$

g) $\vec{a} = [-1, 0, 3]$, $\vec{b} = [1, 1, -1]$, $\vec{c} = [-3, -1, 7]$

IV.36 Dla jakich wartości parametru m wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ są liniowo niezależne?

a) $\vec{a} = [2, -3, 4]$, $\vec{b} = [0, -1, 2]$, $\vec{c} = [-2, 2, m]$

b) $\vec{a} = [2, -1, 1]$, $\vec{b} = [3, m, -3]$, $\vec{c} = [-4, 2, 2]$

c) $\vec{a} = [-3, 2, -2]$, $\vec{b} = [1, m, 1]$, $\vec{c} = [3, -2, 3]$

d) $\vec{a} = [1, -1, m]$, $\vec{b} = [2, -1, 1]$, $\vec{c} = [m, 1, 1]$

IV.37 Rozłożyć wektor $\vec{w}$ na składowe wzdłuż wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Rozkład zilustrować graficznie.

a) $\vec{w} = [5, 5]$, $\vec{a} = [0, 1]$, $\vec{b} = [-1, 1]$

b) $\vec{w} = [1, -1]$, $\vec{a} = [1, 2]$, $\vec{b} = [-1, 1]$

c) $\vec{w} = [2, 0]$, $\vec{a} = [-1, 1]$, $\vec{b} = [0, -1]$

d) $\vec{w} = [3, -3]$, $\vec{a} = [-1, 2]$, $\vec{b} = [2, -4]$

IV.38 Rozłożyć wektor $\vec{w}$ na składowe wzdłuż wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

a) $\vec{w} = [0, 2, 6]$, $\vec{a} = [1, 1, 1]$, $\vec{b} = [-1, 1, 1]$, $\vec{c} = [1, -1, 1]$

b) $\vec{w} = [2, -1, 0]$, $\vec{a} = [-1, 1, -1]$, $\vec{b} = [-1, -1, -1]$, $\vec{c} = [1, -1, 1]$

c) $\vec{w} = [1, 1, -3]$, $\vec{a} = [3, 1, -2]$, $\vec{b} = [2, -3, -3]$, $\vec{c} = [0, -3, -4]$

d) $\vec{w} = [1, 0, 0]$, $\vec{a} = [1, -1, 1]$, $\vec{b} = [0, 1, 1]$, $\vec{c} = [-1, 1, 0]$

IV.39 Dane są punkty $A = (3, 3)$, $B = (5, 9)$. Znajdź $\overrightarrow{AC}$, jeżeli punkt C jest środkiem odcinka AB.

IV.40 Dane są trzy wektory: $\vec{a} = [1, 0, -1]$, $\vec{b} = [2, -1, 3]$ i $\vec{c} = [1, 1, 2]$. Znajdź wektor $\vec{x} = 3\vec{a} - \vec{b} + 4\vec{c}$.

IV.41 Dany jest wektor $\vec{a} = [6, 2]$. Wyznacz wektory $2\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$, $-4\vec{a}$, $-\frac{1}{3}\vec{a}$. Podaj też rozwiązanie graficzne dla wektora $\vec{a}$ o początku w punkcie $(0, 0)$.

IV.42 Oblicz obwód trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (0, 2)$, $B = (2, 4)$, $C = (5, 1)$. Sprawdź, czy trójkąt ABC jest prostokątny.

IV.43 Sprawdź, czy trójkąt o podanych wierzchołkach jest prostokątny:

a) $A = (2, -1)$, $B = (3, 2)$, $C = (-3, -1)$

b) $A = (2, 1)$, $B = (1, 5)$, $C = (-7, 3)$

c) $A = (5, 0)$, $B = (1, 8)$, $C = (-5, 5)$

IV.44 Sprawdź, czy trójkąt ABC jest podobny do trójkąta MPN, gdy: $A = (1, 0)$, $B = (3, 3)$, $C = (-1, 4)$, $M = (3, -2)$, $P = (-5, -4)$, $N = (-1, 6)$.

IV.45 Oblicz obwód czworokąta $ABCD$ o wierzcholkach: $A = (-1, 1)$, $B = (-3, -4)$, $C = (2, -2)$, $D = (4, 3)$.

IV.46* Podane są trzy punkty w ukladzie kartezjańskim: $A(1, 2)$, $B(3, 4)$, $C(-4, -1)$. Wyznacz wspolrzedne punktow P, R, S, które dzielą kolejne odcinki AB, BC, CA tak, że:

a) $|AP| = |PB|$, $|BR| = |RC|$, $|CS| = |SA|$

b) $|AP| = 3|PB|$, $|BR| = 3|RC|$, $|CS| = 3|SA|$

IV.47 Punkty A, B, C sa wierzchołkami trójkąta równobocznego o boku dlugości a. Punkt D jest środkiem boku AB. Wyznacz:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$

IV.48 Znaleźć długość wektora $\vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$ wiedząc, ze $\vec{m} \perp \vec{n}$ i są to wektory jednostkowe.

IV.49 Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tworzą kat $120°$, przy czym $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$. Znajdź taką liczbę x, dla której wektory $\vec{a} + x\vec{b}$ i $\vec{a} - \vec{b}$ są ortogonalne.

IV.50 Oblicz iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeżeli:

a) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 6$, $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$

b) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$

c) $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 5$, $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi$

IV.51 Oblicz iloczyn skalarny wektorów:

a) $3\vec{p} - 2\vec{q}$ i $\vec{p} - 5\vec{q}$, jeżeli $\vec{p}$ i $\vec{q}$ są jednostkowymi wektorami ortogonalnymi

b) $4\vec{a} - \vec{b}$ i $2\vec{a} + 3\vec{b}$, jeżeli $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ oraz $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$

c) $6\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{a} - 2\vec{b}$, jeżeli $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ oraz $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$

IV.52 Oblicz $(\vec{a} + \vec{b})^2$, jeżeli:

a) $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 5$, $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$

b) $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$, $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = 150°$

IV.53 Kąt między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest równy $120°$ oraz $|\vec{a}| = 3$ i $|\vec{b}| = 2$. Znajdź:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) $(\vec{a} + \vec{b})^2$

c) $(\vec{a} - \vec{b})^2$

d) $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$

IV.54 Wektor $\vec{a}$ tworzy z osiami OX i OY kąty $60°$ i $120°$. Oblicz jego współrzędne, jeżeli $|\vec{a}| = \sqrt{2}$.

IV.55 Motorówka płynie po rzece z prędkością $\vec{v}$. Prędkość własna motorówki $\vec{v}_1$ jest większa, niż prędkość prądu rzeki $\vec{v}_2$, tzn. $|\vec{v_1}| > |\vec{v_2}|$. Podaj ilustrację graficzną wektora prędkości $\vec{v}$, gdy motorówka płynie w górę rzeki i gdy płynie w dół rzeki (2 oddzielne rysunki).

IV.56 Jaki jest kąt między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeśli wiadomo, że $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ oraz $|\vec{a}| \neq 0$.

IV.57 Dla jakiej wartości parametru m zachodzi $\vec{b} = m\vec{a}$, jeśli $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$ (przy czym $|\vec{a}| \neq 0$).

IV.58 Dwie siły zaczepione w tym samym punkcie działają w kierunkach prostopadłych. Każda z nich ma wartosc $10\,\mathrm{N}$. Narysuj wektor siły wypadkowej oraz oblicz jego wartość.

IV.59 Oblicz iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeśli:

a) $\vec{a} = [1, 2, -1]$, $\vec{b} = [-1, 1, -2]$

b) $\vec{a} = [1, 3, -5]$, $\vec{b} = [4, -2, -1]$

c) $\vec{a} = [-1, 0, 2]$, $\vec{b} = [3, -1, 1]$

d) $\vec{a} = [1, 3, 4]$, $\vec{b} = [2, 6, 8]$

e) $\vec{a} = [0, 3, -1]$, $\vec{b} = [1, 2, 6]$

f) $\vec{a} = [0, 2, 0]$, $\vec{b} = [4, 0, 9]$

IV.60 Znajdź iloczyn skalarny następujących wektorów:

a) $\vec{a} = (2, 1, 0), \vec{b} = (-1, 0, \frac{1}{2})$.

b) $\vec{a} = (-1, 1, 3), \vec{b} = (-3, 2, \frac{1}{3})$.

c) $\vec{a} = (0, -\frac{1}{4}, -2\frac{1}{2}), \vec{b} = (1, 2, -3)$.

d) $\vec{a} = (-3, 1, 2), \vec{b} = (0, \frac{1}{3}, -1)$.

e) $\vec{a} = (2, 3, -\frac{5}{2}), \vec{b} = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0)$.

f) $\vec{a} = (-2, 1, -3), \vec{b} = (0, -2\frac{1}{3}, 1)$.

g) $\vec{a} = (5, 4, -1), \vec{b} = (\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, 2)$.

h) $\vec{a} = (-1\frac{1}{3}, -2, 1), \vec{b} = (\frac{1}{2}, -\frac{7}{3}, -1)$.

i) $\vec{a} = (-1, 2, \frac{5}{3}), \vec{b} = (\frac{3}{7}, -2\frac{1}{2}, 1)$.

j) $\vec{a} = (0, 1, \frac{3}{4}), \vec{b} = (-2\frac{1}{3}, 3, 5)$.

k) $\vec{a} = (-2\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, 1), \vec{b} = (2, 1, \frac{1}{2})$.

l) $\vec{a} = (1\frac{2}{3}, \frac{5}{2}, \frac{2}{3}), \vec{b} = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, -3)$.

IV.61 Znajdź współrzędne wektora $\vec{b}$ współliniowego z wektorem $\vec{a}$, gdy:

a) $\vec{a} = [2, -3]$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -26$ b) $\vec{a} = [-1, 1, -2]$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$

IV.62 Wektor $\overrightarrow{AB}$ o początku w punkcie $A = (1, 1, 1)$ i długości $5\sqrt{3}$ tworzy z osiami jednakowe kąty ostre. Znajdź współrzędne punktu B.

IV.63 Dane są wektory $\vec{a} = [1, 3]$ i $\vec{b} = [-2, 1]$. Znajdź wektor $\vec{x}$ prostopadły do wektora $\vec{a}$ i taki, że $\vec{b} \cdot \vec{x} = 7$.

IV.64 Oblicz kąt φ zawarty między:

a) wektorami $\vec{a} = [2, 3, -1]$ i $\vec{b} = [13, -6, 8]$

b) wektorami $\vec{c} = 4\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{d} = -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{7}{4}\vec{b}$, jeśli $\vec{a} = [-1, 1]$ i $\vec{b} = [1, 3]$

c) przekątnymi równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

IV.65 Dane są wektory $\vec{a} = [5, -6, 1]$, $\vec{b} = [-4, 3, 1]$ i $\vec{c} = [1, 2, -3]$. Znajdź wartość wyrażenia $3\vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{c}^2$.

IV.66 Dane są wektory $\vec{a} = [5, -6, 1]$, $\vec{b} = [-4, 3, 1]$ i $\vec{c} = [1, 2, -3]$. Oblicz iloczyn skalarny wektorów $2\vec{a} - \vec{b}$ i $\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.

IV.67 Dane są trzy punkty $A = (1, -2)$, $B = (2, 4)$ i $C = (0, 3)$. Znajdź cosinus kąta zawartego między środkowymi trójkąta ABC poprowadzonymi z wierzchołków A i C.

IV.68 Znajdź długość wektora $\vec{a}$, jeśli:

a) $\vec{a} = 6\vec{p} - 8\vec{q}$ oraz $\vec{p}$ i $\vec{q}$ są wektorami jednostkowymi i ortogonalnymi

b) $\vec{a} = 5\vec{p} - 4\vec{q}$ oraz $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 5$ oraz $\measuredangle(\vec{p}, \vec{q}) = 120°$

IV.69 Dane są wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, przy czym $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ oraz $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Znajdź długość wektora $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$.

IV.70 Znajdź długość przekątnych równoległoboku zbudowanego na wektorach:

a) $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ i $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$, gdzie $\vec{p}$ i $\vec{q}$ są wektorami jednostkowymi tworzącymi kąt $60°$.

b) $\vec{a} = 5\vec{m} + 2\vec{n}$ i $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$, jezeli $|\vec{m}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{n}| = 3$ i $\measuredangle(\vec{m}, \vec{n}) = 45°$.

IV.71 Oblicz wartość wyrażenia $\vec{a}^2 + 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 1$, jeśli $\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$ oraz $\measuredangle(\vec{p}, \vec{q}) = 90°$.

IV.72 W pewnym punkcie przyłożono dwie siły $\vec{P}$ i $\vec{Q}$ działające pod kątem $120°$ względem siebie, przy czym $|\vec{P}| = 7$ i $|\vec{Q}| = 4$. Znaleźć wartość siły wypadkowej $\vec{R}$.

IV.73 Oblicz iloczyny skalarne $\vec{a} \cdot \vec{b}$ jeśli:

a) $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{i}$ i $\vec{j}$ są jednostkowe i prostopadłe do siebie.

b) $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{r}$, $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{p} - \vec{r}$, kąt $(\vec{p}, \vec{r}) = 45°$, $\vec{p}$ i $\vec{r}$ są jednostkowe.

c) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, $i = j = k = 1$

IV.74 Dla jakiego parametru $m \in \mathbb{R}$ wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są względem siebie prostopadłe?

a) $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - m\vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{j}$, $i = j = 1$

b) $\vec{a} = (m-1)\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = (m+1)\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{j}$, $i = j = 1$

c) $\vec{a} = (m-1)\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{j}$, $i = j = 1$

d) $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + m\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, $i = j = k = 1$

e) $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = m\vec{i} + (m+1)\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, $i = j = k = 1$

IV.75* Jaki kąt tworzą wektory jednostkowe $\vec{s}$ i $\vec{t}$, gdy wektory $\vec{p} = \vec{s} + 2\vec{t}$, $\vec{q} = 5\vec{s} - 4\vec{t}$ są wzajemnie prostopadłe?

IV.76 Położenia planet względem gwiazdy dane są przez wektory $\vec{r}_1$ oraz $\vec{r}_2$. (Składowe wektorów wodzących wyrażone są w jednostkach astronomicznych.) Znajdź odległość pomiędzy planetami (w j.a.).

a) $\vec{r}_1 = (1, 2, 3), \vec{r}_2 = (2, 3, 1)$.

b) $\vec{r}_1 = (0, 2, 3), \vec{r}_2 = (-1, 0, \frac{1}{2})$.

c) $\vec{r}_1 = (-1, 2, 0), \vec{r}_2 = (4, 5, 0)$.

d) $\vec{r}_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1), \vec{r}_2 = (4, -5, 0)$.

e) $\vec{r}_1 = (0, 1, 0), \vec{r}_2 = (6, 1, -1)$.

f) $\vec{r}_1 = (-2, 0, -1), \vec{r}_2 = (4, -2, 1)$.

g) $\vec{r}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0), \vec{r}_2 = (5, 6, -1)$.

h) $\vec{r}_1 = (0, -\frac{1}{2}, -1), \vec{r}_2 = (3, 2, -1)$.

IV.77 Oblicz wysokosc dębu "Bartek", jeśli wiadomo, że jego cień ma długość 38,6 m wtedy, gdy promienie słoneczne padają pod kątem 35°.

IV.78 Pod jakim kątem padają promienie słoneczne, jeśli kij o długości 162 cm ustawiony prostopadle do powierzchni ziemi, rzuca cień o długości 200 cm?

IV.79 Jaką długość ma deska, która oparta pod kątem 30° do powierzchni ziemi, sięga wysokości 3 m?

IV.80 Na jaką wysokość wejdziemy, jeśli pokonany drogę 2 km (w linii prostej) wznoszącą się równomiermie pod kątem 15°?

IV.81* Obserwator o wzroście 180 cm dwukrotnie zmierzył kąt wzniesienia wieży: raz w punkcie A, drugi raz w punkcie B. Pierwszy pomiar wynosił 63°, zaś drugi 49°. Wiedząc, że punkt B oddalony jest od punktu A o 26 m i zakładając, że wieża znalazła się na prostej AB, oblicz wysokość wieży.

IV.82* Statek pasażerski płynie z prędkością 20 węzłów w kierunku wschodnio-południowo-wschodnim (ESE), tzn. w kierunku, który oddchyla się od wschodu o 22°30’ na południe. O godzinie 13:05 dostrzegł w odległości 12 mil morskich na swoim kursie zbiornikowiec płynący na wschód z prędkością 8 węzłów. O której godzinie statek pasażerski będzie znajdował się dokładnie na południe od zbiornikowca?

IV.83 Jakim trójkątem jest trójkąt o długościach boków 3 cm, 4 cm i 6 cm.

IV.84 Oblicz pole trójkąta ABC wiedząc, że: $|AB| = c$, kąt CAB= α i kąt CBA= β.

IV.85 Korzystając z twierdzenia sinusów oblicz pole:

a) kwadratu, którego przekątna ma długość a.

b) prostokąta, którego przekątna ma długość d, a kąt między przekątnymi ma miarę α.

IV.86 Udowodnij twierdzenie kosinusów korzystając z własności iloczynu skalarnego

IV.87 W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych $AC = 8$ i $BC = 6$ obrano na boku AC punkt D tak, ze $CD : DA = 3 : 5$. Znajdź cosinus kąta zawartego między $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{DA}$.

IV.88 W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $AC = BC = 8$ obrano na boku AC punkt E tak, aby $CE : AE = 3 : 1$. Znajdź cosinus kąta zawartego między wektorami $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BE}$.

IV.89 W trójkącie ABC dane są $|\measuredangle A| = 80°$, $|\measuredangle B| = 55°$ oraz $|AB| = 10$. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

IV.90 Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC, zakładając, że jeden z boków trójkąta ma długość $a = 4\sqrt{7}$ i $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3}$.

IV.91 Z wierzchołka A trójkąta ABC, którego boki mają długości a, b, c poprowadzono półprostą przecinającą bok BC w punkcie D. Podzieliła ona trójkąt ABC na dwa trójkąty. Wykazać, że stosunek promieni okręgów opisanych na tych trójkątach nie zależy od kąta, jaki tworzy półprosta z bokiem BC.

IV.92 W trójkącie dane są długości boków $a = 5$, $b = 4$ oraz kąt $\gamma = 150°$. Obliczyć długość trzeciego boku tego trójkąta i długość promienia opisanego na nim okręgu.

IV.93* W równoległoboku kąt ostry ma miarę $60°$, a stosunek kwadratu długości krótszej przekątnej do kwadratu długości dłuższej przekątnej wynosi $19 : 39$. Obliczyć stosunek długości bokow równoległoboku.

IV.94 W trójkącie ABC dane są $|\measuredangle A| = 80°$, $|\measuredangle B| = 40°$. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość 12. Oblicz długość boku $|AB|$.

IV.95 W trójkącie ABC dane są $\sin\alpha = \frac{1}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$ i $|BC| = 8$. Wyznacz długość boku $|AC|$.

IV.96 Oblicz długość przekątnych równoległoboku, jeśli jego boki mają miarę $a = 2\sqrt{3}$, $b = 3\sqrt{2}$, a kąt ostry ma miarę $\frac{\pi}{4}$.

IV.97 Dane są wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Znajdź wektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

a) $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (-2, 1, 1)$.

b) $\vec{a} = (0, -2, 1), \vec{b} = (2, -1, 3)$.

c) $\vec{a} = (1, 2, -1), \vec{b} = (-2, -4, 2)$.

d) $\vec{a} = (\frac{1}{2}, 2, 1), \vec{b} = (0, 2, -2)$.

e) $\vec{a} = (1, 0, 0), \vec{b} = (0, 1, 0)$.

f) $\vec{a} = (-2, 3, -1), \vec{b} = (0, 3, -2)$.

g) $\vec{a} = (-1, 2, 0), \vec{b} = (\frac{1}{2}, 0, -2)$.

h) $\vec{a} = (0, 3, 2), \vec{b} = (1, -2, 0)$.

IV.98 Oblicz iloczyny wektorowe podanych par wektorów:

a) $\vec{a} = [-1, 3, 2]$, $\vec{b} = [-1, 2, -5]$

b) $\vec{p} = 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{q} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

c) $\vec{a} = [-3, 2, 0]$, $\vec{b} = [1, 5, -2]$

d) $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$

e) $\vec{a} = [4, 0, -2]$, $\vec{b} = [2, -2, \frac{1}{2}]$

f) $\vec{x} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{y} = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$

IV.99 Znajdź współrzędne wektora $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ dla następujących wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$

a) $\vec{a} = (1, 2, 0), \quad \vec{b} = (3, \frac{1}{2}, 0)$.

b) $\vec{a} = (\frac{2}{5}, -1, 3), \quad \vec{b} = (2, 1, \frac{1}{2})$,

c) $\vec{a} = (-1, 0, 3\frac{1}{2}), \quad \vec{b} = (1, \frac{1}{4}, -2)$,

d) $\vec{a} = (\frac{1}{4}, 1, -2), \quad \vec{b} = (0, -2, -1)$.

e) $\vec{a} = (-2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}), \quad \vec{b} = (-1, -\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2})$,

f) $\vec{a} = (1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), \quad \vec{b} = (-2\frac{1}{4}, -2\frac{1}{2}, 0)$,

g) $\vec{a} = (-\frac{2}{5}, \frac{1}{4}, 1), \quad \vec{b} = (-3, 3\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$,

h) $\vec{a} = (1, 0, 0), \quad \vec{b} = (3, -\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2})$.

IV.100 Dane są wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Znajdź wzór na wektor $\vec{a}_{\|}$, będący rzutem wektora $\vec{a}$ na kierunek wektora $\vec{b}$.

IV.101 Dla podanych wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, rozłóż wektor $\vec{a}$ na składowe równoległą $\vec{a}_{\|}$ oraz prostopadłą $\vec{a}_{\perp}$ do wektora $\vec{b}$

a) $\vec{a} = [1, 2, 0]$, $\vec{b} = [3, 1, 0]$.

b) $\vec{a} = [2, -1, 3]$, $\vec{b} = [2, 1, \frac{1}{2}]$.

c) $\vec{a} = [-1, 0, 3\frac{1}{2}]$, $\vec{b} = [1, 2, -2]$.

d) $\vec{a} = [\frac{1}{2}, 1, -2]$, $\vec{b} = [0, -2, -1]$.

e) $\vec{a} = [-1, \frac{1}{2}, 2]$, $\vec{b} = 1, 2, -1$.

f) $\vec{a} = [-\frac{1}{2}, 1, 0]$, $\vec{b} = [-2, \frac{1}{2}, -1]$.

g) $\vec{a} = [0, 0, -1)]$ $\vec{b} = [1, 1, -2]$.

h) $\vec{a} = [-2, 2, 1]$, $\vec{b} = [-1, 3, -2]$.

i) $\vec{a} = [2, 1, -1]$, $\vec{b} = [1, 2, 1]$

IV.102 Dane są trzy punkty $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, -3, 2)$ i $C = (-1, 2, -1)$. Znajdź rzut $\vec{x}$ wektora $\overrightarrow{AD}$ na oś o kierunku wektora $\overrightarrow{AB}$, jeżeli D jest środkiem odcinka BC.

IV.103 Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-1, 4)$, $B = (-4, 0)$ i $C = (3, 1)$. Znajdź kąt między wysokością tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka A i bokiem AC.

IV.104 Obliczyć

a) pole trójkąta rozpiętego na wektorach $\vec{a} = [1, -1, 1]$, $\vec{b} = [0, 3, -2]$

b) pole równoległoboku o wierzchołkach $A = (1, 0, 1)$, $B = (3, -1, 5)$ i $C = (-1, 5, 0)$

c) objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$,

d) pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{a} = [1, 2, 3]$, $\vec{b} = [0, -2, 5]$

e) pole trójkąta o wierzchołkach $A = (1, -1, 3)$, $B = (0, 2, -3)$ i $C = (2, 2, 1)$

f) pole i objętość czworościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u} = [0, -2, 0]$, $\vec{v} = [0, 0, -2]$, $\vec{w} = [2, 0, 0]$

g) pole i objętość czworościanu o wierzchołkach w punktach $A = (0, 0, 1)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (-1, 0, 1)$, $D = (1, -1, 0)$

h) pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$ i $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$,

i) pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ i $\vec{b} = 2\vec{p} + 4\vec{q}$, gdzie $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$ i $\sphericalangle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$

j) wiedząc, że pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{p}$ i $\vec{q}$ jest równe 2 obliczyć pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{a} = 2\vec{p} + 4\vec{q}$ i $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$

k) pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{p}$ i $\vec{q}$ wiedząc, że pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{a} = 2\vec{p} + 4\vec{q}$ i $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$ jest równe 12

IV.105 Dane są trzy punkty $A = (2, -1, 2)$, $B = (1, 2, -1)$ i $C = (3, 2, 1)$. Znaleźć współrzędne wektora $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

IV.106 Obliczyć $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ oraz $(\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$ dla podanej trójki wektorów

a) $\vec{a} = [1, 2, 3]$, $\vec{b} = [2, -3, 1]$ i $\vec{c} = [-3, 1 - 2]$

b) $\vec{a} = [-1, 0, 1]$, $\vec{b} = [1, 2, -1]$ i $\vec{c} = [0, 1 - 2]$

c) $\vec{a} = [0, -1, 1]$, $\vec{b} = [2, -1, 0]$ i $\vec{c} = [1, 1, 1]$

IV.107* Pokazać, że dla dowolnej trójki wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ zachodzi

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$$

IV.108 Uprość wyrażenia:

a) $|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|$

b) $\vec{p}\times(2\vec{q}-\vec{r}+\vec{p})+(2\vec{r}+\vec{q})\times(\vec{p}-2\vec{r})$

c) $(2\vec{b}-5\vec{c})\times(3\vec{c}+4\vec{b})$

d) $(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{c}+\vec{a})+(2\vec{b}-3\vec{c})\times(3\vec{a}-\vec{b})$

e) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})$

f) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})$

IV.109 Dane są wektory jednostkowe $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Wiedząc, że $\sphericalangle=(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3}$ obliczyć:

a) $[(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{b}-\vec{a})]^2$ b) $(\vec{a}\times\vec{b})^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$ c) $|\vec{a}\times(\vec{b}+2\vec{a})|$

IV.110* Wykazać prawdziwość następujących relacji: (Oznaczenie: $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\equiv\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$)

a) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}$

b) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot[(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})]=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2$

IV.111* Czy dla dowolnych wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ prawdziwe są równości:

a) $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b}$

b) $(\vec{a}\pm\vec{b})\times(\vec{a}\pm\vec{b})=\vec{a}\times\vec{a}\pm2\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{b}$

c) $(\vec{a}\times\vec{b})^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$

d) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{a}+\vec{c})+\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{0}$

IV.112 Obliczyć sinus kąta zawartego między wektorami $\vec{a}=[0,1,-1]$ i $\vec{b}=[2,1,1]$.

IV.113 Znaleźć tangens kąta zawartego między wektorami $\vec{a}=[0,1,2]$ i $\vec{b}=[2,-1,0]$.

IV.114* Dane są wierzchołki trójkąta $A=(-3,1,-1)$, $B=(6,-2,-5)$ i $C=(1,-2,-1)$. Obliczyć długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka B.

IV.115* Znajdź wektor prostopadły do płaszczyzny przechodzącej przez punkty:

a) $P_1=(1,1,1)$, $P_2=(-1,0,1)$, $P_3=(5,6,7)$

b) $P_1=(3,1,-1)$, $P_2=(-2,1,1)$, $P_3=(3,5,2)$

c) $P_1=(0,1,0)$, $P_2=(1,2,3)$, $P_3=(4,2,1)$

IV.116 Obliczyć objętość oraz wysokość czworościanu $ABCD$ poprowadzoną z wierzchołka D, gdy:

a) $A=(3,1,1)$, $B=(1,4,1)$, $C=(1,1,7)$, $D=(3,4,9)$

b) $A=(5,2,0)$, $B=(2,5,0)$, $C=(1,2,4)$, $D=(0,0,0,)$

IV.117* Wyprowadź wzór na współrzędne wektora jednostkowego $\vec{n}$ prostopadłego do płaszczyzny $z=ax+by+c$.

IV.118 Znajdź wzór na współrzędne ogniska paraboli $y=\alpha x^2$.

IV.119* Znajdź transformację $(a,b,c)\rightarrow(x_o,y_o,y_k)$ pomiędzy parametrami a,b,c paraboli $y=ax^2+bx+c$ oraz współrzędnymi ogniska (x_o,y_o) i położeniem kierownicy y_k

IV.120* Znajdź transformację odwrotną do tej z poprzedniego zadania: $(x_o,y_o,y_k)\rightarrow(a,b,c)$.

IV.121* Mając dane parametry A,B,C paraboli o postaci $y=A(x-B)^2+C$, znajdź wyrażenia na (x_o,y_o,y_k).

IV.122* Znajdź transformację odwrotną do tej z poprzedniego zadania: $(x_o,y_o,y_k)\rightarrow(A,B,C)$.

IV.123 Dane jest równanie paraboli. Znajdź współrzędne ogniska oraz równanie kierownicy. Narysuj krzywą.

a) $2y^2+3y-1+x=0$,

b) $y=x^2+3$,

c) $(y-1)^2-3y+2-x=0$,

d) $y-x+x^2=2$,

e) $y+2x^2=(x-1)^2$,

f) $(x-1)^2=y-3$,

IV.124 Podaj współrzędne środka oraz promień okręgu danego równaniem. Narysuj okrąg.

a) $(x-3)^2+(y+2)^2=16.$

b) $x^2+y^2=2x+2y+2.$

c) $x^2+y^2=4x-6y.$

d) $x^2+y^2=-3x+y-4.$

e) $x^2+y^2=-2x+4y+4.$

f) $x^2+y^2=x+y+1.$

g) $4x^2+4y^2+32x-24y+36=0.$

h) $x^2+y^2=2x-3.$

i) $x^2+y^2=-10-2x-10y.$

j) $x^2=-y(y+2).$

IV.125* Znajdź wzór na prostą $y=Ax+B$ styczną do okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ w punkcie okręgu danym przez

a) współrzędne punktu styczności (x_0, y_0)

b) kąt biegunowy punktu styczności φ.

IV.126 Wykorzystując wynik zadania IV.125 podaj wzór na prostą styczną do okręgu w zadanym punkcie. Narysuj okrąg wraz ze styczną.

a) $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ w punkcie $x_0=4, y_0=2$

b) $(x+1)^2+(y-1)^2=9$ w punkcie $x_0=2, y_0=1$

c) $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ w punkcie o współrzędnej biegunowej $\varphi=30°$

d) $x^2+(y-2)^2=16$ w punkcie o współrzędnej biegunowej $\varphi=45°$

IV.127 Narysuj elipsę o zadanym wzorze. Podaj współrzędne środka, wartości półosi wielkiej (a jeśli półoś wielka jest równoległa do osi OX, b jeśli półoś wielka jest równoległa do osi OY) oraz położenie ognisk.

a) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{6}=1.$

b) $\dfrac{(x-1)^2}{2}+\dfrac{y^2}{5}=1.$

c) $3(x+1)^2+2y^2-6=0.$

d) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}-1=0.$

e) $3(x-1)^2+2(y+3)^2-6=0.$

f) $2(x+1)^2+5(y+2.5)^2=10.$

IV.128* Czy dane równania opisują elipsę? Uzasadnij odpowiedź. W przypadku odpowiedzi twierdzącej, podaj parametry elipsy.

a) $9x^2+4y^2+36x-24y+108=0.$

b) $4x^2+9y^2-24x+36y+36=0.$

IV.129* Jakie krzywe opisywane są przez następujące równania. Podaj podstawowe parametry krzywej (w zależności od rodzaju krzywej: współrzędne środka, ognisk, równania kierownic, promień, półosie) a następnie naszkicuj jej wykres:

a) $16x(x-4)+4y(y+2)-4=0.$

b) $x(x+6)-4y(1-y)=3y^2.$

c) $4x(x-2)=-y(y+2)-1.$

d) $\dfrac{y+1}{x}=2x+1.$

Odpowiedzi

IV.1 8

IV.2 a) $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{CC}, \overrightarrow{DD}$, b) $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}$, c) $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}$, d) $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB}$

IV.3 a) $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{EA}$, b) $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DF}, \overrightarrow{FD}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{CE}$, c) $\overrightarrow{BD}$, d) $\overrightarrow{BD}$, e) $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{EA}$

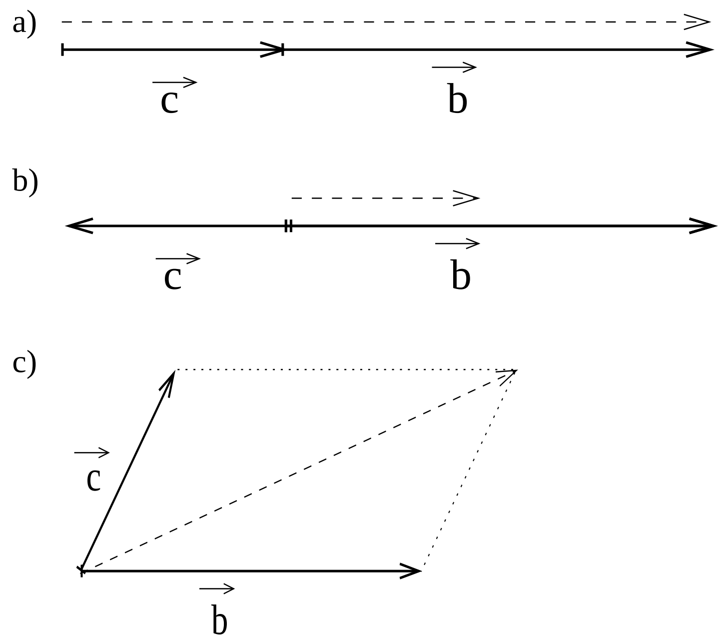
IV.4 a) $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{GF}$, b) $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{GB}$,
c) $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{GF}$, d) $\overrightarrow{HE}$, e) $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{FG}$, f) $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{HA}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{ED}$

IV.5 b) $\overrightarrow{AC}$

IV.8 a) $\overrightarrow{AD}$, b) $\overrightarrow{AE}$, c) $\overrightarrow{AC}$, d) $\vec{0}$

IV.9 a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$, b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ i $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

IV.10 $\vec{a}$ przedstawiony wektorem z linią przerywaną (Rys. 3)



Rysunek 3:

IV.11 Suma wektorow przedstawiona wektorem z linią przerywaną (Rys. 4)

IV.13 $\vec{d_A} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{d_B} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{d_C} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}$

IV.14 $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$

IV.15 a) $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$, b) $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

IV.16 $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\vec{p} + 4\vec{q}$, $\overrightarrow{AN} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\vec{p} - 2\vec{q}$

IV.17 Jeśli C dzieli odcinek AB na pół

IV.18 $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BE} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{AB}$

IV.19 Wektor przekątnej sali zaczepiony w danym rogu

IV.20 a) $\vec{u}$ i $\vec{v}$ równoległe i zgodne zwroty, b) $\vec{u}$ i $\vec{v}$ równoległe, zgodne zwroty i $|\vec{u}| \geqslant |\vec{v}|$, c) $\vec{u}$ i $\vec{v}$ równoległe i zgodne zwroty, d) $\vec{u}$ i $\vec{v}$ równoległe, przeciwne zwroty i $|\vec{u}| \geqslant |\vec{v}|$

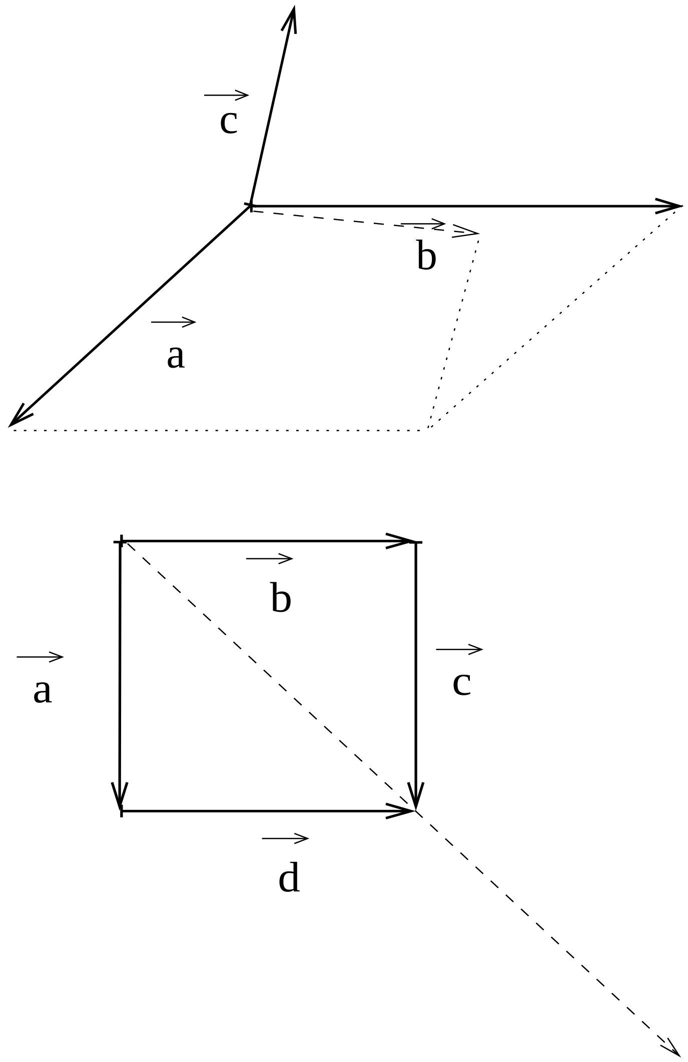
IV.21 Każdy wektor da się przedstawić jako kombinacja liniowa dwóch niezerowych i nierównoległych wektorów

IV.22 Każdy wektor na płaszczyźnie można przedstawić w postaci kombinacji liniowej dwóch danych niezerowych i nierównoległych wektorów.

IV.23 Liniowa niezależność: jeśli $a_i \in \Re$ i $a_1\vec{f_1} + a_2\vec{f_2} + \ldots + a_n\vec{f_n} = \vec{0}$, to $a_i = 0$, tzn. istnieje tylko rozwiązanie trywialne. Zatem warunek niezależności: $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ ma rozwiązanie trywialne, gdy $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Jesli $\vec{a} \parallel \vec{b}$, to $\vec{a} = \gamma\vec{b}$, czyli wektory sa zależne.

IV.24 Analogicznie jak **IV.23** .

IV.25 Z treści zadania wynika, ze $a_1\vec{f_1} + a_2\vec{f_2} = \vec{0}$ jedynie dla $a_1 = a_2 = 0$, a) $a_1\vec{f_1} + a_2(-\vec{f_2}) = \vec{0}$ też dla $a_1 = a_2 = 0$, b) $a_1(\vec{f_1} - \vec{f_2}) + a_2(\vec{f_1} + \vec{f_2}) = \vec{0}$ po przekształceniach $(a_1 + a_2)\vec{f_1} + (a_2 - a_1)\vec{f_2} = \vec{0}$ będzie spełnione, gdy $(a_1 + a_2) = (a_2 - a_1) = 0$, c), d) analogicznie



Rysunek 4:

IV.26 Analogicznie jak **IV.25** .
IV.27 a) $\overrightarrow{AB} = [-1,-6]$, $\overrightarrow{BA} = [1,6]$, b) $\overrightarrow{AB} = [5,-2]$, $\overrightarrow{BA} = [-5,2]$, c) $\overrightarrow{AB} = [5,5]$, $\overrightarrow{BA} = [-5,-5]$, d) $\overrightarrow{AB} = [1,-1,8]$, $\overrightarrow{BA} = [-1,1,-8]$, e) $\overrightarrow{AB} = [-2,-1,-3]$, $\overrightarrow{BA} = [2,1,3]$, f) $\overrightarrow{AB} = [-4,1,2]$, $\overrightarrow{BA} = [4,-1,-2]$
IV.28 $A = (6,-7)$
IV.29 a) $B = (1,7)$, b) $B = (-5,-1)$, c) $B = (4,11)$, d) $B = (-0.5,5)$
IV.30 a) $C = (5,10)$, b) $C = (1,2)$, c) $C = (-1,-2)$, d) $C = (4,8)$, e) $C = (2,4)$, f) $C = (\frac{7}{3}, \frac{14}{3})$, g) –
IV.31 a) $\sqrt{21}$, b) $\frac{\sqrt{17}}{2}$, c) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$, d) $\frac{\sqrt{409}}{6}$, e) $\frac{7}{3}$, f) $\frac{2\sqrt{10}}{3}$, g) $\frac{\sqrt{61}}{3}$, h)$\sqrt{5}$, i) $\frac{\sqrt{89}}{3}$, j) $\frac{\sqrt{17}}{4}$, k) $\sqrt{29}$, l) 4
IV.32 a) $\vec{a}+\vec{b} = [1,4]$, $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = \sqrt{10}$, $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{17}$, b) $\vec{a}+\vec{b} = [9,3]$, $|\vec{a}| = \sqrt{10}$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{10}$, $|\vec{a}+\vec{b}| = 3\sqrt{10}$, c) $\vec{a}+\vec{b} = [3,5,-3]$, $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{6}$, $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{43}$, d) $\vec{a}+\vec{b} = [-3,3,-1]$, $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{17}$, $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{19}$, e) $\vec{a}+\vec{b} = [-3,1,-0]$, $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = \sqrt{5}$, $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{10}$
IV.33 a) $\sqrt{5}$, b) $\sqrt{13}$, c) 5, d) 5, e) 2
IV.34 a) $\vec{a} = -\frac{1}{7}\vec{b} - \frac{18}{7}\vec{c}$, b) $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$, c) $\vec{a} = -\frac{3}{5}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}$, d) $\vec{a} = -\frac{5}{8}\vec{b} + \frac{1}{8}\vec{c}$, e) $\vec{a} = -\frac{2}{7}\vec{b} + \frac{4}{7}\vec{c}$
IV.35 a) niezależne, b) zależne, c) niezależne, d) niezależne, e) zależne, f) niezależne, g) niezależne
IV.36 a) $m \neq -2$, b) $m =\neq -\frac{3}{2}$, c) $m \neq \frac{-2}{3}$, d) $m \neq -1, m \neq 0$

IV.37 a) $\vec{w} = 10\vec{a} - 5\vec{b}$, b) $\vec{w} = 0\vec{a} - 1\vec{b}$, c) $\vec{w} = -2\vec{a} - 2\vec{b}$, d) $\vec{a}$ i $\vec{b}$ sa współliniowe
IV.38 a) $\vec{w} = 1\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}$, b) $\vec{a}$ i $\vec{c}$ sa współliniowe, c) $\vec{w} = 1\vec{a} - 1\vec{b} + 1\vec{c}$, d) $\vec{w} = -1\vec{a} + 1\vec{b} - 2\vec{c}$
IV.39 $\overrightarrow{AC} = [1, 3]$
IV.40 $\vec{x} = [5, 5, 2]$
IV.41 $2\vec{a} = [12, 4]$, $\frac{1}{2}\vec{a} = [3, 1]$, $-4\vec{a} = [-24, -8]$, $-\frac{1}{3}\vec{a} = [-2, -\frac{2}{3}]$
IV.42 $5\sqrt{2} + \sqrt{26}$, tak
IV.43 a) nie, b) tak, c) tak
IV.44 nie
IV.45 $4\sqrt{29}$
IV.46 a) $P(2, 3)$, $R(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $S(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, b) $P(2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$, $R(-2\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $S(-\frac{1}{4}, 1\frac{1}{4})$
IV.47 a) $\frac{a^2}{2}$, b) $-\frac{a^2}{2}$, c) $-3\frac{a^2}{4}$
IV.48 $a = 5$
IV.49 $x = \frac{2}{5}$
IV.50 a) $15\sqrt{3}$, b) -4, c) -5
IV.51 a) 13, b) -25, c) $-\frac{3}{2}$
IV.52 a) 31, b) 4
IV.53 a) -3, b) 7, c) 19, d) 1
IV.56 $180°$
IV.57 $m \in \{2, -2\}$
IV.58 $10\sqrt{2}\,\mathrm{N}$
IV.59 a) 3, b) 3, c) -1, d) 52, e) 0, f) 0
IV.60 a) -2, b) 6, c) 7, d) $-\frac{5}{3}$, e) $\frac{11}{3}$, f) $-\frac{16}{3}$, g) 0, h) 3, i) $-\frac{79}{21}$, j) $\frac{27}{4}$, k) $-\frac{107}{30}$, l) 0
IV.61 a) $\vec{b} = [-4, 6]$, b) $\vec{b} = [-2, 2, -4]$
IV.62 $B = (6, 6, 6)$
IV.63 $\vec{x} = [-3, 1]$
IV.64 a) $90°$, b) $45°$, c) $90°$ ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ tworzą bazę ortonormalną)
IV.65 231
IV.66 342
IV.67 $-\frac{4}{5}$
IV.68 a) 10, b) $10\sqrt{7}$
IV.69 a) $\sqrt{7}$
IV.70 a) $e = 4$, $f = 2$, b) $e = 15$, $f = \sqrt{593}$
IV.71 20
IV.72 $\sqrt{37}$
IV.73 a) 5, b) $-2 - \frac{\sqrt{2}}{4}$, c) -2
IV.74 a) $m = \frac{3}{2}$, b) $m \in \emptyset$, c) $m = 2$, d) $m = 7$, e) $m = 3$
IV.75 $\frac{\pi}{3}$
IV.76 a) $\sqrt{6}$, b) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$, c) $\sqrt{34}$, d) $\sqrt{\frac{51}{2}}$, e) $\sqrt{37}$, f) $2\sqrt{11}$, g) $\sqrt{\frac{83}{2}}$, h) $\frac{\sqrt{61}}{2}$
IV.77 $\approx 27\,\mathrm{m}$
IV.78 $39°$
IV.79 $6\,\mathrm{m}$
IV.80 $517\,\mathrm{m}$
IV.81 Prosta wzdłuż której patrzymy, tworzy z płaszczyzna poziomą bedącą na wysokości oczu obserwatora kąt wzniesienia (jeśli patrzymy powyżej tejże płaszczyzny poziomej) lub kąt depresji (jeśli patrzymy poniżej). Z treści zadania wynika, że $\frac{x}{h} = \operatorname{ctg}\alpha$ oraz $\frac{x+s}{h} = \operatorname{ctg}\beta$, zatem $h \approx 74\,\mathrm{m}$.
IV.82 1 węzeł = 1 mila morska na godzinę. P_1, Z_1 — położenie statku pasażerskiego i zbiornikowca o godzinie 13:05. $|P_1Z_1| = 12\,\mathrm{mil}$ morskich. P_2, Z_2 — położenie statku pasażerskiego i zbiornikowca, w chwili, gdy statek pasażerski znajduje sie na południe od zbiornikowca. t — czas [h], jaki upłynął między pierwszym a drugim położeniem statków, x – droga zbiornikowca w czasie t. $|Z_1Z_2| = x = 8t$ (prędkość 8 wezłów). $|Z_1P_2| = \frac{x}{\cos 22^o 30'}$. Droga przebyta przez statek pasażerski w czasie t z prędkością 20 węzłów: $12 + \frac{x}{\cos 22^o 30'} = 20t$. Otrzymujemy: $t \approx 1,058h = 1h3m29s$, czyli ok. 14:08.
IV.83 Rozwartokątnym (tw. kosinusów).
IV.84 $\frac{1}{2}\frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ (tw. sinusów)
IV.85 a) $\frac{a^2}{2}$, b) $\frac{d^2}{2}\sin\alpha$

IV.86 Zbuduj trójkąt, którego boki tworzą wektory spełniające równanie: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Wyznaczyć $\overrightarrow{BC}$ i podnieść obustronnie do kwadratu.

IV.87 $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

IV.88 dla $AB = 6$, $\cos\gamma = \frac{5\sqrt{7}}{14}$

IV.89 $5\sqrt{2}$

IV.90 6

IV.91 Z tw. sinusów dla $\triangle ABD$: $R_1 = \frac{c}{2\sin\delta}$, gdzie $\delta \equiv \angle ADB$, a R_1 jest promieniem okręgu opisanego na $\triangle ABD$. Zauważmy, że $|\angle ADC| = 180^\circ - \delta$. Tw. sinusów dla $\triangle ADC$: $R_2 = \frac{b}{2\sin(180^\circ\delta)} = \frac{b}{2\sin(\delta)}$, gdzie R_2 jest promieniem okręgu opisanego na $\triangle ADC$. Zatem $\frac{R_1}{R_2} = \frac{c}{b}$.

IV.92 $R = c = \sqrt{41 + 20\sqrt{3}}$

IV.93 $\frac{2}{5}$

IV.94 $12\sqrt{3}$

IV.95 32

IV.96 $d_1 = \sqrt{30 + 12\sqrt{3}}$, $d_2 = \sqrt{30 - 12\sqrt{3}}$

IV.97 a) $\vec{c} = [-1, -7, 5]$, b) $\vec{c} = [-5, 2, 4]$, c) $\vec{c} = \vec{0}$, d) $\vec{c} = [1, 1, 1]$, e) $\vec{c} = [0, 0, 1]$, f) $\vec{c} = [-3, -4, 6]$, g) $\vec{c} = [-4, 1, 1]$, h) $\vec{c} = [4, 2, -3]$

IV.98 a) $[-19, -7, 1]$, b) $[7, 1, -2]$, c) $[-4, -6, -17]$, d) $[3, 5, 2]$, e) $[-4, -6, -8]$, f) $[1, -7, 5]$

IV.99 a) $\vec{c} = [0, 0, -\frac{11}{2}]$, b) $\vec{c} = [-\frac{7}{2}, \frac{29}{5}, \frac{12}{5}]$, c) $\vec{c} = [-\frac{7}{8}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{4}]$, d) $\vec{c} = [-5, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}]$, e) $\vec{c} = [-\frac{49}{20}, -\frac{67}{20}, \frac{11}{4}]$, f) $\vec{c} = [\frac{5}{8}, -\frac{9}{16}, -\frac{105}{16}]$, g) $\vec{c} = [-\frac{41}{12}, -\frac{43}{15}, -\frac{13}{20}]$, h) $\vec{c} = [0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$

IV.100 $\vec{a}_{\parallel} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{b^2}\vec{b}$

IV.101 a) $\vec{a}_{\parallel} = [\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0]$, $\vec{a}_{\perp} = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0]$, b) $\vec{a}_{\parallel} = [\frac{12}{7}, \frac{6}{7}, \frac{3}{7}]$, $\vec{a}_{\perp} = [\frac{2}{7}, -\frac{13}{7}, \frac{18}{7}]$, c) $\vec{a}_{\parallel} = [-\frac{8}{9}, -\frac{16}{9}, \frac{16}{9}]$, $\vec{a}_{\perp} = [-\frac{1}{9}, \frac{16}{9}, \frac{31}{18}]$, d) $\vec{a}_{\parallel} = \vec{0}$, $\vec{a}_{\perp} = [\frac{1}{2}, 1, -2]$, e) $\vec{a}_{\parallel} = [-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}]$, $\vec{a}_{\perp} = [-\frac{2}{3}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3}]$, f) $\vec{a}_{\parallel} = [-\frac{4}{7}, \frac{1}{7}, -\frac{2}{7}]$, $\vec{a}_{\perp} = [\frac{1}{14}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}]$, g) $\vec{a}_{\parallel} = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}]$, $\vec{a}_{\perp} = [-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}]$, h) $\vec{a}_{\parallel} = [-\frac{3}{7}, \frac{9}{7}, -\frac{6}{7}]$, $\vec{a}_{\perp} = [-\frac{11}{7}, \frac{5}{7}, \frac{13}{7}]$, i) $\vec{a}_{\parallel} = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}]$, $\vec{a}_{\perp} = [\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}]$

IV.102 $\frac{5}{18}[1, -4, 1]$

IV.103 45°

IV.104 a) $\frac{\sqrt{14}}{2}$, b) $\sqrt{461}$, c) $|\vec{p}\cdot(\vec{q}\times\vec{r})|$, d) $\sqrt{285}$, e) $2\sqrt{61}$, f) pole czworościanu liczymy jako sumę pól trójkątów: $P = \frac{1}{2}|\vec{v}\times\vec{w}| + \frac{1}{2}|\vec{w}\times\vec{u}| + \frac{1}{2}|\vec{v}\times\vec{u}| + \frac{1}{2}|\overrightarrow{v-w}\times\overrightarrow{u-w}| = 6 + 2\sqrt{3}$, $V = \frac{1}{3}P_{podst}h = \frac{1}{3}\frac{1}{2}|\vec{v}\times\vec{u}|\frac{|\vec{w}\cdot(\vec{v}\times\vec{u})|}{|\vec{v}\times\vec{u}|} = \frac{1}{6}|\vec{w}\cdot(\vec{v}\times\vec{u})| = \frac{4}{3}$, g) $P = \sqrt{14} + \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{30})$, $V = \frac{4}{3}$, h) 3, i) $24\sqrt{3}$, j) 12, k) 2

IV.105 $[6, -4, -6]$

IV.106 a) $[-17, 22, -9]$, b) $[-2, 2, -2]$, c) $[-1, -1, -1]$

IV.107 Obliczyć iloczyn $\vec{b}\times\vec{c}$ podstawiając współrzędne $\vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$, $\vec{c} = [c_x, c_y, c_z]$, następnie wykonać mnożenie $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, gdzie $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$ i pogrupować.

IV.108 a) $2|\vec{a}\times\vec{b}|$, b) $\vec{p}\times\vec{q} - 3\vec{p}\times\vec{r} - 2\vec{q}\times\vec{r}$, c) $26\vec{b}\times\vec{c}$, d) $12\vec{a}\times\vec{c} + 6\vec{b}\times\vec{c} - 9\vec{a}\times\vec{b}$, e) tożsamość Lagrange'a $\vec{a}\cdot[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})] = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{d})$, f) $[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{d}]\vec{c} - [(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}]\vec{d}$

IV.109 a) $\frac{75}{4}$, b) $\frac{7}{4}$, c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

IV.111 a) nie, b) nie, c) nie, d) tak

IV.112 1

IV.113 $-2\sqrt{6}$

IV.114 5

IV.115 a) $[-6, 12, -6]$, b) $[-8, 15-20]$, c) $[-2, 11, -3]$

IV.116 patrz zadanie **IV.104** f): $V = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})|$, $V = \frac{1}{3}P_{podst}h_D = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|h_D$. a) $V = 14$, $h_D = \sqrt{14}$, b) $V = 14$, $h_D = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

IV.117 Znajdujemy warunek na wektory równoległe do płaszczyzny, $\vec{r} = (r_x, r_y, ar_x + br_y)$, $\vec{v} = (v_x, v_y, av_x + bv_y)$. Wybierając $r_x = v_y = 1$ oraz $r_y = v_x = 0$ znajdujemy iloczyn wektorowy $\vec{w} = \vec{r}\times\vec{v} = (a, b, -1)$. Następnie normalizujemy wektor $\vec{w}$ otrzymując $\vec{n} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}$.

IV.118 $x_o = 0, y_o = \frac{1}{4\alpha}$, równanie kierownicy $y = y_k = -\frac{1}{4\alpha}$.

IV.119 Wykorzystujac wynik z poprzedniego zadania otrzymujemy: $x_o = x_w = -\frac{b}{2a}$, $y_o = y_w + \frac{1}{4a} = \frac{-b^2+1}{4a} + c, y_k = y_w - \frac{1}{4a} = \frac{-b^2-1}{4a} + c$.

IV.120 $a = \frac{1}{2(y_o - y_k)}, b = -\frac{2x_o}{y_o - y_k}, c = \frac{y_o + y_k}{2} + \frac{2x_o^2}{y_o - y_k}$.

IV.121 $x_o = B, y_o = C + \frac{1}{4A}, y_k = C - \frac{1}{4A}$

IV.122 $A = \frac{1}{2(y_o - y_k)}, B = x_o, C = \frac{y_o + y_k}{2}$
IV.123 a) $x_o = 2, y_o = -\frac{3}{4}, x_k = \frac{9}{4}$, b) $x_o = 0, y_o = \frac{13}{4}, y_k = \frac{11}{4}$, c) $x_o = -3, y_o = \frac{5}{2}, x_k = -\frac{7}{2}$, d) $x_o = \frac{1}{2}, y_o = -2, y_k = \frac{5}{2}$, e) $x_o = -1, y_o = \frac{7}{4}, y_k = -\frac{9}{4}$, f) $x_o = 1, y_o = \frac{13}{4}, y_k = \frac{11}{4}$
IV.124 a) $(3, -2)$, $r = 4$, b) $(1, 1)$, $r = 2$, c) $(2, -3)$, $r = \sqrt{13}$, d) nie jest to okrąg, e) $(-1, 2)$, $r = 3$, f) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $r = \sqrt{\frac{3}{2}}$, g) $(-4, 3)$, $r = 4$, h) nie jest to okrąg, i) $(-1, -5)$, $r = 4$, j) $(0, -1)$, $r = 1$
IV.125 a) Wyznacz równanie prostej k przechodzącej przez punkty (a, b) i (x_0, y_0). Następnie wyznacz równanie prostej prostopadłej do k przechodzącej przez punkt styczności (x_0, y_0): $y - y_0 = \frac{a - x_0}{y_0 - b}(x - x_0)$, b) $A = -\operatorname{ctg}\varphi, B = r\csc\varphi + a\operatorname{ctg}\varphi + b$
IV.126 a) $y = -\frac{3}{4}x + 5$, b) punkt (x_0, y_0) nie leży na okręgu, c) $y = -\sqrt{3}x + 8 + \sqrt{3}$, d) $y = -x + 2 + 2\sqrt{2}$
IV.127 a) $(0, 0)$, $b = \sqrt{6}$, b) $(1, 0)$, $b = \sqrt{5}$, c) $(-1, 0)$, $b = \sqrt{3}$, d) $(0, 0)$, $a = \sqrt{5}$, e) $(1, -3)$, $b = \sqrt{3}$, f) $(-1, -2\frac{1}{2})$, $a = \sqrt{5}$
IV.128 a) $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = -1$ – nie jest to równanie elipsy, b) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ – równanie elipsy o środku w punkcie $(3, 2)$ oraz półosiach $a = 3, b = 2$
IV.129 a) elipsa o środku w punkcie $(2, -1)$ oraz półosiach $a = 2, b = 4$, b) okrąg o środku w punkcie $(-3, 2)$ oraz promieniu $r = \sqrt{13}$, c) elipsa o środku w punkcie $(1, -1)$ oraz półosiach $a = \frac{1}{2}, b = 1$, d) parabola o wierzchołku w punkcie $(-\frac{1}{4}, -\frac{9}{8})$, ognisku w punkcie $(-\frac{1}{4}, -1)$ oraz kierownicy $y_k = -\frac{5}{4}$