Zad. 1 Dwa okręty wyruszyły jednocześnie z tego samego miejsca w drogę w kierunkach do siebie prostopadłych, jeden z prędkością $\upsilon_1 = 30$ km/h, drugi z prędkością $\upsilon_2 = 40$ km/h. Obliczyć prędkość wzajemnego oddalania się okrętów oraz ich odległość po upływie 20 min.

Rozwiązanie

Zacznijmy może od drugiego polecenia – wyznaczenia wzajemnej odległości, pozwoli to nam łatwiej zrozumieć metodę obliczenia.
Ruch obu okrętów to ruch jednostajny prostoliniowy. Równania przedstawiające pokonaną przez nie drogę możemy zapisać:

$$S_1 (t) = v_1 t$$
$$S_2 (t) = v_2 t$$

lub też (uwzględniając fakt, że poruszają się w kierunkach prostopadłych) w układzie współrzędnych kartezjańskich:

$$x_1 (t) = v_1 t$$
$$y_2 (t) = v_2 t$$

Ich położenie po upływie 1/3 h wynosić więc będzie:

$$x_1 = 30/3 \text{ km} = 10 \text{ km}$$
$$y_2 = 40/3 \text{ km}$$

Wzajemną odległość obliczymy z twierdzenia Pitagorasa:

$$D^2 = x^2 + y^2$$

Po podstawieniu otrzymamy D = 50/3 km.

Wróćmy teraz do zagadnienia wzajemnej prędkości. Ponieważ ruch odbywa się z tego samego punktu w kierunkach wzajemnie prostopadłych, do obliczenia względnej prędkości również zastosujemy twierdzenie Pitagorasa:

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2,$$

skąd v = 50 km/h.

Zauważmy, że wynik D = 50/3 km otrzymujemy też, podstawiając do wzoru D = vt otrzymaną wartość wzajemnej prędkości i czas t =1/3 h.

Zad. 2 Samochód rusza z miejsca w momencie zmiany świateł na zielone z przyspieszeniem $a = 2$ m/s$^2$. Ciężarówka poruszająca się ze stałą prędkością $\upsilon = 20$ m/s w tym samym kierunku wyprzedza samochód w momencie, gdy ten rusza. Po jakim czasie t samochód dogoni ciężarówkę? W jakiej odległości s od przejścia ze światłami to nastąpi? Jaką prędkość $\upsilon_1$ ma samochód w tym momencie?

Rozwiązanie
Ruch samochodu to ruch jednostajnie przyspieszony (z prędkością początkową równą zeru), ruch ciężarówki – jednostajny.
Zatem równania opisujące położenie obu ciał:

$$x_1(t) = at^2 /2$$
$$x_2(t) = vt$$

Czas spotkania t obliczymy z warunku $x_1 = x_2$ (formalnie są tu dwa rozwiązania, ale t = 0 odpowiada mijaniu w chwili początkowej): $t = 2v/a = 20$ s.
Odległość s od miejsca rozpoczęcia ruchu obliczymy podstawiając t = 20 s do któregokolwiek z równań określających położenie; otrzymujemy s = 400 m.
Prędkość samochodu w tym momencie obliczamy ze wzoru (prędkość w ruchu jednostajnie przyspieszonym):

$v_1(t) = at = 40$ m/s.

<u>Zad. 3</u> Ciało porusza się ze stałym przyspieszeniem. Jego prędkość w chwili $t_1 = 5$ s jest równa $\upsilon_1 = 3$ m/s, a w chwili $t_2 = 6$ s jest równa zeru. Oblicz prędkość $\upsilon_0$ ciała w chwili t = 0 i drogę s, przebytą przez ciało w czasie od t = 0 do $t = t_2$.

<u>Rozwiązanie</u>
Jak można się zorientować na podstawie podanych wartości prędkości, ciało zatrzymuje się w chwili $t_2$, a więc do tego momentu ruch musiał być jednostajnie **opóźniony**.
Z warunku $v(t) = v_0 + at$, po podstawieniu danych dla obu momentów i rozwiązaniu prostego układu równań określamy $a = -3$ m/s$^2$ i $v_0 = 18$ m/s.
Ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie opóźnionym otrzymamy S = 54 m.

<u>Zad. 4</u> Ciało poruszające się ruchem jednostajnie przyspieszonym, w czwartej sekundzie od początku ruchu przebywa drogę równą s = 35 m. Z jakim przyspieszeniem porusza się ciało? Wyznaczyć prędkość ciała w końcu czwartej i dziesiątej sekundy ruchu. Jaką drogę przebywa ciało w czasie jednej i pięciu sekund? Jaką drogę przebędzie ciało w ciągu drugiej i trzeciej sekundy?

<u>Rozwiązanie</u>
Zwróćmy uwagę na różnicę między stwierdzeniami „w czwartej sekundzie" i „w ciągu czterech sekund". Oczywiście w czwartej sekundzie oznacza pomiędzy $t_3 = 3$ s i $t_4 = 4$ s. Dlatego też droga pokonana **w czwartej** sekundzie $\Delta s_4$ to różnica dróg pokonanych w ciągu czterech i w ciągu trzech sekund (w ruchu przyspieszonym z $v_0 = 0$):

$35\text{ m} = \Delta s_4 = s_4 - s_3 = a(4)^2 / 2 - a(3)^2/2$,

skąd $a = 10$ m/s$^2$.

Teraz już łatwo odpowiemy na pozostałe pytania:

$v_4 = a\cdot 4\text{ s} = 40$ m/s
$v_{10} = a\cdot 10\text{ s} = 100$ m/s

$s_1 = 10\cdot 1^2/2 = 5$ m
$s_5 = 10\cdot 5^2/2 = 125$ m

$\Delta s_2 = s_2 - s_1 = 10\cdot 2^2/2 - 5 = 20 - 5 = 15$ m
$\Delta s_3 = s_3 - s_2 = 10\cdot 3^2/2 - 20 = 45 - 20 = 25$ m

I jeszcze dwie uwagi warte odnotowania:

1) Przyspieszenie 10 m/s$^2$ oznacza, że rozważany tu ruch jest w zasadzie taki sam jak spadek swobodny (przy zaokrągleniu *g* do 10 m/s$^2$); warto zwrócić uwagę, jak szybko rośnie pokonywana droga (wysokość spadania).
2) Gdy porównamy **odcinki** drogi pokonywane w **jednakowych** przedziałach czasu, np. sekundach (5 m, 15 m, 25 m itd.) natrafiamy na regułę, która określa, że mają się one do siebie jak kolejne liczby nieparzyste, tj. pozostają w proporcji 1:3:5 itd. Zwróćmy

uwagę, że reguła obowiązuje dalej i potwierdza się to dla **czwartej** i **piątej** sekundy, tj. $\Delta s_4 = 7 \cdot \Delta s_1 = 35$ m, $\Delta s_5 = 9 \cdot \Delta s_1 = 45$ m.

Tak więc znając powyższą regułę (obowiązuje ona tylko dla ruchu jednostajnie przyspieszonego!)[1] moglibyśmy rozpocząć rozwiązanie zadania, określając drogę przebytą w pierwszej sekundzie:

$35$ m $= \Delta s_4 = 7 \cdot s_1$ (gdyż $\Delta s_1 = s_1$), skąd natychmiast $s_1 = 5$ m i dużo łatwiej (i szybciej!) określilibyśmy przyspieszenie w tym ruchu.

Zad. 5 Ciało zostało wyrzucone pionowo w górę z prędkością początkową $\upsilon_0 = 30$ m/s. Na jaką wysokość wzniesie się ono po czasie $t_1 = 4$ s? Jaka będzie jego prędkość w tym momencie? Jaką maksymalną wysokość osiągnie? Po jakim czasie $t_2$ powróci na ziemię? Z jaką prędkością uderzy o ziemię? Dla uproszczenia przyjąć wartość przyspieszenia ziemskiego $g = 10$ m/s$^2$.

Rozwiązanie

Rozważamy ruch swobodny (bez oporu powietrza), w I części będzie on jednostajnie opóźniony (wznoszenie do chwili zatrzymania na wysokości $h$), w II – jednostajnie przyspieszony (spadek swobodny z wysokości $h$).
Cały czas ciało podlega działaniu tylko siły grawitacji, a więc przyspieszenia $g$.
Podana przybliżona wartość tego przyspieszenia informuje nas, o ile m/s (w tym przypadku 10) w każdej sekundzie maleje (lub rośnie) wartość prędkości.
Z tego punktu widzenia jest w zasadzie oczywiste, że ruch w górę potrwa 3 s (możemy to też policzyć wg wzoru $t = \upsilon_0 / g$).
Do obliczenia maksymalnej wysokości możemy wykorzystać wzór na drogę w ruchu jednostajnie opóźnionym (podstawiając $\upsilon_0 = 30$ m/s i czas $t = 3$ s):

$S = \upsilon_0 t - g t^2/2 = 30 \cdot 3 - 45 = 45$ m.

Oczywiście ten sam wynik da nam skorzystanie ze wzoru

$h = g t^2/2$,

który określa, z jakiej wysokości $h$ spada swobodnie ciało w czasie t (jest to bowiem wzór na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym z $\upsilon_0 = 0$).
Fakt, że tu też podstawiamy $t = 3$ s wynika z symetrii zjawiska: przy założeniu braku oporu powietrza ruch odbywa się w podobny sposób w górę i w dół – prędkość maleje, jak i później rośnie, w tym samym tempie (10 m/s na sekundę), gdy więc do pokonania jest konkretna wysokość $h$, przy rzucie pionowo w górę ruch do góry i potem spadek na dół zawsze potrwa tyle samo. Co więcej, końcowa prędkość będzie równa początkowej! Wynika to zarówno z kinematyki ($\upsilon_k = g \cdot t = 30$ m/s), jak i z najzwyczajniej spełnionej zasady zachowania energii – co prawda początkowa kinetyczna zamienia się w ruchu w górę całkowicie w potencjalną (stąd zresztą jeszcze jeden, może najłatwiejszy sposób określenia wysokości $h$ maksymalnego wzniesienia: $m\upsilon^2/2 = mgh$), ale później (ta sama) potencjalna jest źródłem kinetycznej, która przy zakończeniu ruchu (swobodnego!) musi powrócić do wartości początkowej. Tak więc ciało uderzy w ziemię z prędkością 30 m/s.

I ostatni problem: jak określić wysokość (i prędkość) np. po 4 sekundach, a w ogólnym podejściu – w dowolnym momencie trwania ruchu?

[1] Ewentualnie możemy ją też zastosować w *odwrotnym* porządku do ruchu jednostajnie opóźnionego, tj. np. dla trzech kolejnych tych samych przedziałów czasu, np. sekund, przebyte odcinki drogi będą w stosunku 5:3:1.

Zauważmy, że gdy równanie $\upsilon_0 t - gt^2/2$ traktujemy nie tylko jako opisujące drogę w ruchu jednostajnie opóźnionym, ale po prostu *współrzędną y* (czyli wysokość!) w czasie, otrzymujemy poprawny opis tej współrzędnej dla całego czasu trwania ruchu (możesz sprawdzić dla t = 3 s oraz t = 6 s), zatem $y$ ($t_1$ = 4 s) = 30·4 – 80 = 40 m.

Podobnie jest z prędkością,

$\upsilon = \upsilon_0 - gt$

to ogólny „przepis"[2] na określenie prędkości ciała w dowolnym momencie trwania ruchu (sprawdź podstawiając j.w.); zatem υ ($t_1$ = 4 s) = 30 – 40 = -10 m/s.
Oczywiście znak „-„ określa zwrot prędkości jako przeciwny do początkowego (a więc tym razem już w dół, w stronę ziemi).

Zad. 6 Cząstka porusza się wzdłuż osi x w taki sposób, że jej położenie jako funkcję czasu opisuje formuła $x(t) = 3 - 4t^2$ [m]. Obliczyć prędkość i przyspieszenie tej cząstki w chwilach t = 3 s oraz t = 5 s.

Rozwiązanie
W toku przyswajania fizyki będziemy niekiedy upraszczać podejście do zagadnienia poprzez odwołanie do czysto matematycznego opisu. Jest to bardzo pomocne, gdy udaje nam się (jak np. w poprzednim rozwiązaniu zadania, w szczególności patrz przypis) wyrazić położenie jako funkcję czasu – w tym zadaniu tę część problemu mamy niejako „z głowy" – gotowy „przepis" jest bowiem podany.
Wystarczy teraz już tylko pamiętać, że pochodna położenia (względem czasu) to prędkość, zaś pochodna prędkości określa przyspieszenie, no i naturalnie korzystać z matematycznych reguł obliczania pochodnych funkcji!

W tym przypadku
$v(t) = -8t$, pochodna stałej „3" wynosi 0, pochodna „$-4t^2$" obliczona jest tak jak pochodna funkcji kwadratowej, wg wzoru: $(ax^2)' = 2ax$

oraz
$a(t) = -8$, bo pochodna funkcji liniowej $(ax+b)' = a$

Zatem przyspieszenie w czasie całego ruchu jest stałe i wynosi -8 [m/s$^2$].
Z pierwszego zaś wzoru określamy prędkość w podanych momentach (t=3 i t=5):
-24 i -40 [m/s].

Zad. 7 Ciało zostało wyrzucone pod kątem α do poziomu z prędkością początkową $\upsilon_0$ z punktu o współrzędnych (x0, y0). Znaleźć równanie toru y = y(x). Znaleźć $y_{max}$ - największą wysokość, na jaką wzniosło się ciało i $x_{max}$ - zasięg rzutu.

Rozwiązanie
Równanie toru określa zależność y(x). Równanie to otrzymamy, dysponując zależnościami od czasu poszczególnych współrzędnych: x(t) i y(t).
Zauważmy, że rozważany w zadaniu rzut ukośny jest złożeniem dwóch ruchów: odbywającego się w kierunku poziomym ruchu jednostajnego (z prędkością $\upsilon_0$cosα,

---

[2] Zwróć uwagę, że mając poprawne równanie położenia od czasu, możesz skorzystać z obliczenia pochodnej, aby uzyskać wzór na prędkość; podobnie pochodna prędkości określa przyspieszenie – i faktycznie, w tym przypadku wynosi ono –*g* dla całego ruchu!

będącą rzutem nadanej początkowo prędkości na kierunek poziomy) oraz rzutu do góry (z prędkością początkową $\upsilon_0 \sin\alpha$), który z kolei ma dwie fazy – wznoszenie (ruch jednostajnie opóźniony) oraz spadanie (spadek swobodny) z wysokości maksymalnego wzniesienia $y_{max}$. Druga część ruchu jest też odpowiednikiem rzutu poziomego z wysokości $y_{max}$ i z prędkością początkową $\upsilon_0 \cos\alpha$.
Podkreślmy raz jeszcze, że w tym ogólnym podejściu zaniedbujemy wszelkie opory powietrza – ruch odbywa się tylko i wyłącznie pod wpływem pola grawitacyjnego Ziemi (tu też oczywiście rozważanego w wersji uproszczonej, jako pole jednorodne – działa więc na ciało w czasie trwania całego ruchu tylko jedna, jedyna siła – jego ciężar *mg* prostopadle w dół).

Zapiszmy więc równania ruchu dla składowych:

$x(t) = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t$ (ruch jednostajny prostoliniowy)
$y(t) = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - gt^2/2$ (ruch jednostajnie zmienny, początkowo opóźniony)

Do uzyskania równania toru wystarczy bardzo proste przekształcenie: wyznaczenie czasu t z pierwszego równania i podstawienie do drugiego, otrzymamy:

$$y(x) = (\sin\alpha/\cos\alpha)\cdot x - [g/2(\upsilon_0 \cos\alpha)^2]\cdot x^2$$

Z matematycznego punktu widzenia jest to równanie paraboli (z ramionami skierowanymi w dół, gdyż przy kwadratowym składniku jest znak minus) i oczywiście taki wniosek jest jak najbardziej słuszny.

Dość łatwo określić można miejsca zerowe tej paraboli – jedno wypada dla $x=0$ i jest to oczywiście miejsce wyrzucenia ciała. Określenie drugiego wymaga porównania wyrażeń przy x i $x^2$:

$$(\sin\alpha/\cos\alpha) = [g/2(\upsilon_0 \cos\alpha)^2]\cdot x,$$

Skąd $x = 2[(\upsilon_0)^2/g] \sin\alpha \cos\alpha = [(\upsilon_0)^2/g] \sin 2\alpha$.
Otrzymane wyrażenie określa oczywiście wielkość $x_{max}$, tj. zasięg rzutu.
Jak widać, zależy on od nadanej prędkości początkowej i kąta, przy czym łatwo sprawdzić, dla jakiego kąta (przy zadanej prędkości początkowej) zasięg będzie największy; wówczas bowiem funkcja sinus przyjmie swą największą możliwą wartość, tj. 1, a będzie to dla kąta $2\alpha = 90°$, czyli $\alpha = 45°$.

Zgodnie z poleceniem, powinniśmy jeszcze podać wartość maksymalnego wzniesienia, tj. $y_{max}$.
Chyba najłatwiej skorzystać tu z zasady zachowania energii, choć z całej energii kinetycznej posiadanej przez ciało warto będzie wyodrębnić tę część, która wiąże się z ruchem do góry i która zamieni się w energię potencjalną. Przypomnijmy bowiem, że nie zmienia się prędkość pozioma ciała $\upsilon_0 \cos\alpha$, zatem część energii kinetycznej równa $m(\upsilon_0 \cos\alpha)^2/2$ pozostawać będzie niezmieniona w czasie całego ruchu.
Natomiast możemy przyrównać początkową energię kinetyczną „w kierunku pionowym" do energii potencjalnej w chwili maksymalnego wzniesienia:

$$m(\upsilon_0 \sin\alpha)^2/2 = mg\, y_{max},$$

skąd $y_{max} = (\upsilon_0 \sin\alpha)^2/2g$.

Zauważmy przy okazji, że przy zwiększaniu kąta wyrzutu od 0 do 90° będzie rosnąć $\sin\alpha$, aż do wartości 1. Dla 90° otrzymujemy wzór identyczny jak w rzucie pionowym do góry, gdzie cała energia kinetyczna zamienia się w potencjalną:

$m(\upsilon_0)^2/2 = mg\, h_{max}$,

skąd $h_{max} = (\upsilon_0)^2/2g$.

<u>Zad. 8</u> Równania ruchu dwóch ciał obserwowanych z pewnego układu współrzędnych wyglądają następująco: $\mathbf{r_1}(t) = (t^2 + 3, t^2 + t + 2, t)$, $\mathbf{r_2}(t) = (t + 1, 2t, 1)$.
Znaleźć prędkość $\mathbf{v_{21}}$ punktu drugiego względem pierwszego oraz przyspieszenie $\mathbf{a_{21}}$ punktu drugiego względem pierwszego.

<u>Rozwiązanie</u>
Postać równań ruchu, którą tu spotykamy, jest notacją wektorową.
Dla każdego ciała określa, jak zmienia się jego położenie w czasie w trzech wymiarach, tj. dla pierwszego:

$x(t) = t^2 + 3,\ y(t) = t^2 + t + 2,\ z(t) = t;$

z kolei dla drugiego:

$x(t) = t + 1,\ y(t) = 2t,\ z(t) = 1.$

Określenie prędkości i przyspieszenia dla każdego z nich wymaga obliczenia pochodnych każdego z wyrażeń względem czasu t.
Otrzymamy (zapis w notacji wektorowej):

$\mathbf{v_1(t)} = (2t, 2t + 1, 1)$

$\mathbf{v_2(t)} = (1, 2, 0)$

oraz $\mathbf{a_1(t)} = (2, 2, 0)$

$\mathbf{a_2(t)} = (0, 0, 0).$

Określenie prędkości i przyspieszenia względnego polega już tylko na *odjęciu* od siebie poszczególnych składowych, bowiem:

$\mathbf{v_{21}} = \mathbf{v_2} - \mathbf{v_1} = (1\text{-}2t, -2t+1, -1)$

oraz $\mathbf{a_{21}} = \mathbf{a_2} - \mathbf{a_1} = (-2, -2, 0).$

Zauważmy że wynikowa wartość względnego przyspieszenia $\mathbf{a_{21}}$ może też być obliczona jako pochodna względnej prędkości $\mathbf{v_{21}}$.