

Jacek Jurkowski

**Elementy geometrii różniczkowej
z prostymi zastosowaniami**

Toruń, 2017

Spis treści

Rozdział 1. Krzywe na płaszczyźnie i w przestrzeni	5
1.1. Sposoby opisu krzywych	5
1.2. Wektor styczny i normalny do krzywej	7
1.3. Długość łuku krzywej	9
1.4. Krzywizna krzywej płaskiej	11
1.5. Krzywe w przestrzeni	13
1.6. Łuki i rozmaitości wymiaru 1	18
Rozdział 2. Powierzchnie w przestrzeni trójwymiarowej	21
2.1. Równania powierzchni	21
Równanie parametryczne	21
Równanie algebraiczne	23
2.2. Płaszczyzna styczna do powierzchni	24
2.3. Odwzorowania powierzchni	28
2.4. Tensor metryczny	28
2.5. Składowe kontrawariantne i kowariantne	30
2.6. Równanie geodezyjnej	32
2.7. Idea krzywizny Gaussa	35
2.8. Własności przekształcenia sferycznego	36
2.9. Krzywizna normalna, Gaussa i krzywizny główne	39
2.10. Współczynniki koneksji metrycznej. Równania strukturalne	42
2.11. Przesunięcie równoległe i pochodna kowariantna	43
2.11.1. Częstkowa pochodna kowariantna	45
2.11.2. Przesunięcie równoległe	46
2.12. Dewiacja geodezyjna i tensor krzywizny	48
2.13. Podstawy ogólnej teorii względności i równanie pola grawitacyjnego	51
2.13.1. Zasady równoważności	51
2.13.2. Zjawiska pływowe w teorii Newtona	52
2.13.3. Równanie pola grawitacyjnego	53
Rozdział 3. Powierzchnie wielowymiarowe	57
3.1. Tensory i iloczyn tensorowy	57
3.1.1. Algebra tensorów	57
3.1.2. Iloczyn tensorowy przestrzeni wektorowych	59
3.1.3. Prawo transformacyjne tensorów	61
3.2. Rozmaitości różniczkowe	62
3.3. Pola tensorowe i formy różniczkowe	63
3.4. Wiązka styczna i kostyczna	63
Bibliografia	65

Rozdział 1

Krzywe na płaszczyźnie i w przestrzeni

1.1. Sposoby opisu krzywych

- (1) jako wykres funkcji $y = f(x)$ lub $x = f(y)$, np. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $x = y^2 - y$, itp.
(2) poprzez równanie uwikłane $f(x, y) = 0$, w szczególności przez *równanie algebraiczne*, tzn. $W(x, y) = 0$, gdzie W jest wielomianem, np.

- elipsa: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,
- liść Kartezjusza: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$,
- cisoida Dioklesa: $x(x^2 + y^2) = 2ay^2$,
- dwa ostrza: $(x^2 - a^2)(x - a)^2 + (y^2 - a^2)^2 = 0$,
- astroida: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Krzywe algebraiczne stopnia 2 są sklasyfikowane i mogą być jedną z krzywych: parabola, elipsa, hiperbola, pęk prostych. Wiele z krzywych algebraicznych powstaje jako zbiór punktów o określonych własnościach geometrycznych, np.

- parabola jest zbiorem punktów równoodległych od zadanego punktu na płaszczyźnie (ognisko) oraz od zadanej prostej nieprzechodzącej przez ten punkt (kierownica),
 - elipsa jest zbiorem punktów na płaszczyźnie, których suma odległości od dwóch ustalonych punktów (ognisk) jest równa podwojonej odległości pomiędzy nimi,
 - astroida jest krzywą jaką zakreśla ustalony punkt mniejszego okręgu toczącego się po obwodzie większego okręgu po jego wewnętrznej stronie.
- (3) poprzez równanie w zmiennych biegunowych $r = f(\varphi)$, np.
— spirale (gdy f jest monotoniczną funkcją φ), np. $r = a\varphi^p$, $r = ae^{-\varphi}$,
— liście: $r = a \sin(p\varphi)$.
- (4) poprzez równania parametryczne:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in I, \end{cases}$$

gdzie I jest pewnym przedziałem zmienności parametru t . Opis parametryczny krzywej jest niejednoznaczny, tzn. krzywa ma więcej niż jedną parametryzację, np.

- elipsa

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi], \end{cases} \quad \begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = b \sin \omega t, \quad t \in [0, 2\pi/\omega], \end{cases}$$

- cisoida Dioklesa:

$$\begin{cases} x = \frac{2at^2}{1+t^2} \\ y = \frac{2at^3}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

— liść Kartezjusza:

$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

— astroida:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Opisy krzywych są równoważne w otoczeniach punktów nieosobliwych (regularnych). Równoważność ta jest lokalna z uwagi na twierdzenie o funkcjach uwikłanych, które opisują np. krzywe algebraiczne

Tw. 1.1 (o funkcji uwikłanej). *Niech (x_0, y_0) będzie punktem takim, że $f(x_0, y_0) = 0$. Jeśli funkcja $f(x, y)$ ma ciągle pochodne cząstkowe w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) oraz jeśli $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$, wówczas*

- i) istnieje jednoznaczna gałąź funkcji uwikłanej $y = h(x)$ określona w dostatecznie małym otoczeniu x_0 , spełniająca tam równanie $f(x, h(x)) = 0$;
- ii) funkcja h jest ciągła w ww. otoczeniu x_0 i posiada tam ciągłą pochodną daną wzorem

$$y'(x) = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}.$$

Punkty osobliwe wymagają szczegółowych badań. Wśród najczęściej spotykanych można wymienić

— węzły: np. punkt $(0, 0)$ liścia Kartezjusza. Zauważmy, że dla $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$

$$\partial_x f(0, 0) = \partial_y f(0, 0) = 0,$$

— ostrza (punkt zwrotu): np. punkty $(0, \pm a)$, $(\pm a, 0)$ astroidy. Zauważmy, że w tym przypadku $f(x, y) = x^{2/3} + y^{2/3} - a^{2/3}$ oraz

$$\partial_x f = \frac{2}{3}x^{-1/3}, \quad \partial_y f = \frac{2}{3}y^{-1/3}$$

i w punktach osobliwych pochodne te albo znikają albo są nieokreślone.

DEF. 1.1. Krzywą klasy C^k na płaszczyźnie nazywamy zbiór punktów $\{\gamma(t) \in \mathbb{R}^2 : t \in I\}$, dla którego istnieje parametryzacja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ klasy C^k przyjmująca w danym układzie odniesienia postać

$$\gamma(t) = [x(t), y(t)] = [\gamma_1(t), \gamma_2(t)].$$

Parametryzację $\gamma(t)$ nazywamy *regularną*, jeśli $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ dla każdego $t \in I$.

Przypadek $k = 0$ odpowiada krzywej ciągłej. Dla $k > 0$ opis parametryczny krzywej jest różniczkowalny. Na ogół będziemy zajmować się *krzywymi gładkimi*, tzn. klasy C^∞ .

DEF. 1.2. Równaniem (algebraicznym, uwikłanym) krzywej (hodografem krzywej) $\gamma(t)$ nazywać będziemy równanie $f(x, y) = 0$, jakie spełnia krzywa po wyrugowaniu parametru t z równań $x = \gamma_1(t)$ oraz $y = \gamma_2(t)$, $t \in I$.

Niech np. γ_1 będzie odwracalne, wówczas $t = \gamma_1^{-1}(x)$ i w konsekwencji $y = \gamma_2(\gamma_1^{-1}(x))$. Zatem $f(x, y) = (\gamma_2 \circ \gamma_1^{-1})(x) - y$.

Jeśli $\gamma(t)$ określa zależność położenia od czasu, to równanie krzywej określa tor tego ruchu.

PRZYKŁAD 1.1. Wyznaczyć równania algebraiczne następujących krzywych:

$$\begin{cases} x = a \cosh t \\ y = b \cosh t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \mapsto \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\gamma(t) = [3 \sin^2 t, 5 \cos^2 t], \quad t \in [0, \pi/2] \mapsto y = 5 - \frac{5}{3}x, \quad x \in [0, 3].$$

$$\gamma(t) = \left[\frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}, \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} \right], \quad t \geq 0 \mapsto x^2 + y^2 = 1, \quad x, y \geq 0.$$

1.2. Wektor styczny i normalny do krzywej

DEF. 1.3. Jeśli krzywa jest klasy co najmniej C^1 , to wektor $\dot{\gamma}(t_0) = [\dot{\gamma}_1(t_0), \dot{\gamma}_2(t_0)]$, $t_0 \in I$, nazywamy *wektorem stycznym* do krzywej w punkcie $p = \gamma(t_0)$.

Jednostkowym wektorem stycznym jest wektor

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} \quad (1.1)$$

Jednostkowym *wektorem normalnym* \mathbf{N} nazywamy unormowany wektor prostopadły do wektora stycznego, taki aby wraz z nim tworzył dodatnio zorientowaną bazę (reper Freneta), tj. $\det[\mathbf{T}, \mathbf{N}] > 0$.

Długość i zwrot wektora stycznego zależą od wyboru parametryzacji, ale jego kierunek jest ustalony przez prostą styczną do krzywej w danym punkcie. Jeśli krzywa jest zorientowana, to także zwrot wektora stycznego nie zależy od parametryzacji.

Równanie parametryczne prostej stycznej w punkcie $\gamma(t_0)$ ma postać

$$r(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda \dot{\gamma}(t_0) = [\gamma_1(t_0) + \lambda \dot{\gamma}_1(t_0), \gamma_2(t_0) + \lambda \dot{\gamma}_2(t_0)], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

W szczególności jej współczynnik kierunkowy określony jest jako

$$\frac{\dot{\gamma}_2(t_0)}{\dot{\gamma}_1(t_0)} = \frac{y - \gamma_2(t_0)}{x - \gamma_1(t_0)}.$$

PRZYKŁAD 1.2. Niech $\gamma(t) = [\sin t, \sin 2t]$, $t \in [0, 2\pi]$. Zauważmy, że krzywa wielokrotnie przechodzi przez punkt $[0, 0] = \gamma(0) = \gamma(\pi) = \gamma(2\pi)$. Jednak $\dot{\gamma}(0) = [1, 2]$, a $\dot{\gamma}(\pi) = [-1, 2]$.

PRZYKŁAD 1.3. Wektor styczny do krzywej

$$\gamma(t) = [e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t], \quad t \in \mathbb{R}$$

jest postaci

$$\dot{\gamma}(t) = [-e^{-t}(\cos t + \sin t), e^{-t}(\cos t - \sin t)],$$

jego długość $|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{2}e^{-t}$, zaś jednostkowy wektor styczny

$$\mathbf{T}(t) = \left[-\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right), \sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) \right].$$

Wektorem normalnym do krzywej $\gamma(t)$ jest

$$\mathbf{N}(t) = \frac{[-\dot{\gamma}_2(t), \dot{\gamma}_1(t)]}{|\dot{\gamma}(t)|}. \quad (1.2)$$

Jeśli krzywa określona jest równaniem uwikłanym $f(x, y) = 0$, to

$$0 = df(x, y) = \partial_x f dx + \partial_y f dy \quad (1.3)$$

i w konsekwencji (co wynika także z tw. o funkcji uwikłanej)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}. \quad (1.4)$$

Powyższy wzór określa bezpośrednio współczynnik kierunkowy prostej stycznej do krzywej $f(x, y) = 0$. Dodatkowo z (1.3) wynika, że

$$\partial_x f \dot{x} + \partial_y f \dot{y} = 0, \quad (1.5)$$

co oznacza, że wektor gradientu $\nabla f = [\partial_x f, \partial_y f]$ jest prostopadły do wektora stycznego. Unormowany wektor gradientu będzie zatem wektorem normalnym do krzywej,

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{[\partial_x f, \partial_y f]}{|\nabla f|},$$

podczas gdy

$$\mathbf{T} = \frac{[\partial_y f, -\partial_x f]}{|\nabla f|}$$

będzie wektorem stycznym, który wraz z wektorem \mathbf{N} tworzy reper Freneta ($\det[\mathbf{T}, \mathbf{N}]$).

Pamiętając, że współczynnik kierunkowy prostej stycznej dany jest jako (1.4)

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}$$

a współczynnik kierunkowy prostej normalnej spełnia

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{dx}{dy} = \frac{\partial_y f}{\partial_x f}$$

otrzymamy

Tw. 1.2 (prosta styczna i normalna).

(1) Prosta styczna w punkcie (x_0, y_0) do krzywej określonej funkcją uwikłaną $f(x, y) = 0$ ma równanie

$$\partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

(2) Prosta normalna w punkcie (x_0, y_0) do krzywej określonej funkcją uwikłaną $f(x, y) = 0$ ma równanie

$$\partial_y f(x_0, y_0)(x - x_0) - \partial_x f(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Podobne twierdzenie dla krzywej zadanej parametrycznie jest następujące:

Tw. 1.3 (prosta styczna i normalna).

(1) Prosta styczna w punkcie (x_0, y_0) do krzywej $\gamma(t) = [\gamma_1(t), \gamma_2(t)]$ ma równanie

$$\frac{\dot{\gamma}_2(t_0)}{\dot{\gamma}_1(t_0)} = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

gdzie $(x_0, y_0) = [\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)]$ oraz

(2) Prosta normalna w punkcie (x_0, y_0) do krzywej $\gamma(t) = [\gamma_1(t), \gamma_2(t)]$ ma równanie

$$\dot{\gamma}_2(t_0)(y - y_0) + \dot{\gamma}_1(t_0)(x - x_0) = 0.$$

PRZYKŁAD 1.4. Równanie prostej stycznej i normalnej do liścia Kartezjusza $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$.

PRZYKŁAD 1.5. Równanie prostej stycznej i normalnej do krzywej

$$\gamma(t) = [at \cos t, at \sin t].$$

1.3. Długość łuku krzywej

DEF. 1.4. Długością l krzywej określonej parametryzacją $\gamma(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ nazywamy

$$l = \int_{\gamma} dl = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\gamma}_1(t)^2 + \dot{\gamma}_2(t)^2} dt.$$

Z twierdzenia o zamianach zmiennej w całce oznaczonej wynika, że długość krzywej nie zależy od parametryzacji.

Dla krzywej będącej wykresem funkcji $y = f(x)$ dla $x \in [a, b]$ mamy zatem

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

PRZYKŁAD 1.6. Długość łuku krzywej $y = a \cosh \frac{x}{a}$ od punktu $(0, a)$ do (x, y) wynosi $l = a \sinh \frac{x}{a}$.

Dla biegunowego opisu krzywej mamy

$$\gamma(t) = [\gamma_1(t), \gamma_2(t)] = [r(t) \cos \varphi(t), r(t) \sin \varphi(t)]$$

zatem

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= [\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi, \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi] \\ |\dot{\gamma}|^2 &= (\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi)^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Długość łuku wynosi

$$l = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} dt = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi,$$

gdzie $r' = \frac{dr}{d\varphi}$ oraz $\varphi_1 = \varphi(t_1)$, $\varphi_2 = \varphi(t_2)$.

PRZYKŁAD 1.7. Długość łuku spirali $r = a\varphi$ od punktu $(0, 0)$ do dowolnego innego (r, φ) ma postać

$$l = \frac{a}{2} \left[\varphi \sqrt{1 + \varphi^2} + \ln \left(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2} \right) \right].$$

DEF. 1.5. Parametryzację krzywej $\gamma : [s_1, s_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ nazywamy łukową, jeśli dla każdego s_1, s_2 długość łuku pomiędzy $\gamma(s_1)$ oraz $\gamma(s_2)$ wynosi $l = \Delta s = s_2 - s_1$.

Tw. 1.4. $\gamma(s)$ jest parametryzacją łukową wtedy i tylko wtedy, gdy $|\gamma'(s)| = 1$ dla każdego s .

Dowód: \Leftarrow oczywiste.

\Rightarrow Jeśli $\gamma(s)$ jest parametryzacją łukową, to dla każdego s, s_1

$$\int_{s_1}^s |\gamma'(s)| ds = s - s_1.$$

Obliczając pochodną po s mamy $|\gamma'(s)| = 1$ dla dowolnego s . □

Tw. 1.5. Każda krzywa regularna ma parametryzację łukową.

Dowód: Niech $\gamma(t) = [\gamma_1(t), \gamma_2(t)]$ będzie parametryzacją regularną, niech $t > t_1$. Określimy

$$s(t) = \int_{t_1}^t |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Ponieważ

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\gamma}(t)| > 0, \tag{1.6}$$

to $s(t)$ jest funkcją odwracalną (jako funkcja ściśle monotoniczna), zatem istnieje $t(s)$. Określimy $\tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s))$. Wówczas $\tilde{\gamma}$ jest parametryzacją łukową. Rzeczywiście

$$|\tilde{\gamma}'(s)| = \left| \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = \frac{\left| \frac{d\gamma}{dt} \right|}{\left| \frac{ds}{dt} \right|} = \frac{\left| \frac{d\gamma}{dt} \right|}{\left| \frac{d\gamma}{dt} \right|} = 1.$$

□

PRZYKŁAD 1.8. Reper Freneta dla elipsy $\gamma(t) = [a \cos t, b \sin t], t \in [0, 2\pi]$.

PRZYKŁAD 1.9. Parametryzacja łukowa dla okręgu $\gamma(t) = [R \cos \omega t, R \sin \omega t], t \in [0, 2\pi/\omega]$.

PRZYKŁAD 1.10. Parametryzacja łukowa ewolwenty okręgu

$$\gamma(t) = [a(\cos t + t \sin t), a(\sin t - t \cos t)]$$

ma postać

$$\gamma(s) = \left[a \left(\cos \sqrt{\frac{2s}{a}} + \sqrt{\frac{2s}{a}} \sin \sqrt{\frac{2s}{a}} \right), a \left(\sin \sqrt{\frac{2s}{a}} - \sqrt{\frac{2s}{a}} \cos \sqrt{\frac{2s}{a}} \right) \right].$$

1.4. Krzywizna krzywej płaskiej

Niech $\gamma(s)$ będzie parametryzacją łukową krzywej oraz $p = \gamma(s_0)$. Niech $\Delta_p\phi$ oznacza zmianę kąta wektora stycznego w punkcie p oraz w punkcie sąsiednim, tzn.

$$\Delta_p\phi = \angle(\gamma'(s_0), \gamma'(s_0 + \Delta s)).$$

DEF. 1.6 (Geometryczna definicja krzywizny). Krzywizną krzywej płaskiej w punkcie $p = \gamma(s_0)$ nazywamy

$$K(p) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta_p\phi}{\Delta s}.$$

Przyjmujemy, że krzywizna dla krzywej płaskiej jest dodatnia, gdy krzywa odchyła się lokalnie w lewo oraz ujemna, gdy odchyła się w prawo. Pokażemy, że krzywizna związana jest z długością wektora $\gamma''(s)$. Ponieważ $\gamma'(s) \cdot \gamma'(s) = 1$ dla każdego s , zatem po zróżniczkowaniu

$$\gamma''(s) \cdot \gamma'(s) = 0.$$

Wektory $\gamma''(s)$ oraz $\gamma'(s)$ są prostopadłe w parametryzacji łukowej. W konsekwencji $\gamma''(s)$ jest współliniowy z wektorem normalnym N . Współczynnik proporcjonalności to nic innego jak krzywizna!

Tw. 1.6. Jeśli $\gamma(s)$ jest parametryzacją łukową krzywej płaskiej klasy C^2 oraz $p = \gamma(s_0)$, to

$$\gamma''(s_0) = K(p)N(s_0),$$

gdzie $N(s_0)$ jest jednostkowym wektorem normalnym do krzywej γ w punkcie p określonym przez (1.2), takim że wraz z wektorem stycznym $T(s_0)$ w tym punkcie (1.1) tworzy on reper Freneta.

Dowód: Reper Freneta $\{T(s), N(s)\}$ w dowolnym punkcie tworzy bazę ortonormalną na płaszczyźnie zatem

$$T(s_0 + \Delta s) = (T(s_0 + \Delta s) \cdot T(s_0))T(s_0) + (T(s_0 + \Delta s) \cdot N(s_0))N(s_0),$$

gdzie

$$\begin{aligned} T(s_0 + \Delta s) \cdot T(s_0) &= \cos \Delta_p\phi, \\ T(s_0 + \Delta s) \cdot N(s_0) &= \cos(\pi/2 - \Delta_p\phi) = \sin \Delta_p\phi. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \gamma''(s_0) &= \frac{dT}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{T(s_0 + \Delta s) - T(s_0)}{\Delta s} \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta_p\phi - 1}{\Delta s} T(s_0) + \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta_p\phi}{\Delta s} N(s_0) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta_p\phi}{\Delta_p\phi} \frac{\Delta_p\phi}{\Delta s} N(s_0) \\ &= K(p)N(s_0), \end{aligned}$$

bowiem

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta_p\phi - 1}{\Delta s} = \lim_{\Delta_p\phi \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta_p\phi - 1}{\Delta_p\phi} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta_p\phi}{\Delta s} = 0.$$

□

Z powyższego twierdzenia wynika zatem, że w dowolnym punkcie krzywej regularnej $|K(p)| = |\gamma''(s)|$.

DEF. 1.7 (Wektor krzywizny). Wektor krzywizny w punkcie $p = \gamma(s)$ określamy jako

$$\mathbf{K}(p) = \gamma''(s) = K(p)\mathbf{N}(s). \quad (1.7)$$

PRZYKŁAD 1.11. Wyznaczyć krzywiznę okręgu o promieniu R sparametryzowanego łukowo jako

$$\gamma(s) = [R \cos(s/R), R \sin(s/R)], \quad s \in [0, 2\pi R].$$

Związek (1.7) obowiązuje jednakże tylko dla parametryzacji łukowej. Ogólnie w dowolnej parametryzacji $\gamma(t)$ mamy

$$\mathbf{K}(p) = \frac{d}{ds} \left(\frac{d}{ds} \gamma(s) \right) = \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \gamma(t) \right),$$

gdzie $p = \gamma(t)$ oraz na mocy (1.6)

$$\frac{dt}{ds} = |\dot{\gamma}(t)|^{-1}.$$

Zatem

$$\mathbf{K}(p) = \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} \right) = \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|^2} \left[\ddot{\gamma}(t) - \frac{\dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|^2} \dot{\gamma}(t) \right], \quad (1.8)$$

bowiem, pamiętając, że $|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t)}$, mamy

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} = -\frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|^2} \frac{d}{dt} |\dot{\gamma}(t)| + \frac{\ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} = -\frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|^2} \frac{\dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} + \frac{\ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}. \quad (1.9)$$

Zauważmy, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym w (1.8) jest składową wektora przyspieszenia $\ddot{\gamma}(t)$ prostopadłą do wektora prędkości $\dot{\gamma}(t)$. Jednocześnie, dzięki $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$, otrzymamy

$$\begin{aligned} |\mathbf{K}|^2 &= \frac{|\ddot{\gamma}|^2}{|\dot{\gamma}|^4} - \frac{(\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})^2}{|\dot{\gamma}|^6} = \frac{(\ddot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}) - (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})(\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})}{|\dot{\gamma}|^6} \\ &= \frac{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|^2}{|\dot{\gamma}|^6}. \end{aligned}$$

Relacja

$$|\mathbf{K}(p)| = \frac{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|^3}, \quad (1.10)$$

jest słuszna także dla krzywych w przestrzeni \mathbb{R}^3 , bowiem użyte relacje w żaden sposób nie korzystają z zerowania się trzeciej składowej wektora parametryzacji!

Dla krzywej płaskiej $\gamma(t) = [x(t), y(t)]$ krzywiznę (wraz z jej znakiem!) określa relacja

$$K = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \quad (1.11)$$

PRZYKŁAD 1.12. Wyznaczyć krzywiznę elipsy sparametryzowanej jako

$$\gamma(t) = [a \cos(t), b \sin(t)], \quad t \in [0, 2\pi].$$

PRZYKŁAD 1.13. Niech krzywa regularna będzie zadana w postaci równania algebraicznego (uwikłanego) $f(x, y) = 0$. Jej (jeden z wielu) uwikłany opis parametryczny określony jest przez układ równań (por. 1.5)

$$\begin{cases} \dot{x} = \partial_y f \\ \dot{y} = -\partial_x f \end{cases}$$

Aby wyznaczyć krzywiznę (1.11) zauważmy, że

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \partial_{xy}^2 f \dot{x} + \partial_{yy}^2 f \dot{y} \\ \ddot{y} &= -(\partial_{xx}^2 f \dot{x} + \partial_{xy}^2 f \dot{y}). \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$K = -\frac{(\partial_{xx}^2 f)(\partial_y f)^2 - 2(\partial_{xy}^2 f)(\partial_x f)(\partial_y f) + (\partial_{yy}^2 f)(\partial_x f)^2}{|\nabla f|^3}.$$

DEF. 1.8 (Promień krzywizny). Promieniem krzywizny w punkcie p krzywej nazywamy dodatnią liczbę

$$R(p) = \frac{1}{|K(p)|}.$$

Promień krzywizny jest promieniem tzw. okręgu krzywiznowego dla punktu $p = \gamma(t)$ na krzywej, którego środek określa wektor

$$\mathbf{r}_s(t) = \gamma(t) + \frac{1}{K(t)}\mathbf{N}(t).$$

PRZYKŁAD 1.14. Dla liścia Kartezjusza $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ wyznaczyć jego krzywiznę oraz środek krzywizny dla punktu $(3a/2, 3a/2)$.

Ponadto, zauważmy, że

Tw. 1.7 (Równania Freneta). Jeśli $\gamma(s)$ jest parametryzacją łukową krzywej płaskiej, to

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K \\ -K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Dowód: Pokazaliśmy, że $\mathbf{T}'(s) = K(p)\mathbf{N}(s)$. Wystarczy zatem pokazać, że $\mathbf{N}'(s) = -K(p)\mathbf{T}(s)$. W ogólności

$$\mathbf{N}' = \alpha_1 \mathbf{T} + \alpha_2 \mathbf{N},$$

gdzie $\alpha_1 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}'$ oraz $\alpha_2 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}'$. Ponieważ $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$, to $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}' = \alpha_2 = 0$. Dalej $\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = 0$, zatem

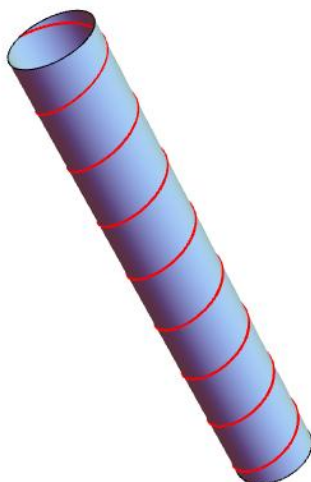
$$\mathbf{N}' \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T}' \cdot \mathbf{N} = 0$$

i w konsekwencji $\alpha_1 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}' = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{T}' = -KN \cdot \mathbf{N} = -K$. \square

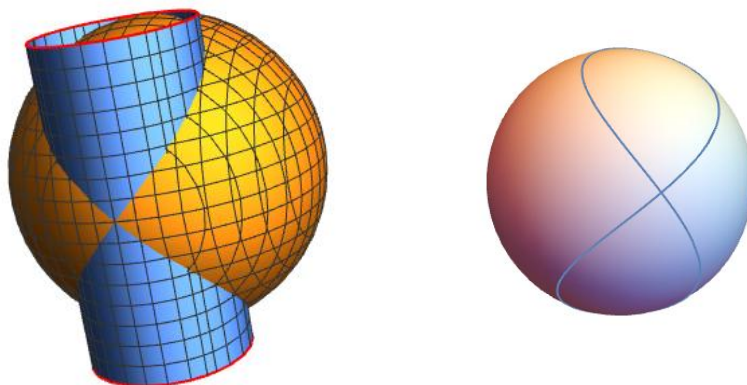
1.5. Krzywe w przestrzeni

Równanie parametryczne krzywej w przestrzeni \mathbb{R}^3 ma postać

$$\gamma(t) = [\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)], \quad t \in I.$$



Rysunek 1.1. Helisa na powierzchni walca



Rysunek 1.2. Krzywa Vivianiego (lemniskata sferyczna)

PRZYKŁAD 1.15. Równanie helisy o promieniu R i skoku $2\pi b$ ma postać

$$\gamma(t) = [R \cos t, R \sin t, bt], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Helisa ta leży na powierzchni walca $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2, z \in \mathbb{R}\}$.

PRZYKŁAD 1.16. Pokazać, że krzywa

$$\gamma(t) = [\cos^2 t, \sin t \cos t, \sin t], \quad t \in [0, 2\pi]$$

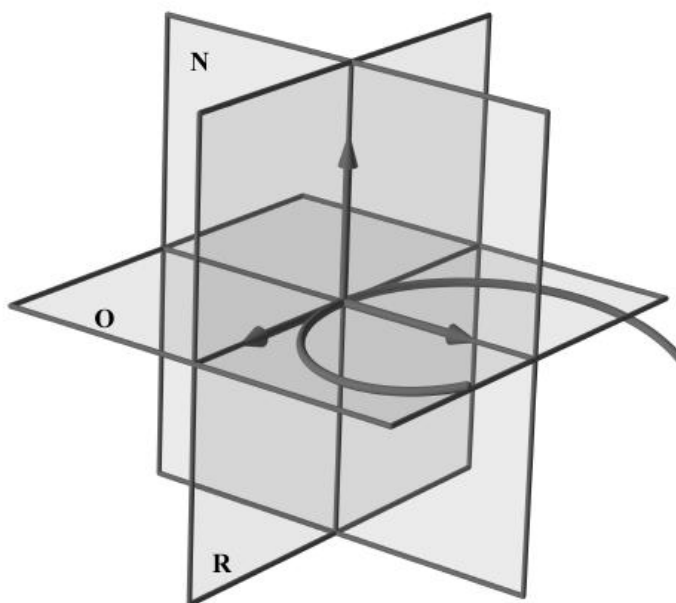
leży na powierzchni sfery

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Nazywana jest *krzywą Vivianiego* lub *lemniskatą sferyczną*. Wzdłuż tej krzywej przecinają się powierzchnia sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ oraz walca $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

PRZYKŁAD 1.17. Dana jest krzywa:

$$\gamma(t) = [e^t \cos t, e^t \sin t, e^t], \quad t \in [-\pi, \pi].$$



Rysunek 1.3. Reper (trójścian) Freneta wraz z charakterystycznymi płaszczyznami: ściśle styczną (osculating plane) (O), normalną (normal plane) (N), prostującą (rectifying plane) (R)

- (1) Wyznaczyć wektor styczny do krzywej w $t = 0$.
- (2) Obliczyć jej długość.
- (3) Wyznaczyć parametryzację łukową tej krzywej.

DEF. 1.9. *Reperem Freneta* krzywej w \mathbb{R}^3 o parametryzacji łukowej $\gamma(s)$ nazywamy układ wersorów $\{T, N, B\}$, gdzie

$$T(s) = \gamma'(s), \quad N(s) = \frac{T'(s)}{|T'(s)|}, \quad B(s) = T(s) \times N(s).$$

Wersory te nazywa się odpowiednio: stycznym, normalnym i binormalnym.

Krzywą, dla której reper Freneta stanowi w każdym punkcie bazę w \mathbb{R}^3 nazywamy *biregularną*.

Zauważmy, że

$$B' = T' \times N + T \times N' = T \times N'.$$

Zatem wektor B' jest prostopadły zarówno do B , jak i do T . Zatem musi być współliniowy z N .

Tw. 1.8. *Dla krzywej biregularnej w dowolnej parametryzacji $\gamma(t)$ wersory Freneta mają postać:*

$$T(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|},$$

$$B(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}, \tag{1.13}$$

$$N(t) = B(t) \times T(t) \tag{1.14}$$

$$= \frac{(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)) \times \dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)| |\dot{\gamma}(t)|} = \frac{|\dot{\gamma}(t)|}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|} \left[\ddot{\gamma}(t) - \frac{\dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|^2} \dot{\gamma}(t) \right]. \tag{1.15}$$

Dowód: Aby pokazać (1.14), zauważmy, że z definicji $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ oraz prostopadłości wektorów \mathbf{T} i \mathbf{N} wynika, że

$$\mathbf{B} \times \mathbf{T} = (\mathbf{T} \times \mathbf{N}) \times \mathbf{T} = -\mathbf{T} \times (\mathbf{T} \times \mathbf{N}) = -(\mathbf{N}(\mathbf{N} \cdot \mathbf{T}) - \mathbf{N}|\mathbf{T}|^2) = \mathbf{N}.$$

(1.15) wynika ze wzoru na podwójny iloczyn wektorowy

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Podkreślmy, że wzór (1.15) wynika także bezpośrednio z (1.7) oraz (1.8). \square

PRZYKŁAD 1.18. Reper Freneta dla helisy $\gamma(t) = [R \cos t, R \sin t, bt]$, $t \in \mathbb{R}$ ma postać

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \frac{[-R \sin t, R \cos t, b]}{\sqrt{R^2 + b^2}}, \\ \mathbf{N}(t) &= [-\cos t, -\sin t, 0], \\ \mathbf{B}(t) &= \frac{[b \sin t, -b \cos t, R]}{\sqrt{R^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Parametryzacja łukowa helisy jest postaci:

$$\gamma(s) = \left[R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{R^2 + b^2}} \right]. \quad (1.16)$$

Krzywizna helisy jest stała i wynosi

$$K(p) = |\gamma''(s)| = \frac{R}{R^2 + b^2}.$$

Równania Freneta (1.12) można uogólnić na przypadek krzywej w przestrzeni przyjmując w parametryzacji łukowej relację

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ -K & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Funkcja τ jest wówczas drugą wielkością charakteryzującą krzywiznę krzywej w \mathbb{R}^3 określoną jako współczynnik proporcjonalności w relacji $\mathbf{B}' = -\tau \mathbf{N}$.

DEF. 1.10. *Skręceniem* krzywej nazywamy funkcję $\tau(p) = -\mathbf{B}'(s) \cdot \mathbf{N}(s)$, gdzie $p = \gamma(s)$.

TW. 1.9. *Skręcenie* krzywej biregularnej dane jest w dowolnej parametryzacji jako

$$\tau(p) = \frac{(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)) \cdot \ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|^2}.$$

PRZYKŁAD 1.19. Skręcenie dla helisy jest stałe i wynosi

$$\tau(p) = \frac{b}{R^2 + b^2}.$$

Mamy następujące własności związane z funkcjami krzywizny $K(p)$ i $\tau(p)$:

FAKT 1. Skręcenie krzywej znika tożsamościowo wtedy i tylko wtedy, gdy krzywa jest płaska.

Rzeczywiście, jeśli $\tau \equiv 0$, to z (1.17) wynika, że $\mathbf{B}'(s) = 0$ i $\mathbf{B}(s) = \mathbf{B}_0$ jest stałym wektorem. Ponieważ $\mathbf{B}_0 = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \boldsymbol{\gamma}'(s) \times \boldsymbol{\gamma}''(s)/K$, to $\boldsymbol{\gamma}'(s) \perp \mathbf{B}_0$. Dalej

$$0 = \boldsymbol{\gamma}'(s) \cdot \mathbf{B}_0 = \frac{d}{ds}(\boldsymbol{\gamma}(s) \cdot \mathbf{B}_0).$$

Zatem $\boldsymbol{\gamma}(s) \cdot \mathbf{B}_0 = \text{const.} = \boldsymbol{\gamma}(s_0) \cdot \mathbf{B}_0$. W konsekwencji

$$(\boldsymbol{\gamma}(s) - \boldsymbol{\gamma}(s_0)) \cdot \mathbf{B}_0 = 0$$

i $\boldsymbol{\gamma}(s)$ leży w płaszczyźnie prostopadłej do \mathbf{B}_0 .

FAKT 2. Krzywizna znika tożsamościowo, wtedy i tylko wtedy, gdy krzywa jest (fragmentem) prostą.

Znikanie krzywizny oznacza, że $\boldsymbol{\gamma}''(s) = 0$, co oznacza, że $\boldsymbol{\gamma}'(s) = \mathbf{v}$ jest stałym wektorem i w konsekwencji

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = (s - s_0)\mathbf{v} + \boldsymbol{\gamma}(s_0).$$

Powyższa parametryzacja opisuje prostą (lub jej fragment).

FAKT 3. Jeśli skręcenie krzywej znika tożsamościowo i jej krzywizna K jest stała, to krzywa jest (fragmentem) okręgiem o promieniu $1/K$.

Zauważmy, że wektor $\mathbf{r}(s) = \boldsymbol{\gamma}(s) + \frac{1}{K(p)}\mathbf{N}(s)$ opisuje położenie środka krzywizny $\boldsymbol{\gamma}(s)$ w punkcie $p = \boldsymbol{\gamma}(s)$. Jeśli krzywizna jest stała, to

$$\mathbf{r}'(s) = \boldsymbol{\gamma}'(s) + \frac{1}{K}\mathbf{N}'(s) = \boldsymbol{\gamma}'(s) + \frac{1}{K}(-K\mathbf{T}) = \boldsymbol{\gamma}'(s) - \boldsymbol{\gamma}'(s) = 0.$$

Zatem $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0$ ma stałe położenie i jednocześnie $|\boldsymbol{\gamma}(s) - \mathbf{r}_0| = 1/K$. Zatem $\boldsymbol{\gamma}(s)$ jest okręgiem (lub jego fragmentem) o środku w \mathbf{r}_0 i promieniu $1/K$.

FAKT 4. Jeśli skręcenie i krzywizna krzywej są stałe, to krzywa jest (fragmentem) helisy.

Zauważmy najpierw, że dla helisy mamy stałą krzywiznę i skręcenie dane przez

$$K = \frac{R}{R^2 + b^2}, \quad \tau = \frac{b}{R^2 + b^2}.$$

Zatem przy zadanym K i τ parametry helisy są wyznaczone przez

$$b = \frac{\tau}{K^2 + \tau^2}, \quad R = \frac{K}{K^2 + \tau^2}.$$

Niech $\boldsymbol{\gamma}(s)$ będzie parametryzacją łukową krzywej o stałej krzywiznie K i skręceniu τ . Zauważmy, że na podstawie (1.17)

$$\frac{d}{ds}(\tau\mathbf{T} + K\mathbf{B}) = \tau K\mathbf{N} - K\tau\mathbf{N} = 0$$

zatem wektor $\mathbf{v} = \tau\mathbf{T} + K\mathbf{B}$ pozostaje stały. Niech wyznacza on kierunek $\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]$ układu współrzędnych:

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\tau}{\sqrt{K^2 + \tau^2}}\mathbf{T} + \frac{K}{\sqrt{K^2 + \tau^2}}\mathbf{B}. \quad (1.18)$$

Jeśli parametryzacja $\boldsymbol{\gamma}(s)$ miałyby opisywać helisę, to, używając argumentów dynamicznych, można by było rozłożyć $\boldsymbol{\gamma}(s)$ na jednostajny ruch postępowy w kierunku \mathbf{e}_3 , który zgodnie z (1.16) byłby postaci

$$\frac{bs}{\sqrt{R^2 + b^2}}\mathbf{e}_3 = \frac{\tau s}{\sqrt{K^2 + \tau^2}}\mathbf{e}_3$$

oraz na ruch po okręgu (lub jego fragmencie) w płaszczyźnie prostopadłej do e_3 ,

$$\mathbf{r}(s) = \gamma(s) - \frac{\tau s}{\sqrt{K^2 + \tau^2}} e_3.$$

Do pokazania pozostaje zatem, że $\mathbf{r}(s)$ opisuje tenże ruch po okręgu. Zauważmy, że

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{r}(s) \cdot e_3) = \mathbf{r}'(s) \cdot e_3 = \left(\gamma'(s) - \frac{\tau}{\sqrt{K^2 + \tau^2}} e_3 \right) \cdot e_3 = \mathbf{T} \cdot e_3 - \frac{\tau}{\sqrt{K^2 + \tau^2}}.$$

Uwzględniając (1.18) otrzymamy

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{r}(s) \cdot e_3) = \frac{\tau}{\sqrt{K^2 + \tau^2}} |\mathbf{T}|^2 - \frac{\tau}{\sqrt{K^2 + \tau^2}} = 0.$$

Zatem $\mathbf{r}(s) \cdot e_3 = \text{const} = \mathbf{r}(s_0) \cdot e_3$. Wybierzmy układ odniesienia, tak aby $\mathbf{r}(s_0)$ był jego początkiem. W takim układzie odniesienia $\mathbf{r}(s) \cdot e_3 = 0$, zatem krzywa $\mathbf{r}(s)$ leży w płaszczyźnie prostopadłej do e_3 . Pozostaje do wykazania, że $\mathbf{r}(s)$ ma stałą krzywiznę.

W tym celu obliczmy

$$\mathbf{r}'(s) = \mathbf{T}(s) - \frac{\tau}{\sqrt{K^2 + \tau^2}} e_3$$

oraz $\mathbf{r}''(s) = K\mathbf{N}(s)$ i zauważmy, że

$$|\mathbf{r}'(s)|^2 = 1 + \frac{\tau^2}{K^2 + \tau^2} - \frac{2\tau}{\sqrt{K^2 + \tau^2}} \mathbf{T}(s) \cdot e_3 = \frac{K^2}{K^2 + \tau^2} \neq 1,$$

co oznacza, że parametryzacja przy użyciu s nie jest łukowa dla krzywej $\mathbf{r}(s)$. Niemniej krzywiznę możemy obliczyć na podstawie ogólnego wzoru (1.10). Otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s) &= \left[\mathbf{T}(s) - \frac{\tau}{\sqrt{K^2 + \tau^2}} e_3 \right] \times K\mathbf{N}(s) = K\mathbf{B}(s) - \frac{K\tau}{\sqrt{K^2 + \tau^2}} e_3 \times \mathbf{N}(s) \\ &= K\mathbf{B}(s) - \frac{K\tau}{\sqrt{K^2 + \tau^2}} \left[\frac{\tau}{\sqrt{K^2 + \tau^2}} \mathbf{B}(s) + \frac{K}{\sqrt{K^2 + \tau^2}} (-\mathbf{T}(s)) \right] \\ &= \frac{K^3}{K^2 + \tau^2} \mathbf{B}(s) + \frac{K^2\tau}{K^2 + \tau^2} \mathbf{T}(s). \end{aligned}$$

Ostatecznie krzywizna K_1 krzywej $\mathbf{r}(s)$ dana jest przez

$$K_1 = \frac{|\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)|}{|\mathbf{r}'(s)|^3} = \frac{K^2 + \tau^2}{K}.$$

Zatem $\mathbf{r}(s)$ opisuje okrąg (lub jego fragment) o promieniu $K/(K^2 + \tau^2)$ w płaszczyźnie prostopadłej do e_3 .

FAKT 5. Funkcje $K(p)$ oraz $\tau(p)$ określają krzywą w \mathbb{R}^3 z dokładnością do afinicznego przekształcenia $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $h(x) = Rx + a$, gdzie $a \in \mathbb{R}^3$ oraz $R \in \text{SO}(3)$ jest obrotem (właściwym) w \mathbb{R}^3 .

1.6. Łuki i rozmaitości wymiaru 1

DEF. 1.11. Homeomorfizmem zbiorów X i Y nazywamy ciągłe przekształcenie $h: X \rightarrow Y$, które jest bijekcją (różnowartościowe i na) i istnieje do niego ciągłe przekształcenie odwrotne.

Odwzorowanie zbioru otwartego $f: G \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest *dyfeomorfizmem*, jeśli jest różnowartościowe, nieosobliwe (rzęd różniczki df jest k), klasy C^1 (gładkie) oraz odwrotne do niego jest ciągłe.

Z nieosobliwości f wynika, że dyfeomorfizm istnieje tylko przy $m \geq k$. Przy $m = k$ każde różnowartościowe i nieosobliwe (nieznikający jakobian $\det df$) odwzorowanie klasy C^1 jest dyfeomorfizmem oraz odwzorowanie odwrotne też jest dyfeomorfizmem.

DEF. 1.12. Łukiem L nazywamy dyfeomorficzny obraz przedziału otwartego $I \subset \mathbb{R}$, tzn. $L = h(I)$, gdzie $h : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest dyfeomorfizmem.

PRZYKŁAD 1.20. Sprawdzić, czy następujące krzywe są łukami:

- (1) krzywa określona parametrycznie jako $\gamma(t) = [t, t^3]$, $t \in \mathbb{R}$,
- (2) krzywa określona parametrycznie jako $\gamma(t) = [t^2, t^6]$, $t \in \mathbb{R}$,
- (3) krzywa określona parametrycznie jako $\gamma(t) = [R \cos t, R \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$,
- (4) krzywa określona parametrycznie jako $\gamma(t) = [R \cos t, R \sin t]$, $t \in (0, 4\pi)$,
- (5) helisa $\gamma(t) = [R \cos t, R \sin t, bt]$, $t \in \mathbb{R}$.

PRZYKŁAD 1.21. Niech S^1 oznacza jednostkowy okrąg. Odwzorowanie $h : (-\pi, \pi] \rightarrow S^1$ określone jako

$$h(t) = [\cos t, \sin t]$$

jest różniczkowalną bijekcją. Czy odwzorowanie odwrotne do niego jest ciągłe?

Rozw. h jako bijekcja ma odwzorowanie odwrotne $h^{-1} : S^1 \rightarrow (-\pi, \pi]$. Pamiętając, że $\arctg : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ możemy zapisać

$$h^{-1}(x, y) = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} & x > 0 \\ \pi + \arctg \frac{y}{x} & x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x} & x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Funkcja h^{-1} nie jest jednak ciągła w $(-1, 0)$! Rzeczywiście

$$h^{-1}(-1, y) = \begin{cases} \pi + \arctg(-y) & y \geq 0 \\ -\pi + \arctg(-y) & y < 0. \end{cases}$$

i w konsekwencji

$$\lim_{y \rightarrow \pm 0} h^{-1}(-1, y) = \pm \pi.$$

Zatem funkcja odwrotna nie jest ciągła w $(-1, 0)$. Funkcja odwrotna do funkcji ciągłej nie musi być ciągła! \square

DEF. 1.13. Rozmaitością różniczkową wymiaru 1 nazywamy zbiór L , który jest sumą pewnej rodziny łuków L_α otwartych względem L ,

$$L = \bigcup_{\alpha} L_{\alpha},$$

tzn. istnieją zbiory otwarte $I_\alpha \subset \mathbb{R}$ oraz dyfeomorfizmy $h_\alpha : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^m$, takie że stanowią one pokrycie L .

Pary (I_α, h_α) nazywamy *mapami*, a zbiór map $\{(I_\alpha, h_\alpha)\}$ tworzy *atlas* rozmaitości wymiaru 1.

PRZYKŁAD 1.22. Jednostkowy okrąg o środku w początku układu współrzędnych jest 1-wymiarową rozmaitością. Atlas tworzą np. mapy $\{(I_1, h_1), (I_2, h_2)\}$, gdzie $h_1 : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $h_2 : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $h_1(t) = h_2(t) = [\cos t, \sin t]$.

FAKT 1. Każdy łuk jest rozmaitością wymiaru 1, która ma tylko jedną mapę.

FAKT 2. Jeśli krzywa jest rozmaitością wymiaru 1, to w każdym jej punkcie można wyznaczyć prostą styczną.

FAKT 3. Niech krzywa określona będzie jako $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$. Jeśli $f : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (G – zbiór otwarty w \mathbb{R}^2) jest odwzorowaniem klasy C^1 i $\nabla f(x, y) \neq 0$ wzdłuż całej krzywej, to krzywa jest rozmaitością wymiaru 1. Zatem regularność krzywej gwarantuje, że jest ona rozmaitością wymiaru 1.

FAKT 4. Niech $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$. Jeśli $F : G \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (G – zbiór otwarty w \mathbb{R}^3) jest odwzorowaniem klasy C^1 i rząd $dF(x, y, z) = 2$ na całym \mathcal{S} , to \mathcal{S} jest rozmaitością wymiaru 1.

PRZYKŁAD 1.23. Dany jest zbiór $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Wykazać, że \mathcal{S} jest 1-wymiarową rozmaitością. Znaleźć wektor styczny w dowolnym punkcie tej rozmaitości.

Odwzorowanie określające zbiór \mathcal{S} ma postać

$$F(x, y, z) = [x + y + z - 1, x^2 + y^2 + z^2 - 1].$$

Jego różniczka jest zatem

$$dF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{bmatrix}$$

i ma rząd równy 2 dla wszystkich punktów należących do \mathcal{S} .

Wektory ∇F_1 i ∇F_2 są prostopadłe do \mathcal{S} i liniowo niezależne. Wektor jednostkowy $T = (T_1, T_2, T_3)$ prostopadły do obu będzie zatem styczny do krzywej,

$$\begin{cases} \nabla F_1 \cdot T = 0 \\ \nabla F_2 \cdot T = 0 \end{cases} \Leftrightarrow dF(x, y, z)(T) = 0. \quad (1.19)$$

Warunek (1.19) ma postać układu równań

$$\begin{cases} T_1 + T_2 + T_3 = 0 \\ xT_1 + yT_2 + zT_3 = 0 \end{cases}$$

którego rozwiązaniem przy dowolnym $u \equiv T_3$ jest

$$T_1 = u \frac{y-z}{x-y}, \quad T_2 = u \frac{z-x}{x-y}.$$

Parametr u dobierzemy tak aby $|T| = 1$. Obliczenie daje $u = (x-y)/2$ i ostatecznie

$$T(x, y, z) = \frac{1}{2}[y-z, z-x, x-y].$$

PRZYKŁAD 1.24. Pokazać, że krzywa Vivianiego określona przez relacje

$$F(x, y, z) = [x^2 + y^2 + z^2 - 4, (x-1)^2 + y^2 - 1] = 0$$

nie jest 1-wymiarową rozmaitością. Znaleźć punkt na tej krzywej, w którym $dF < 2$.

Rozdział 2

Powierzchnie w przestrzeni trójwymiarowej

W tym rozdziale rozpatrywać będziemy powierzchnie zanurzone w \mathbb{R}^3 . Od dostatecznie regularnej powierzchni będziemy wymagać, aby w każdym jej punkcie istniała jednoznacznie określona płaszczyzna styczna i aby lokalnie powierzchnia była homeomorficzna (dyfeomorficzna) ze zbiorem otwartym na płaszczyźnie.

2.1. Równania powierzchni

Przypomnijmy podstawowe fakty związane z różniczkowaniem odwzorowań $F : G \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$.

DEF. 2.1 (Różniczka i różniczkowalność odwzorowań). Odwzorowanie $F : G \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalne w punkcie $x_0 \in G$, jeśli istnieje jego różniczka $dF|_{x_0}$, tzn. liniowe przekształcenie $dF|_{x_0} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ takie że

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|h|} (F(x_0 + h) - F(x_0) - dF|_{x_0}(h)) = 0.$$

FAKT 2.1. Jeśli G jest zbiorem otwartym (otoczeniem) w \mathbb{R}^k i funkcja $F : G \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in G$, to

- (1) F ma dokładnie jedną różniczkę w punkcie x_0 ,
- (2) istnieją pochodne cząstkowe $\partial_i F_j(x_0)$ i macierz różniczki (macierz Jacobiego) ma postać

$$dF|_{x_0} = [\partial_i F_j], \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, m,$$

gdzie j numeruje wiersze oraz i numeruje kolumny,

- (3) działanie różniczki na wektor $h \in \mathbb{R}^k$ opisuje mnożenie macierzy, tzn.

$$(dF|_{x_0}(h))_j = \sum_{i=1}^k \partial_i F_j(x_0) h_i.$$

Aby odwzorowanie $F : G \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ było różniczkowalne w punkcie x_0 wystarczy aby istniały pochodne cząstkowe i były ciągłe w x_0 . Jeśli $k = m$, to macierz Jacobiego jest kwadratowa i jej wyznacznik $\det dF|_{x_0}$ nazywamy jakobianem odwzorowania F w punkcie x_0 .

Omówimy dwa najważniejsze sposoby określania powierzchni:

Równanie parametryczne

DEF. 2.2 (Płatek). Płatem S nazywamy powierzchnię określoną równaniem parametrycznym $r : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ określonym na zbiorze otwartym $U \subseteq \mathbb{R}^2$, które jest gładkim odwzorowaniem, takim że $\text{rank } dr(u, v) = 2$ dla każdego $(u, v) \in U$ oraz $r(U) = S$,

$$r(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)], \quad (u, v) \in U.$$

Odwzorowanie r nazywamy (globalną, regularną) parametryzacją płata.

Ustalmy v_0 . Odwzorowanie $u \mapsto \mathbf{r}(u, v_0)$ definiuje krzywą na powierzchni S , którą nazywać będziemy *linią współrzędnościową* przy ustalonym $v = v_0$. Pochodna $\partial_u \mathbf{r}$ opisuje zatem wektory styczne do omawianej linii współrzędnościowej. Podobnie odwzorowanie $v \mapsto \mathbf{r}(u_0, v)$ przy ustalonym $u = u_0$ definiuje drugą krzywą współrzędnościową na powierzchni S , a $\partial_v \mathbf{r}$ opisuje wektory styczne do niej. Obie krzywe tworzą krzywoliniową siatkę współrzędnych na S odpowiadającą współrzędnym w U .

FAKT 2.2. Następujące warunki są równoważne:

- (1) $\text{rank } d\mathbf{r} = 2$,
- (2) wektory $\partial_u \mathbf{r}$ oraz $\partial_v \mathbf{r}$ są liniowo niezależne w każdym punkcie powierzchni,
- (3) $\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r} \neq \mathbf{0}$.

Wykres funkcji $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ określony jako $W_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in U\}$ (przez jawną postać jednej ze zmiennych wyrażonych jako funkcje pozostałych) wprowadza parametryzację postaci

$$\mathbf{r}(u, v) = [u, v, f(u, v)], \quad (u, v) \in U.$$

Zauważmy, że

$$d\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \partial_u f & \partial_v f \end{bmatrix}$$

i w każdym punkcie $\text{rank } d\mathbf{r} = 2$.

PRZYKŁAD 2.1. Parametryzacja $\mathbf{r}_g(x, y) = [x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}]$ z obszaru $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$ opisuje górną połowę sfery, a parametryzacja $\mathbf{r}_d(x, y) = [x, y, -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}]$ z tego samego obszaru U — jej dolną połowę.

Wektory styczne do linii współrzędnych mają w tej parametryzacji postać

$$\partial_u \mathbf{r}_g = \left[1, 0, \frac{-u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \right], \quad \partial_v \mathbf{r}_g = \left[0, 1, \frac{-v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \right],$$

a ich iloczyn skalarny ma postać

$$\partial_u \mathbf{r}_g \cdot \partial_v \mathbf{r}_g = \frac{uv}{R^2 - u^2 - v^2}.$$

Niech $\gamma(u) = [r(u), 0, z(u)]$ będzie regularną krzywą na płaszczyźnie XZ, dla której $r(u) > 0$. Krzywą tą możemy obrócić wokół osi Z otrzymując *powierzchnię obrotową* o równaniu parametrycznym

$$\mathbf{r}(u, \theta) = [r(u) \cos \theta, r(u) \sin \theta, z(u)], \quad (u, \theta) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi).$$

Odwzorowanie $\mathbf{r}(u, \theta)$ jest parametryzacją. Rzeczywiście

$$d\mathbf{r}(u, \theta) = \begin{bmatrix} r'(u) \cos \theta & -r(u) \sin \theta \\ r'(u) \sin \theta & r(u) \cos \theta \\ z'(u) & 1 \end{bmatrix}$$

i $\text{rank } d\mathbf{r} = 2$, chyba że

$$\begin{cases} r'(u) = 0 \\ z'(u) = 0 \end{cases}$$

co jest wykluczone przez regularność krzywej.

Równanie powierzchni obrotowej zapisujemy w skrócie

$$\mathbf{r}(u, \theta) = r(u) \mathbf{e}_+(\theta) + z(u) \mathbf{k},$$

gdzie $\mathbf{e}_+(\theta) = [\cos \theta, \sin \theta, 0]$ oraz $\mathbf{k} = [0, 0, 1]$

PRZYKŁAD 2.2. Zauważmy, że sfera o środku w początku układu współrzędnych i promieniu R powstaje z obrotu półokręgu $\gamma(\theta) = [R \cos \theta, 0, R \sin \theta]$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ wokół osi Z o kąt $\varphi \in [0, 2\pi)$. Obrazem odwzorowania

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = [R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta], \quad (\theta, \varphi) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi)$$

jest zatem sfera. Nie jest to jednak jej parametryzacja w sensie Def. 2.2, gdyż $U = [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi)$ nie jest zbiorem otwartym w \mathbb{R}^2 ! Problemy te sugerują, że sfera nie jest płatem!

W tej parametryzacji wektory styczne do linii współrzędnych mają postać

$$\partial_\theta \mathbf{r} = [-R \sin \theta \cos \varphi, -R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta], \quad \partial_\varphi \mathbf{r} = [-R \cos \theta \sin \varphi, R \cos \theta \cos \varphi, 0],$$

a ich iloczyn skalarny wynosi w każdym punkcie 0.

PRZYKŁAD 2.3 (Hiperboloidy).

a) Wyznaczyć równanie parametryczne powierzchni powstałej z obrotu hiperboli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

wokół osi Z . Otrzymana powierzchnia nosi nazwę *hiperboloidy jednowpłokowej*.

$$\mathbf{r}(u, \theta) = a \cosh u \mathbf{e}_+(\theta) + b \sinh u \mathbf{k}, \quad (u, \theta) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi).$$

b) Wyznaczyć równanie parametryczne powierzchni powstałej z obrotu hiperboli

$$\frac{z^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

wokół osi Z . Otrzymana powierzchnia nosi nazwę *hiperboloidy dwuwpłokowej*.

$$\mathbf{r}(u, \theta) = a \sinh u \mathbf{e}_+(\theta) + b \cosh u \mathbf{k}, \quad (u, \theta) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi).$$

PRZYKŁAD 2.4 (Paraboloida). Wyznaczyć równanie parametryczne powierzchni powstałej z obrotu paraboli $x^2 = 2pz$ wokół osi Z . Otrzymana powierzchnia nosi nazwę *paraboloidy*.

$$\mathbf{r}(u, \theta) = u \mathbf{e}_+(\theta) + \frac{u^2}{2p} \mathbf{k}, \quad (u, \theta) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi).$$

PRZYKŁAD 2.5. Niech

$$\mathbf{e}_+(u) = [\cos u, \sin u, 0], \quad \mathbf{e}_-(u) = [-\sin u, \cos u, 0].$$

Wyznaczyć punkty osobliwe powierzchni zadanej równaniem

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{e}_+(v) + (u + v)\mathbf{e}_-(v) + (u + 2v)\mathbf{e}_3.$$

Równanie algebraiczne

Dla $f : G \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ zbiór $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$ (poziomica zerowa) określa powierzchnię dwuwymiarową.

DEF. 2.3. Spójna powierzchnia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$ jest regularna, jeśli funkcja $f : G \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka i $\nabla f \neq 0$ dla każdego punktu $(x, y, z) \in S$. Zapisujemy wówczas, że $S = f^{-1}(0)$.

PRZYKŁAD 2.6. Wyznaczyć punkty nieregularności (osobliwe) powierzchni $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z(x^2 + y^2) - 2xy = 0\}$.

Każda powierzchnia regularna jest lokalnie wykresem pewnej funkcji $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

PRZYKŁAD 2.7. Płaszczyzna w \mathbb{R}^3 jest wyznaczona przez wektor normalny \mathbf{n} . Zatem równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^3$ jest postaci

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \iff n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0.$$

PRZYKŁAD 2.8. Jednostronny stożek określony jest jako $S_g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$. Mamy $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} - z$ i pochodne cząstkowe

$$\partial_x f = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \partial_y f = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

nie są określone w $(0, 0, 0)$. Funkcja f nie jest zatem gładka, a jednostronny stożek nie jest powierzchnią regularną!

Można próbować temu zaradzić wprowadzając alternatywny opis jednostronnego stożka jako górną połówkę całego stożka

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0\}.$$

Wówczas wprowadzicie $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ jest gładka, ale $\nabla f(0, 0, 0) = 0$.

PRZYKŁAD 2.9. Elipsoida trójosiowa

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

jest powierzchnią regularną. Rzeczywiście $S = f^{-1}(0)$, gdzie

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Funkcja f jest gładka oraz

$$\nabla f(x, y, z) = \left[\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2} \right] \neq \mathbf{0}$$

na całej powierzchni S .

2.2. Płaszczyzna styczna do powierzchni

Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie regularną powierzchnią i niech $p = \mathbf{r}(\mathbf{u}) \in S$ będzie jej dowolnym punktem leżącym w mapie (\mathbf{r}, U) .

DEF. 2.4. Wektor \mathbf{v} jest styczny do powierzchni S w punkcie p , jeśli istnieje krzywa na S $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, taka że $\gamma(0) = p$ oraz $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{v}$.

Dwie krzywe: $\gamma_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ oraz $\gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ nazwiemy *równoważnymi*, jeśli $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ oraz $\dot{\gamma}_1(0) = \dot{\gamma}_2(0) = \mathbf{v}$. Klasy równoważności krzywych oznaczymy przez $[\gamma]$. Różne klasy wyznaczają różne wektory \mathbf{v} .

Zbiór wszystkich wektorów stycznych w punkcie p odpowiadających różnym klasom równoważności krzywych $[\gamma]$ tworzy *płaszczyznę styczną*, która jest izomorficzna (równoległa do) z 2-wymiarową podprzestrzenią wektorową nazywaną *przestrzenią styczną* $T_p S$.

DEF. 2.5. Pochodną kierunkową funkcji $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ w kierunku wektora v_p wyznaczonego przez klasę równoważności krzywych $[\gamma]$ nazywamy wyrażenie

$$v_p(f) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \gamma)(t).$$

Tw. 2.1. Przestrzeń styczna $T_p S$ jest wyznaczona przez obraz różniczki parametryzacji lokalnej mapy, tzn.

$$T_p S = \text{Im } d\mathbf{r}|_u = d\mathbf{r}|_u(\mathbb{R}^2) = \{v \in \mathbb{R}^3 : \exists w \in \mathbb{R}^2 \quad v = d\mathbf{r}|_u(w)\}.$$

Dowód: Zwróćmy uwagę, że dzięki warunkowi rank $d\mathbf{r} = 2$, obrazem różniczki jest 2-wymiarowa podprzestrzeń w \mathbb{R}^3 . Niech $v \in \text{Im } d\mathbf{r}|_u$. Wektor v wyznacza w obszarze U wektor $w \in \mathbb{R}^2$ oraz prostą $u + tw$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Jej obrazem w parametryzacji $r : U \rightarrow S$ jest krzywa

$$\gamma_w(t) = r(u + tw),$$

dla której $\gamma_w(0) = r(u) = p$ oraz $\dot{\gamma}_w(0) = d\mathbf{r}|_u(w)$. Jednocześnie $\dot{\gamma}_w(0)$ wyznacza wektor z przestrzeni stycznej $v \in T_p S$. Zatem

$$\text{Im } d\mathbf{r}|_u \subseteq T_p S. \quad (2.1)$$

Odwrotnie, niech $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ będzie krzywą wyznaczającą wektor styczny $v = \dot{\gamma}(0)$ w punkcie $p = \gamma(0)$. Dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ można przyjąć, że $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \subset r(U)$. Wówczas $\gamma_v = r^{-1} \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ jest krzywą na U taką że

$$\gamma_v(0) = r^{-1}(\gamma(0)) = r^{-1}(p) = u.$$

Przyjmijmy $\dot{\gamma}_v(0) = w$. W konsekwencji relacji $\gamma(t) = r \circ \gamma_v(t)$ mamy

$$\dot{\gamma}(0) = d\mathbf{r}|_u(\dot{\gamma}_v(0)) = d\mathbf{r}|_u(w).$$

Zatem wektor styczny $\dot{\gamma}(0) \in T_p S$ wyznacza w i $T_p S \subseteq \text{Im } d\mathbf{r}|_u$. Uwzględniając (2.1) otrzymamy

$$T_p S = \text{Im } d\mathbf{r}|_u.$$

□

Aby wyznaczyć płaszczyznę styczną w punkcie $p \in S$ należy przestrzeń styczną zaczepić w punkcie p dokonując przesunięcia o wektor r_0 określający położenie punktu p .

PRZYKŁAD 2.10. Niech

$$r(\theta, \varphi) = [\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta], \quad (\theta, \varphi) \in D = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$$

będzie parametryzacją płata na jednostkowej sferze. Odwzorowania

$$\gamma(\theta) = r(\theta, \varphi) \Big|_{\varphi=\text{const}}, \quad \gamma(\varphi) = r(\theta, \varphi) \Big|_{\theta=\text{const}}$$

określają siatkę linii współrzędnych na sferze, a wektory

$$e_\theta = \dot{\gamma}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{bmatrix}, \quad e_\varphi = \dot{\gamma}(\varphi) = \begin{bmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

są styczne do tych linii w dowolnym punkcie $(\theta, \varphi) \in r(D)$. Na regularnym płacie $\{e_\theta, e_\varphi\}$ są one liniowo niezależne i napinają przestrzeń styczną,¹ tzn.

$$T_p S = \text{Span}\{e_\theta, e_\varphi\} = \{v \in \mathbb{R}^3 : v = v_1 e_\theta + v_2 e_\varphi, v_1, v_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Tę samą przestrzeń styczną otrzymamy używając Tw. 2.1 i obliczając $\text{Im } dr|_{(\theta, \varphi)}(\mathbb{R}^2)$, gdzie

$$dr|_{(\theta, \varphi)} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \theta & 0 \end{bmatrix}$$

Niech $r_0 = r(\pi/4, 0) = [1, 0, 1]/\sqrt{2}$. Wówczas

$$dr|_{(\pi/4, 0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

oraz

$$e_\theta(\pi/4, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad e_\varphi(\pi/4, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Niech $v = [v_1, v_2] \in \mathbb{R}^2$. Wówczas wektory z \mathbb{R}^3 postaci

$$dr|_{(\pi/4, 0)}(v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -v_1 \end{bmatrix}$$

należą do przestrzeni stycznej w punkcie $[1, 0, 1]/\sqrt{2}$. Zauważmy, że są one postaci

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -v_1 \end{bmatrix} = v_1 e_\theta(\pi/4, 0) + v_2 e_\varphi(\pi/4, 0).$$

Równanie przestrzeni stycznej najwygodniej wyznaczyć znajdując wektor prostopadły do niej

$$n = \sqrt{2} e_\theta \times e_\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wówczas przestrzeń styczna ma równanie $x + z = 0$, a płaszczyzna styczna do sfera w punkcie $[1, 0, 1]/\sqrt{2}$ ma równanie

$$x - \frac{1}{\sqrt{2}} + z - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \iff x + z = \sqrt{2}.$$

PRZYKŁAD 2.11. Niech

$$r(u, v) = [u, v, R^2 - u^2 - v^2], \quad (u, v) \in D = \{(u, v) : u^2 + v^2 < R^2\}$$

będzie parametryzacją stożka parabolicznego. Wyznaczyć

- (1) Macierz różniczki parametryzacji i jej moduł,

¹ Nie jest tak jednak na całej sferze! Na biegunie północnym $r(0, 0) = [0, 0, 1]$, e_φ jest wektorem zerowym i nie rozpina zatem przestrzeni stycznej!

- (2) Wektory styczne do linii współrzędnych,
- (3) Przestrzeń i powierzchnię styczną w dowolnym punkcie $p = \mathbf{r}(u_0, v_0)$,
- (4) Równanie powierzchni stycznej w układzie XYZ.

Zauważmy, że ogólnie dla regularnej powierzchni S i punktu $p = \mathbf{r}_0$ w lokalnej mapie (\mathbf{r}, U) wektory $\partial_1 \mathbf{r}|_{\mathbf{r}_0}$ i $\partial_2 \mathbf{r}|_{\mathbf{r}_0}$ rozpinają płaszczyznę styczną w punkcie \mathbf{r}_0 i wektor $\partial_1 \mathbf{r}|_{\mathbf{r}_0} \times \partial_2 \mathbf{r}|_{\mathbf{r}_0}$ jest do niej normalny. Zatem płaszczyzna styczna ma równanie

$$(\partial_1 \mathbf{r}|_{\mathbf{r}_0} \times \partial_2 \mathbf{r}|_{\mathbf{r}_0}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0.$$

PRZYKŁAD 2.12. Niech $\mathbf{r}(\mathbf{u}) = [\mathbf{u}, h(\mathbf{u})]$, gdzie $h : U \rightarrow \mathbb{R}$. Wówczas

$$\partial_1 \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1 h \end{bmatrix}, \quad \partial_2 \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2 h \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r} = \begin{bmatrix} -\partial_1 h \\ -\partial_2 h \\ 1 \end{bmatrix}$$

i ostatecznie równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $p = \mathbf{r}_0$ ma postać

$$\partial_1 h(\mathbf{u}_0)(x - x_0) + \partial_2 h(\mathbf{u}_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Niech $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\} = f^{-1}(0)$ będzie regularną powierzchnią.

Tw. 2.2. Przestrzeń styczna w punkcie $p \in S$ jest wyznaczona przez jądro różniczki funkcji f w punkcie p , tzn.

$$T_p S = \text{Ker } df|_p.$$

Dowód: Rozpocznijmy od wyjaśnienia powyższego zapisu. Mamy

$$\text{Ker } df|_p = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : df|_p(\mathbf{v}) = 0\} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \partial_1 f(p)v_1 + \partial_2 f(p)v_2 + \partial_3 f(p)v_3 = 0\}.$$

Zatem należy pokazać, że $T_p S$ składa się z wektorów \mathbf{v} prostopadłych do $\nabla f(p)$.

Niech $\mathbf{v} \in T_p S$ i krzywa $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ będzie taka, że $\gamma(0) = p$ oraz $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{v}$. Ponieważ krzywa leży na powierzchni S , to $f(\gamma(t)) = 0$. Zatem

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(0)) \cdot \dot{\gamma}(0) = \nabla f(p) \cdot \mathbf{v}.$$

W konsekwencji $\mathbf{v} \perp \nabla f(p)$ i $T_p S = \text{Ker } df|_p$ jako 2-wymiarowe podprzestrzenie. □

Równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $p = \mathbf{r}_0$ do powierzchni $S = f^{-1}(0)$ ma zatem postać

$$df|_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \nabla f|_{\mathbf{r}_0} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0.$$

PRZYKŁAD 2.13. Dla sfery $S^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, gradient $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ w punkcie $p = \mathbf{r}_0$ jest $\nabla f|_{\mathbf{r}_0} = 2\mathbf{r}_0$. Zatem równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $p = \mathbf{r}_0$ jest postaci

$$2\mathbf{r}_0 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \iff xx_0 + yy_0 + zz_0 = R^2.$$

2.3. Odwzorowania powierzchni

DEF. 2.6. Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią regularną i niech $p \in S$. Funkcję $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy gładką w otoczeniu punktu $p \in S$, jeśli istnieje lokalna parametryzacja otoczenia punktu $p \in r(U)$ taka że $f \circ r : U \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka.

Funkcja gładka w jednej parametryzacji jest także gładka w innej parametryzacji, a więc pojęcie to nie zależy od wyboru parametryzacji.

DEF. 2.7. Niech S_1 i $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ będą dwoma regularnymi powierzchniami. Funkcję $F : S_1 \rightarrow S_2$ nazywamy gładką w otoczeniu $r_1(U)$, jeśli funkcja

$$r_2^{-1} \circ F \circ r_1 : U \rightarrow V$$

jest gładka.

W szczególności różniczką funkcji $F : S_1 \rightarrow S_2$ w punkcie $p = r_1(u)$ jest

$$dF|_p = d(r_2^{-1} \circ F \circ r_1)|_u \quad (2.2)$$

Różniczką $dF : T_p S_1 \rightarrow T_{F(p)} S_2$ wyznacza tzw. *odwzorowanie styczne* wektorów z przestrzeni stycznych.

2.4. Tensor metryczny

Niech $r(u^1, u^2)$ będzie parametryzacją powierzchni regularnej S . Wówczas wektory styczne do linii współrzędnych $\partial_1 r$ oraz $\partial_2 r$ są liniowo niezależne w punktach $p \in S$, ale niekoniecznie prostopadłe. Iloczyn skalarny w \mathbb{R}^3 indukuje iloczyn skalarny wektorów stycznych $v_1 = \sum_i v_1^i \partial_i r$, $v_2 = \sum_j v_2^j \partial_j r$ w $T_p S$ jako

$$\langle v_1, v_2 \rangle_p := \sum_{i,j} v_1^i v_2^j (\partial_i r|_p \cdot \partial_j r|_p) = \sum_{ij} g_{ij}(p) v_1^i v_2^j$$

gdzie współczynniki²

$$g_{ij}(p) := \partial_i r|_p \cdot \partial_j r|_p, \quad i, j = 1, 2,$$

tworzą pole macierzy (na S lub U w zależności od potrzeb i wygody!)

$$\mathcal{G}(p) = [g_{ij}(p)] = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, następujące własności macierzy \mathcal{G} :

- (1) macierz \mathcal{G} jest symetryczna,
- (2) $g_{11} = \partial_1 r \cdot \partial_1 r > 0$ oraz

$$g := \det \mathcal{G} = (\partial_1 r \cdot \partial_1 r)(\partial_2 r \cdot \partial_2 r) - (\partial_1 r \cdot \partial_2 r)^2 > 0$$

na mocy nierówności Schwartza. Zatem macierz \mathcal{G} jest dodatnio określona.

- (3) Słuszna jest relacja

$$g = (\partial_1 r \cdot \partial_1 r)(\partial_2 r \cdot \partial_2 r) - (\partial_1 r \cdot \partial_2 r)^2 = |\partial_1 r \times \partial_2 r|^2.$$

² W tradycyjnej notacji wprowadzonej przez Gaussa $g_{11} = E(u^1, u^2)$, $g_{12} = g_{21} = F(u^1, u^2)$, $g_{22} = G(u^1, u^2)$ były funkcjami na U nie na S .

(4) Niech $w(u^1, u^2) = [w^1(u^1, u^2), w^2(u^1, u^2)]$ będzie zamianą parametryzacji S . W parametryzacji (w^1, w^2) mamy

$$\tilde{g}_{ij} := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w^j} = \sum_{k,m=1}^2 \frac{\partial u^k}{\partial w^i} \frac{\partial u^m}{\partial w^j} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^m} = \sum_{k,m=1}^2 \frac{\partial u^k}{\partial w^i} \frac{\partial u^m}{\partial w^j} g_{km}.$$

Zwykle stosuje się konwencję sumacyjną, w myśl której po powtarzającym się na różnym poziomie indeksie wykonywane jest sumowanie. Pozwala to na skrócenie zapisu i niezapisywanie symboli sum! Wzór

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{\partial u^k}{\partial w^i} \frac{\partial u^m}{\partial w^j} g_{km}$$

określa regułę transformacji *tensora dwukrotnie kowariantnego*.

DEF. 2.8 (Tensor metryczny i I forma podstawowa). Macierz \mathcal{G} nazywa się *tensoriem metrycznym*, natomiast formę kwadratową na S

$$I_1|_p(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_p, \quad \mathbf{v} \in T_p S$$

nazywa się *I formą podstawową powierzchni*.

Znajomość formy podstawowej $I_1(\mathbf{v})$ jest równoważna znajomości iloczynu skalarnego $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle_p$ i pozwala na obliczanie długości krzywych na S . Niech $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow S$ będzie krzywą na S , $\gamma(t) = \mathbf{r}(u^1(t), u^2(t))$. Długość tej krzywej określa wzór

$$L(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{I_1(\dot{\gamma}(t))} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{11}(\dot{u}^1)^2 + 2g_{12}\dot{u}^1\dot{u}^2 + g_{22}(\dot{u}^2)^2} dt,$$

gdzie g_{ij} są funkcjami (u^1, u^2) , a zatem funkcjami parametru t .

Tensor metryczny pozwala zapisać pole płata $\mathbf{r}(U)$ jako

$$\iint_{\mathbf{r}(U)} dS = \iint_U |\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}| du^1 du^2 = \iint_U \sqrt{g} du^1 du^2.$$

Ponieważ $g > 0$, to istnieje macierz odwrotna $\mathcal{G}^{-1} = [g^{ij}]$, gdzie $g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i$. Reguła transformacyjna dla współczynników $\mathcal{G}^{-1} = [g^{ij}]$ jest postaci

$$\tilde{g}^{ij} = \frac{\partial w^i}{\partial u^k} \frac{\partial w^j}{\partial u^m} g^{km}$$

co uzasadnia, że \mathcal{G}^{-1} jest *tensoriem dwukrotnie kontrawariantnym*.

PRZYKŁAD 2.14. Dla płata sfery z Przykładu 2.10 mamy

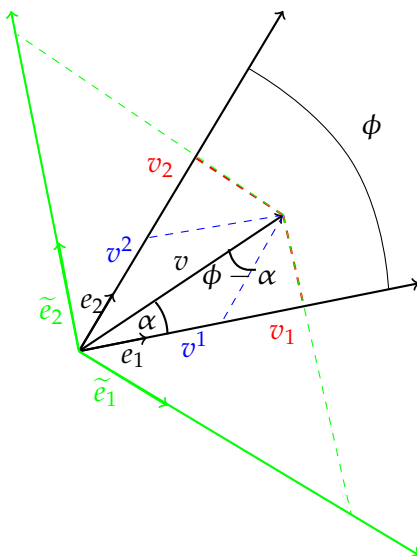
$$\partial_\theta \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{bmatrix}, \quad \partial_\varphi \mathbf{r} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$g_{ij}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

oraz

$$dl^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2.$$



Rysunek 2.1. Składowe kontrawariantne i kowariantne wektora w skośnokątnym układzie współrzędnych

PRZYKŁAD 2.15. Dla powierzchni $\mathbf{r}(u^1, u^2) = [u^1, u^2, R^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2]$ mamy

$$\partial_1 \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2u^1 \end{bmatrix}, \quad \partial_2 \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2u^2 \end{bmatrix},$$

zatem

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} 1 + 4(u^1)^2 & 4u^1 u^2 \\ 4u^1 u^2 & 1 + 4(u^2)^2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{G}} \begin{bmatrix} 1 + 4(u^2)^2 & -4u^1 u^2 \\ -4u^1 u^2 & 1 + 4(u^1)^2 \end{bmatrix},$$

gdzie $\det \mathcal{G} = 1 + 4(u^1)^2 + 4(u^2)^2$.

2.5. Składowe kontrawariantne i kowariantne

Niech w dowolnym punkcie $p \in S$ linie współrzędnych przecinają się pod kątem ϕ , tzn. dla $\mathbf{e}_1 = \partial_1 \mathbf{r} / |\partial_1 \mathbf{r}|$ oraz $\mathbf{e}_2 = \partial_2 \mathbf{r} / |\partial_2 \mathbf{r}|$ tensor metryczny ma postać

$$[g_{ij}] = [\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle] = \begin{bmatrix} 1 & \cos \phi \\ \cos \phi & 1 \end{bmatrix}.$$

Założmy, że dowolny wektor $\mathbf{v} \in T_p S$ o długości $|\mathbf{v}| = v$ tworzy z wektorem \mathbf{e}_1 kąt α (patrz Rys. 2.1)

W celu charakteryzacji tego wektora w układzie współrzędnych można wprowadzić dwie pary liczb związanych z rzutami wektora \mathbf{v} na lokalne osie układu współrzędnych

$$v^1 = \frac{v \sin(\phi - \alpha)}{\sin \phi}, \quad v^2 = \frac{v \sin \alpha}{\sin \phi} \quad (2.3)$$

oraz

$$v_1 = v \cos \alpha, \quad v_2 = v \cos(\phi - \alpha). \quad (2.4)$$

Oczywiście, pierwsza para (2.3) reprezentuje współrzędne wektora v w lokalnym układzie współrzędnych, tzn.

$$v = v^1 e_1 + v^2 e_2.$$

Jaka jest interpretacja drugiej pary (2.4)? Aby to wyjaśnić przypomnijmy sobie, że oprócz wektorowej przestrzeni $V \equiv T_p S$ w ramach algebry liniowej definiuje się także do niej dualną, tzn. przestrzeń wektorową form liniowych nad V , oznaczaną zwykle jako V^* . Przestrzeń V^* wyposażona jest w bazę dualną $\{E^i\}_{i=1}^n$ określoną relacjami

$$E^i(e_j) = \delta_j^i.$$

Dzięki iloczynowi skalarnemu w V obiektom z przestrzeni dualnej można jednoznacznie przyporządkować ich reprezentantów w przestrzeni V : $V^* \ni W \mapsto \tilde{w} \in V$, tak aby

$$W(v) = \langle \tilde{w}, v \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} \tilde{w}^i v^j.$$

W szczególności formom bazowym odpowiadają wektory

$$E^1 \mapsto \tilde{e}_1 = \frac{1}{\sin^2 \phi} (e_1 - e_2 \cos \phi), \quad (2.5)$$

$$E^2 \mapsto \tilde{e}_2 = \frac{1}{\sin^2 \phi} (-e_1 \cos \phi + e_2) \quad (2.6)$$

spełniające relacje $\langle \tilde{e}_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Wówczas zauważmy, że

$$\begin{aligned} v_1 \tilde{e}_1 + v_2 \tilde{e}_2 &= \frac{v \cos \alpha}{\sin^2 \phi} (e_1 - e_2 \cos \phi) + \frac{v \cos(\phi - \alpha)}{\sin^2 \phi} (-e_1 \cos \phi + e_2) \\ &= \frac{v \sin(\phi - \alpha)}{\sin \phi} e_1 + \frac{v \sin \alpha}{\sin \phi} e_2 \\ &= v. \end{aligned}$$

Współrzędne (v_1, v_2) wektora v nazywa się współrzędnymi *kowariantnymi*, a parę (v^1, v^2) współrzędnymi *kontrawariantnymi*.

Zauważmy, że równania (2.5) i (2.6) można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin^2 \phi} \begin{bmatrix} 1 & -\cos \phi \\ -\cos \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \mathcal{G}^{-1} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}.$$

Wektory \tilde{e}_1 oraz \tilde{e}_2 nie są jednostkowe, ich długości wynoszą

$$|\tilde{e}_1| = |\tilde{e}_2| = \frac{1}{\sin \phi}.$$

Dodatkowo z faktów, że $\langle \tilde{e}_1, e_1 \rangle = \langle \tilde{e}_2, e_2 \rangle = 1$ wynika, że

$$\cos \angle(\tilde{e}_1, e_1) = \frac{\langle \tilde{e}_1, e_1 \rangle}{|\tilde{e}_1| |e_1|} = \cos(\pi/2 - \phi)$$

oraz

$$\cos \angle(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = \frac{\langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \rangle}{|\tilde{e}_1| |\tilde{e}_2|} = \cos(\pi - \phi).$$

2.6. Równanie geodezyjnej

Niech

$$\mathcal{L}[u, \dot{u}] = \int_{t_1}^{t_2} f(u(t), \dot{u}(t)) dt$$

będzie funkcjonalem zależnym od funkcji $u(t)$ i jej pochodnej $\dot{u}(t)$ po parametrze t . Rachunek wariacyjny daje odpowiedź na pytanie o równanie, jakie spełnia funkcja $u(t)$, która ekstremalizuje funkcjonal \mathcal{L} .

Wariacją funkcjonału \mathcal{L} nazywamy przyrost wartości

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}[u + \delta u, \dot{u} + \delta\dot{u}] - \mathcal{L}[u, \dot{u}]$$

dla takiej niewielkiej zmiany postaci funkcji δu , która znika na brzegach, tzn.

$$\delta u(t_1) = \delta u(t_2) = 0. \quad (2.7)$$

Funkcjonał \mathcal{L} będzie przyjmował wartość ekstremalną, jeśli $\delta\mathcal{L} = 0$. Zauważmy, że

$$\delta\mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} \left(f(u + \delta u, \dot{u} + \delta\dot{u}) - f(u(t), \dot{u}(t)) \right) dt,$$

gdzie

$$f(u + \delta u, \dot{u} + \delta\dot{u}) = f(u, \dot{u}) + \partial_u f \delta u + \partial_{\dot{u}} f \delta\dot{u}.$$

Zatem

$$\delta\mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} [\partial_u f \delta u + \partial_{\dot{u}} f \delta\dot{u}] dt.$$

Aby wyrazić $\delta\mathcal{L}$ tylko przy użyciu δu całkujemy przez części

$$\delta\mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\partial_u f \delta u - \frac{d}{dt} \partial_{\dot{u}} f \delta u \right) dt + \underbrace{\partial_{\dot{u}} f \delta u \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\partial_u f - \frac{d}{dt} \partial_{\dot{u}} f \right) \delta u dt,$$

gdzie ostatni człon znika na mocy (2.7). Zatem $\delta\mathcal{L} = 0$, jeśli

$$\partial_u f - \frac{d}{dt} \partial_{\dot{u}} f = 0. \quad (2.8)$$

Rozwiązanie powyższego zwyczajnego równania liniowego daje funkcję $u(t)$, która ekstremalizuje funkcjonal $\mathcal{L}[u, \dot{u}]$. Jeśli funkcji $u(t)$ jest więcej, tzn. $\mathbf{u}(t) = [u^1(t), \dots, u^m(t)]$, wówczas (2.8) przyjmuje postać układu równań Eulera-Lagrange'a

$$\partial_{u^k} f - \frac{d}{dt} \partial_{\dot{u}^k} f = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.9)$$

Powracając do problemu najkrótszej (w sensie metryki zadawanej przez g) krzywej łączącej punkty $\mathbf{r}(u^1(t_1), u^2(t_1))$ oraz $\mathbf{r}(u^1(t_2), u^2(t_2))$ mamy

$$\mathcal{L}[u^1, \dot{u}^1, u^2, \dot{u}^2] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(u^1, u^2) \dot{u}^i \dot{u}^j} dt.$$

Zatem dla

$$f(u^1, \dot{u}^1, u^2, \dot{u}^2) = \sqrt{g_{ij}(u^1, u^2) \dot{u}^i \dot{u}^j}$$

otrzymamy dla $k = 1, 2$

$$\begin{aligned}\partial_{u^k} f &= \frac{1}{2G} \partial_k g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j \\ \partial_{\dot{u}^k} f &= \frac{1}{2G} g_{ij} (\delta_{ik} \dot{u}^j + \dot{u}^i \delta_{jk}) = \frac{1}{2G} (g_{kj} \dot{u}^j + g_{ik} \dot{u}^i),\end{aligned}$$

gdzie $\partial_k = \partial_{u^k}$ oraz $G(t) = \sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j}$. Zatem (2.9) przyjmują postać

$$\frac{1}{G} \partial_k g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j - \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{G} (g_{kj} \dot{u}^j + g_{ik} \dot{u}^i) \right] = 0.$$

Aby uprościć otrzymane równania wprowadzamy nowy parametr τ , tak aby $d\tau = G(t)dt$. Wówczas

$$\partial_k g_{ij} \frac{du^i}{d\tau} \frac{du^j}{d\tau} - \frac{d}{d\tau} \left[g_{kj} \frac{du^j}{d\tau} + g_{ik} \frac{du^i}{d\tau} \right] = 0. \quad (2.10)$$

Ponieważ

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} \left[g_{kj} \frac{du^j}{d\tau} + g_{ik} \frac{du^i}{d\tau} \right] &= \partial_i g_{kj} \frac{du^i}{d\tau} \frac{du^j}{d\tau} + \partial_j g_{ik} \frac{du^j}{d\tau} \frac{du^i}{d\tau} + g_{kj} \frac{d^2 u^j}{d\tau^2} + g_{ik} \frac{d^2 u^i}{d\tau^2} \\ &= (\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik}) \frac{du^i}{d\tau} \frac{du^j}{d\tau} + 2g_{kj} \frac{d^2 u^j}{d\tau^2},\end{aligned}$$

to (2.10) przyjmie postać

$$(\partial_k g_{ij} - \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ik}) \frac{du^i}{d\tau} \frac{du^j}{d\tau} - 2g_{kj} \frac{d^2 u^j}{d\tau^2} = 0$$

i ostatecznie otrzymamy równanie różniczkowe geodezyjnej w postaci

$$g_{kj} \frac{d^2 u^j}{d\tau^2} + \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})}_{\Gamma_{kij}} \frac{du^i}{d\tau} \frac{du^j}{d\tau} = 0, \quad k = 1, 2, \quad (2.11)$$

gdzie Γ_{kij} są symbolami Christoffela (współczynnikami koneksji) I rodzaju lub

$$\frac{d^2 u^k}{d\tau^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{d\tau} \frac{du^j}{d\tau} = 0, \quad k = 1, 2,$$

gdzie

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k g^{mk} (\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$$

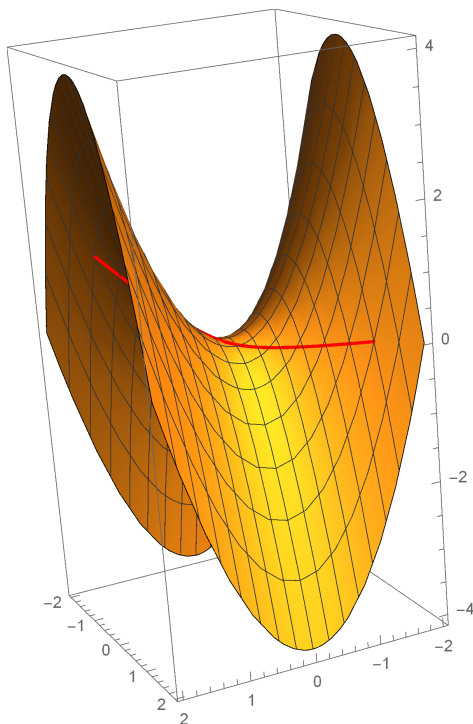
są współczynnikami Christoffela II rodzaju.

PRZYKŁAD 2.16. Wyznamy równania linii geodezyjnej dla powierzchni

$$\mathbf{r}(u_1, u_2) = [u_1, u_2, u_1^2 - u_2^2].$$

Wektory styczne do linii współrzędnych mają postać $\partial_1 \mathbf{r} = [1, 0, 2u_1]$, $\partial_2 \mathbf{r} = [0, 1, -2u_2]$. Stąd tensor metryczny i odwrotny do niego

$$\mathfrak{g}(u_1, u_2) = \begin{bmatrix} 1 + 4u_1^2 & -4u_1 u_2 \\ -4u_1 u_2 & 1 + 4u_2^2 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{g}^{-1}(u_1, u_2) = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} 1 + 4u_2^2 & 4u_1 u_2 \\ 4u_1 u_2 & 1 + 4u_1^2 \end{bmatrix},$$



Rysunek 2.2. Krzywa geodezyjna na powierzchni $r(u_1, u_2) = [u_1, u_2, u_1^2 - u_2^2]$ łącząca punkty $r(1.5, -1)$ oraz $r(-1.5, 1.5)$.

gdzie $g = 1 + 4u_1^2 + u_2^2$. W konsekwencji niezerowymi symbolami Christoffela

$$\Gamma_{k|ij} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$$

są $\Gamma_{1|11} = -\Gamma_{1|22} = 4u_1$, $\Gamma_{2|22} = -\Gamma_{2|11} = 4u_2$. Niezerowymi współczynnikami Christoffela II rodzaju są natomiast $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^2 = 4u_1/g$, $\Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{11}^1 = 4u_2/g$. Ostatecznie równania geodezyjne są postaci

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + \frac{4u_1}{1 + 4u_1^2 + 4u_2^2}(\dot{u}_1^2 - \dot{u}_2^2) &= 0 \\ \ddot{u}_2 - \frac{4u_2}{1 + 4u_1^2 + 4u_2^2}(\dot{u}_1^2 - \dot{u}_2^2) &= 0 \end{aligned}$$

Rozwiązania tych równań w postaci pokazuje Rys. 2.2.

PRZYKŁAD 2.17. Wyznaczyć symbole Christoffela I i II rodzaju oraz równania linii geodezyjnej dla powierzchni

$$r(u_1, u_2) = [u_1, u_2, u_1 u_2].$$

PRZYKŁAD 2.18. Pokazać, że jeżeli linie współrzędnych są prostopadłe w każdym punkcie powierzchni S , tzn.

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix},$$

to współczynniki Christoffela przyjmują postać:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}\partial_1 \ln g_{11}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2}\partial_2 \ln g_{11}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2g_{11}}\partial_1 g_{22}$$

oraz

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \partial_2 \ln g_{22}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} \partial_1 \ln g_{22}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2g_{22}} \partial_2 g_{11}.$$

PRZYKŁAD 2.19. Wykorzystując wyniki z poprzedniego Przykładu, pokazać, że równania geodezyjnych na sferze mają postać

$$\ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0, \quad \ddot{\varphi} + 2 \operatorname{ctg} \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0.$$

2.7. Idea krzywizny Gaussa

W dowolnym punkcie $p = \mathbf{r}(u) \in S$ jednostkowy wektor normalny do regularnej powierzchni S może być wyznaczony jako

- $\mathbf{n}_p = \frac{\partial_1 \mathbf{r}|_p \times \partial_2 \mathbf{r}|_p}{|\partial_1 \mathbf{r}|_p \times \partial_2 \mathbf{r}|_p}$, gdy $p \in \mathbf{r}(U)$ i powierzchnia opisana jest parametrycznie oraz
- $\mathbf{n}_p = \frac{\nabla f|_p}{|\nabla f|_p}$, gdy $p \in f^{-1}(0)$, a powierzchnia opisana przy pomocy równania.

Wektor normalny nie jest jednak określony jednoznacznie.

DEF. 2.9. *Orientacją* powierzchni S nazywa się wybór wektora normalnego \mathbf{n}_p w każdym punkcie $p \in S$ w taki sposób, aby przyporządkowanie $p \mapsto \mathbf{n}_p$ było ciągłe.

Powierzchnię, na której można wprowadzić orientację, nazywa się *orientowalną*.

Każdy płąt jest orientowalny, ale nie każda powierzchnia regularna jest orientowalna np. wstęga Möbiusa nie jest orientowalna³

$$\mathbf{r}(u_1, u_2) = \left[\cos u_1 + u_2 \cos \frac{u_1}{2} \cos u_1, \sin u_1 + u_2 \cos \frac{u_1}{2} \sin u_1, u_2 \sin \frac{u_1}{2} \right], \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}.$$

Jeśli pole wektorów \mathbf{n}_p zadaje orientację, to pole $-\mathbf{n}_p$ zadaje orientację przeciwną. Spójna powierzchnia może mieć tylko te dwie orientacje.

Niech S będzie powierzchnią orientowalną z orientacją zadaną przez pole wektorów normalnych \mathbf{n}_p . Każdemu z nich, jako wektorowi o długości 1, odpowiada punkt s na jednostkowej sferze S^2 , dla którego \mathbf{n}_p jest wektorem radialnym.

DEF. 2.10 (Odwzorowanie Gaussa). Odwzorowanie $N : p \in S \mapsto S^2 \ni s \equiv \mathbf{n}(p)$ przyporządkowujące punktowi p powierzchni S punkt $s \in S^2$ na sferze wyznaczony przez wektor radialny $\mathbf{n}(p)$ zaczepiony w środku sfery, nazywa się *odwzorowaniem sferycznym* lub *odwzorowaniem Gaussa*.

$N : S \rightarrow S^2$ jest gładkim odwzorowaniem dwóch powierzchni, o ile przyporządkowanie $p \mapsto \mathbf{n}(p)$ jest gładkie.

PRZYKŁAD 2.20. Odwzorowanie sferyczne dla płaszczyzny jest odwzorowaniem stałym: każdemu punktowi płaszczyzny odpowiada ten sam punkt na sferze.

Odwzorowanie sferyczne dla sfery jest identycznością.

Krzywiznę powierzchni w punkcie $p \in S$ Gauss wyobrażał sobie następująco: powierzchnia jest w okolicy punktu p tym bardziej zakrzywiona, im większym zmianom ulega wektor normalny do powierzchni w okolicy punktu p mierzony (z użyciem przekształcenia sferycznego) jako fragment powierzchni sfery.

³ $\mathbf{r}(\mathbb{R}^2)$ nie jest otwarte w \mathbb{R}^3 , zatem to nie jest dyfeomorfizm!

Dokładniej: Niech $D_\epsilon \subset \mathbb{R}^2$ będzie otwartym dyskiem o promieniu ϵ i niech $p = \mathbf{r}(0, 0) \in S$. Wówczas krzywiznę Gaussa K_G (z dokładnością do znaku) można rozumieć jako

$$|K_G(p)| = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|(N \circ \mathbf{r})(D_\epsilon)|}{|\mathbf{r}(D_\epsilon)|},$$

gdzie $|\cdot|$ oznacza pole powierzchni zbioru. Precyzyjną definicję odłożymy na później (Def. 2.15).

2.8. Własności przekształcenia sferycznego

Różniczka $dN_p : T_p S \rightarrow T_s S^2$ wyznacza, zgodnie z (2.2), odwzorowanie styczne przestrzeni wektorowych $T_p S$ oraz $T_s S^2$. Ponieważ \mathbf{n}_p jest prostopadły zarówno do $T_p S$ jak i do $T_s S^2$, obie te przestrzenie mają to samo nachylenie w przestrzeni \mathbb{R}^3 , są zatem izomorficzne. Zauważmy ponadto, że

$$\mathbb{R}^3 \ni \partial_i \mathbf{n}_p \equiv \partial_i N_p = dN_p(\partial_i \mathbf{r}) \in T_p S \quad (2.12)$$

DEF. 2.11. Liniowe przekształcenie $dN_p : T_p S \rightarrow T_s S^2 \simeq T_p S$ nazywa się operatorem Weingartena.

LEMAT 1. Operator Weingartena jest symetryczny względem indukowanego iloczynu skalarnego na S , tzn.

$$\langle dN_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_p = \langle \mathbf{v}, dN_p(\mathbf{w}) \rangle_p. \quad (2.13)$$

Dowód: Jeśli $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, to równość (2.13) wynika z symetryczności iloczynu skalarnego. Niech $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$. Równość (2.13) wystarczy sprawdzić na wektorach bazowych. Mamy

$$\forall \mathbf{w} \in T_p S \quad dN_p(\mathbf{w}) = \partial_1 \mathbf{n}_p w^1 + \partial_2 \mathbf{n}_p w^2.$$

W szczególności dla $\partial_1 \mathbf{r}|_p \equiv [1, 0]$ oraz $\partial_2 \mathbf{r}|_p \equiv [0, 1]$ mamy

$$dN_p(\partial_1 \mathbf{r}|_p) = \partial_1 \mathbf{n}_p, \quad dN_p(\partial_2 \mathbf{r}|_p) = \partial_2 \mathbf{n}_p \quad (2.14)$$

Różniczkując warunki ortogonalności

$$\begin{cases} \partial_1 \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_p = 0 \\ \partial_2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_p = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \partial_2 \partial_1 \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_p + \partial_1 \mathbf{r} \cdot \partial_2 \mathbf{n}_p = 0 \\ \partial_1 \partial_2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_p + \partial_2 \mathbf{r} \cdot \partial_1 \mathbf{n}_p = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

i odejmując je stronami otrzymamy

$$\partial_1 \mathbf{r} \cdot \partial_2 \mathbf{n}_p = \langle \partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{n} \rangle_p = \langle \partial_2 \mathbf{r}, \partial_1 \mathbf{n} \rangle_p = \langle \partial_1 \mathbf{n}, \partial_2 \mathbf{r} \rangle_p.$$

Z drugiej strony

$$\langle \partial_1 \mathbf{r}, dN(\partial_2 \mathbf{r}) \rangle_p = \langle \partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{n} \rangle_p = \langle \partial_1 \mathbf{n}, \partial_2 \mathbf{r} \rangle_p = \langle dN(\partial_1 \mathbf{r}), \partial_2 \mathbf{r} \rangle_p,$$

co dowodzi, że dN_p jest symetryczny na wektorach bazowych. \square

Zatem wartości własne operatora Weingartena są rzeczywiste, a jego unormowane wektory własne tworzą bazę ortonormalną w każdej przestrzeni stycznej $T_p S$. Wykorzystamy te własności w dalszej części.

Nietrudno wyznaczyć macierz operatora Weingartena $\mathcal{N} = [\mathcal{N}_{ij}]$ w bazie $\{\partial_1 \mathbf{r}|_p, \partial_2 \mathbf{r}|_p\}$. Z definicji macierzy odwzorowania

$$dN(\partial_j \mathbf{r}) = \sum_i \mathcal{N}_{ji} \partial_i \mathbf{r}$$

zatem

$$\langle \partial_m \mathbf{r}, dN(\partial_j \mathbf{r}) \rangle_p = \sum_i \mathcal{N}_{ji} g_{im}. \quad (2.16)$$

Lewa strona na mocy (2.14) może być zapisana jako

$$\langle \partial_m \mathbf{r}, dN(\partial_j \mathbf{r}) \rangle_p = \langle \partial_m \mathbf{r}, \partial_j \mathbf{n} \rangle_p, \quad m, j = 1, 2.$$

Tradycyjnie (w notacji Gaussa) współczynniki te traktuje się jako funkcje na U oraz oznacza się jako

$$L(u^1, u^2) = \langle \partial_1 \mathbf{r}, \partial_1 \mathbf{n} \rangle_p, \quad M(u^1, u^2) = \langle \partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{n} \rangle_p = \langle \partial_2 \mathbf{r}, \partial_1 \mathbf{n} \rangle_p, \quad N(u^1, u^2) = \langle \partial_2 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{n} \rangle_p.$$

Zbierzmy je w macierz

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$$

i przepiszmy dzięki temu (2.16) jako $\mathcal{I} = \mathcal{G} \cdot \mathcal{N}$. W konsekwencji

$$\mathcal{N} = \mathcal{G}^{-1} \cdot \mathcal{I} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} GL - FM & GM - FN \\ EM - FL & EN - FM \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że niezmienniki przekształcenia dN_p określone przez $\det \mathcal{N}$ i $\text{tr} \mathcal{N}$ wynoszą odpowiednio

$$\det \mathcal{N} = \frac{LN - M^2}{GE - F^2}, \quad (2.17)$$

$$\text{tr} \mathcal{N} = \frac{GL - 2FM + EN}{GE - F^2} \quad (2.18)$$

Z uwagi na warunki ortogonalności (2.15) współczynniki L, M, N mogą być wyznaczone tylko w oparciu o znajomość parametryzacji. Rzeczywiście z punktu widzenia \mathbb{R}^3

$$\langle \partial_i \mathbf{r}, \partial_j \mathbf{n} \rangle_p = -\mathbf{n}_p \cdot \partial_{ij}^2 \mathbf{r}, \quad \text{oraz} \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3,$$

zatem

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}) \cdot \partial_{11}^2 \mathbf{r} \\ M &= -\frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}) \cdot \partial_{12}^2 \mathbf{r} \\ N &= -\frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}) \cdot \partial_{22}^2 \mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.19)$$

DEF. 2.12 (II forma podstawowa powierzchni). II formą podstawową powierzchni nazywamy formę kwadratową określoną na S jako

$$I_2|_p(\mathbf{v}) = -\langle dN_p(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle_p$$

Jeśli $\mathbf{v} = v^1 \partial_1 \mathbf{r} + v^2 \partial_2 \mathbf{r}$, to

$$\begin{aligned} I_2|_p(\mathbf{v}) &= -\langle v^1 dN(\partial_1 \mathbf{r}) + v^2 dN(\partial_2 \mathbf{r}), v^1 \partial_1 \mathbf{r} + v^2 \partial_2 \mathbf{r} \rangle_p \\ &= -[v^1 \ v^2] \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Powyższy wzór oznacza, że macierzą formy I_2 jest $-\mathcal{I}$.

PRZYKŁAD 2.21. Wyznamy przekształcenie sferyczne, operator Weingartena i jego macierz w bazie $\{\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}\}$ dla powierzchni

$$\mathbf{r}(u_1, u_2) = [u_1, u_2, u_1^2 - u_2^2].$$

Wektory styczne do linii współrzędnych mają postać $\partial_1 \mathbf{r} = [1, 0, 2u_1]$, $\partial_2 \mathbf{r} = [0, 1, -2u_2]$, a wektor normalny w punkcie $p = \mathbf{r}(u_1, u_2)$ jest

$$\mathbf{n}_{(u_1, u_2)} = \frac{\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}}{|\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}|} = \frac{[-2u_1, 2u_2, 1]}{\sqrt{g}},$$

gdzie $g = 1 + 4u_1^2 + 4u_2^2$. Zatem przekształcenie sferyczne $N : p = \mathbf{r}(u_1, u_2) \mapsto s \in S^2$, gdzie s określony jest przez wektor radialny $[-2u_1, 2u_2, 1]/\sqrt{g}$.

Aby wyznaczyć różniczkę $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ wyznaczymy

$$\partial_1 \mathbf{n}_{(u_1, u_2)} = -\frac{1}{2}g^{-3/2} \partial_1 g [-2u_1, 2u_2, 1] + g^{-1/2} [-2, 0, 0] = g^{-3/2} [-2(1 + 4u_2^2), -8u_1 u_2, -4u_1]$$

oraz

$$\partial_2 \mathbf{n}_{(u_1, u_2)} = -\frac{1}{2}g^{-3/2} \partial_2 g [-2u_1, 2u_2, 1] + g^{-1/2} [0, 2, 0] = g^{-3/2} [8u_1 u_2, 2(1 + 4u_1^2), -4u_2].$$

Zatem różniczka $\mathbf{n}_{(u_1, u_2)}$ w bazie zero-jedynkowej $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ w \mathbb{R}^2 ma postać

$$d\mathbf{n}_{(u_1, u_2)} = g^{-3/2} \begin{bmatrix} -2(1 + 4u_2^2) & 8u_1 u_2 \\ -8u_1 u_2 & 2(1 + 4u_1^2) \\ -4u_1 & -4u_2 \end{bmatrix}$$

Ponieważ $d\mathbf{n}_{(u_1, u_2)}(\mathbf{e}_1) = dN_p(\partial_1 \mathbf{r})$ oraz $d\mathbf{n}_{(u_1, u_2)}(\mathbf{e}_2) = dN_p(\partial_2 \mathbf{r})$, to macierz odwzorowania Weingartena $\mathcal{N} = [\mathcal{N}_{ij}]$ można wyznaczyć z warunków

$$\begin{aligned} dN_p(\partial_1 \mathbf{r}) &= g^{-3/2} \begin{bmatrix} -2(1 + 4u_2^2) \\ -8u_1 u_2 \\ -4u_1 \end{bmatrix} = \mathcal{N}_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u_1 \end{bmatrix} + \mathcal{N}_{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2u_2 \end{bmatrix} \\ dN_p(\partial_2 \mathbf{r}) &= g^{-3/2} \begin{bmatrix} 8u_1 u_2 \\ 2(1 + 4u_1^2) \\ -4u_2 \end{bmatrix} = \mathcal{N}_{21} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u_1 \end{bmatrix} + \mathcal{N}_{22} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2u_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Stąd wynika

$$\mathcal{N} = g^{-3/2} \begin{bmatrix} -2(1 + 4u_2^2) & 8u_1 u_2 \\ -8u_1 u_2 & 2(1 + 4u_1^2) \end{bmatrix}.$$

Można także wykorzystać wzory (2.19), aby wyznaczyć macierz \mathcal{I} złożoną z funkcji L, M, N , a następnie wykorzystać $\mathcal{N} = \mathfrak{g}^{-1} \cdot \mathcal{I}$.

PRZYKŁAD 2.22. Wyznaczyć przekształcenie sferyczne, operator Weingartena i jego macierz w bazie $\{\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}\}$ dla powierzchni

$$\mathbf{r}(u_1, u_2) = [u_1, u_1 u_2, u_2].$$

2.9. Krzywizna normalna, Gaussa i krzywizny główne

Do określenia krzywizny powierzchni można wykorzystać krzywiznę krzywych leżących na tej powierzchni. Niech $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ będzie krzywą na S parametryzowaną łukowo, taką że $\gamma(0) = p$ oraz $\dot{\gamma}(0) = v \in T_p S$. Niech $\mathbf{n}(p)$ będzie jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni S w punkcie p oraz niech $N : S \rightarrow S^2$ będzie odwzorowaniem sferycznym tej powierzchni.

DEF. 2.13. Krzywizną normalną κ_n krzywej $\gamma(s)$ na S nazywamy rzut jej wektora przyspieszenia na kierunek normalny do powierzchni w danym punkcie $p = \gamma(s)$ wyznaczony przez $\mathbb{R}^3 \ni \mathbf{n}(\gamma(s)) \equiv N(\gamma(s)) \in S^2$, tzn.

$$\kappa_n(p) = \gamma''(s) \cdot \mathbf{n}(\gamma(s)) \Big|_{p=\gamma(s)}.$$

Tw. 2.3 (Tw. Meusnier). *Krzywizna normalna krzywej $\gamma(s)$ jest wyznaczona przez II formę podstawową powierzchni, tzn.*

$$\kappa_n(p) = I_2|_{\gamma(s)}(\gamma'(s)), \quad p = \gamma(s) \tag{2.21}$$

Dowód: Ponieważ $\gamma'(s) \cdot \mathbf{n}(\gamma(s)) = 0$, to

$$\gamma''(s) \cdot \mathbf{n}(\gamma(s)) + \gamma'(s) \cdot \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \mathbf{n}(\gamma(s)) = 0.$$

Dodatkowo $dN_p(v) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \mathbf{n}(\gamma(s))$, $v \in T_{\gamma(0)} S$. W konsekwencji

$$I_2|_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle_p = -\frac{d}{ds} \mathbf{n}(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \gamma''(0) \cdot \mathbf{n}(\gamma(0)).$$

Porównując z Def. 2.13, w której $p = \gamma(0)$, otrzymamy żadaną relację. □

Przywołując Def. 1.9, dla krzywej biregularnej, możemy zapisać relację $\gamma''(s) = K(p)N(s)$, gdzie $K(p)$ jest krzywizną krzywej, a $N(s)$ wektorem normalnym (do krzywej). Wektory $N(s) \in \mathbb{R}^3$ oraz $\mathbf{n}(\gamma(s)) \in \mathbb{R}^3$ nie muszą być współliniowe! Zatem

$$\kappa_n(s) = K(p)N(s) \cdot \mathbf{n}(\gamma(s)).$$

Dla krzywej parametryzowanej w dowolny sposób parametrem t mamy

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma'(s) \frac{ds}{dt} = \gamma'(s) |\dot{\gamma}(t)|,$$

zatem $\gamma'(s) = \dot{\gamma}(t) / |\dot{\gamma}(t)|$. Wykorzystując (2.21) i pamiętając, że I_2 jest formą kwadratową otrzymamy

$$\kappa_n(t) = I_2|_{\gamma(t)} \left(\frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} \right) = \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|^2} I_2|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) = \frac{I_2|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))}{I_1|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))}.$$

Zatem krzywizna normalna w danym punkcie zależy od wyboru kierunku określonego przez wektory styczne do różnych krzywych. Wielkości

$$\kappa_{np}(v) = \frac{I_2|_p(v)}{I_1|_p(v)}, \quad v \in T_p S$$

zależne o kierunku v charakteryzują krzywiznę w punkcie p .

DEF. 2.14 (Kierunki i krzywizny główne). Oznaczmy dwie wartości własne odwzorowania Weingartena $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ przez $\{-k_1, -k_2\}$, tzn.

$$dN_p(\mathbf{w}_i) = -k_i \mathbf{w}_i, \quad i = 1, 2.$$

Wówczas wielkości $k_1, k_2, k_1 \leq k_2$, nazwiemy *krzywiznami głównymi* w punkcie p , a odpowiadające im jednostkowe wektory własne $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ — *kierunkami głównymi* w punkcie p .

Podstawowe własności kierunków i krzywizn głównych są następujące:

- (1) $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ tworzą ortonormalną bazę w $T_p S$.
Wynika to z symetryczności odwzorowania Weingartena.
- (2) Krzywizny główne są krzywiznami normalnymi dla kierunków głównych.
Rzeczywiście

$$\kappa_{np}(\mathbf{w}_j) = \frac{I_2|_p(\mathbf{w}_j)}{I_1|_p(\mathbf{w}_j)} = \frac{-\langle dN_p(\mathbf{w}_j), \mathbf{w}_j \rangle_p}{\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_j \rangle_p} = \frac{k_j \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_j \rangle_p}{\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_j \rangle_p} = k_j, \quad j = 1, 2.$$

- (3) Niech \mathbf{e} będzie jednostkowym wektorem w $T_p S$ i niech $\cos \theta = \langle \mathbf{e}, \mathbf{w}_1 \rangle_p$ oraz $\sin \theta = \langle \mathbf{e}, \mathbf{w}_2 \rangle_p$. Wówczas słuszny jest wzór Eulera

$$\kappa_{np}(\mathbf{e}) = I_{2p}(\mathbf{e}) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

Dla jednostkowego wektora $\mathbf{e} = \cos \theta \mathbf{w}_1 + \sin \theta \mathbf{w}_2$ mamy bowiem

$$\kappa_{np}(\mathbf{e}) = I_{2p}(\mathbf{e}) = \langle k_1 \cos \theta \mathbf{w}_1 + k_2 \sin \theta \mathbf{w}_2, \cos \theta \mathbf{w}_1 + \sin \theta \mathbf{w}_2 \rangle_p = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta. \quad (2.22)$$

- (4) Zbiór wartości krzywizn normalnych na wektorach jednostkowych jest przedziałem $[k_1, k_2]$. Rzeczywiście z (2.22) wynika że

$$\kappa_{np}(\mathbf{e}) = k_1 + (k_2 - k_1) \sin^2 \theta.$$

Ponieważ $0 \leq \sin \theta \leq 1$, to $k_1 \leq \kappa_{np}(\mathbf{e}) \leq k_2$.

DEF. 2.15 (Krzywizna Gaussa i średnia). Niech S będzie zorientowaną powierzchnią oraz $N : S \rightarrow S^2$ jej odwzorowaniem sferycznym. *Krzywizną Gaussa* nazywamy funkcję $K_G : S \rightarrow \mathbb{R}$ określoną jako

$$K_G(p) = \det dN_p.$$

Krzywizną średnią nazywamy

$$\bar{K}(p) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} dN_p.$$

Na bazie (2.17) mamy zatem

$$K_G = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{GE - F^2}, \quad (2.23)$$

$$\bar{K} = \frac{k_1 + k_2}{2} = -\frac{GL - 2FM + EN}{2(GE - F^2)}. \quad (2.24)$$

Przypominamy następującą geometryczną interpretację krzywizny Gaussa.

Tw. 2.4. Niech $D_\epsilon \subset \mathbb{R}^2$ będzie otwartym dyskiem o promieniu ϵ i niech $p = \mathbf{r}(0, 0) \in S$. Wówczas, jeśli $K_G(p) \neq 0$, to

$$|K_G(p)| = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|(N \circ \mathbf{r})(D_\epsilon)|}{|\mathbf{r}(D_\epsilon)|},$$

gdzie $|\cdot|$ oznacza pole powierzchni zbioru.

Dowód: Idea dowodu opiera się na pokazaniu (z użyciem twierdzenia o wartości średniej dla całek wielokrotnych), że stosunek pól

$$\begin{aligned} |(N \circ \mathbf{r})(D_\epsilon)| &= \int_{D_\epsilon} |\partial_1(N \circ \mathbf{r}) \times \partial_2(N \circ \mathbf{r})| du_1 du_2 = \int_{D_\epsilon} |\det dN_{(u_1, u_2)}| |\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}| du_1 du_2 \\ |\mathbf{r}(D_\epsilon)| &= \int_{D_\epsilon} |\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}| du_1 du_2 \end{aligned}$$

w granicy niewielkiego dysku i przy założeniu gładkości odwzorowania $\mathbf{r}(u_1, u_2)$, wynosi $|\det dN_p| = |K_G(p)|$. \square

PRZYKŁAD 2.23. Wyznamy różne rodzaje krzywizn dla powierzchni

$$\mathbf{r}(u_1, u_2) = [u_1, u_2, u_1^2 - u_2^2].$$

Aby wyznaczyć krzywizny normalne $\kappa_{np}(\mathbf{v})$ obliczymy składowe L, M, N II formy podstawowej. Dla wektora $\mathbf{v} = v^1 \partial_1 \mathbf{r} + v^2 \partial_2 \mathbf{r}$ mamy na mocy (2.20)

$$I_{2p}(\mathbf{v}) = -(L(u_1, u_2)(v^1)^2 + 2M(u_1, u_2)v^1 v^2 + N(u_1, u_2)(v^2)^2),$$

gdzie

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}) \cdot \partial_{11}^2 \mathbf{r} = -2g^{-1/2}, \\ M &= -\frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}) \cdot \partial_{12}^2 \mathbf{r} = 0 \\ N &= -\frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}) \cdot \partial_{22}^2 \mathbf{r} = 2g^{-1/2}. \end{aligned}$$

Zatem krzywizny normalne określa wzór

$$\kappa_{np}(\mathbf{v}) = \frac{2(v^1)^2 - 2(v^2)^2}{\sqrt{g}|\mathbf{v}|^2} = \frac{2(v^1)^2 - 2(v^2)^2}{\sqrt{1 + 4u_1^2 + 4u_2^2}[(1 + 4u_1^2)(v^1)^2 - 8u_1 u_2 v^1 v^2 + (1 + 4u_2^2)(v^2)^2]}.$$

Aby wyznaczyć krzywiznę Gaussa i krzywizny główne przypomnijmy macierz odwzorowania Weingartena dla tej powierzchni

$$\mathcal{N} = g^{-3/2} \begin{bmatrix} -2(1 + 4u_2^2) & 8u_1 u_2 \\ -8u_1 u_2 & 2(1 + 4u_1^2) \end{bmatrix}.$$

Wielkość $K_G = \det \mathcal{N} = -4g^{-2}$ określa krzywiznę Gaussa, a $\bar{K} = -\frac{1}{2} \text{tr} \mathcal{N} = 4(u_2^2 - u_1^2)g^{-3/2}$ przedstawia krzywiznę średnią. Wartości własne tego odwzorowania spełniają równanie

$$x^2 + 8xg^{-3/2}(u_2^2 - u_1^2) - 4g^{-2} = 0. \quad (2.25)$$

Pierwiastki tego równania ze znakiem minus określają krzywizny główne. Zauważmy, że współczynniki tego równania dają się wyrazić przez K_G i \bar{K} . Rzeczywiście, (2.25) można przepisać jako

$$x^2 + 2\bar{K}x + K_G = 0,$$

a wówczas

$$k_{1,2} = \bar{K} \pm \sqrt{\bar{K}^2 - K_G^2}.$$

Można pokazać, że wyrażenia na $k_{1,2}$ są słuszne także w przypadku dowolnej powierzchni.

2.10. Współczynniki koneksji metrycznej. Równania strukturalne

W każdym punkcie $p \in S$ regularnej powierzchni mamy bazę $\{\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}\}$ w przestrzeni stycznej $T_p S$ oraz wektor normalny \mathbf{n}_p prostopadły do $T_p S$. O własnościach geometrycznych powierzchni decydują iloczyny skalarne $\langle \partial_{ij}^2 \mathbf{r}, \partial_l \mathbf{r} \rangle_p$, $\langle \partial_{ijk}^3 \mathbf{r}, \partial_l \mathbf{r} \rangle_p, \dots$, które pozwalają wyznaczyć składowe wektorów $\partial_{ij}^2 \mathbf{r}, \partial_{ijk}^3 \mathbf{r}, \dots$ w bazie $\{\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}, \mathbf{n}\}$ przestrzeni \mathbb{R}^3 . Wiemy już, że

$$\partial_j \mathbf{n} = dN_p(\partial_j \mathbf{r}) = \sum_k \mathcal{N}_{kj} \partial_k \mathbf{r}, \quad (2.26)$$

gdzie $[\mathcal{N}_{ij}]$ jest macierzą przekształcenia liniowego dN_p w bazie $\{\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}\}$.

Niech

$$\partial_{ij}^2 \mathbf{r} = \Gamma_{ij}^1 \partial_1 \mathbf{r} + \Gamma_{ij}^2 \partial_2 \mathbf{r} + \mathcal{I}_{ij} \mathbf{n}, \quad (2.27)$$

gdzie $[\mathcal{I}_{ij}]$ jest macierzą II formy podstawowej. Zatem

$$\partial_k \mathbf{r} \cdot \partial_{ij}^2 \mathbf{r} \Big|_p = \sum_m \Gamma_{ij}^m \langle \partial_k \mathbf{r}, \partial_m \mathbf{r} \rangle_p = \sum_m \Gamma_{ij}^m g_{km} = \Gamma_{k|ij}.$$

Z drugiej strony różniczkowanie $g_{km} = \langle \partial_k \mathbf{r}, \partial_m \mathbf{r} \rangle_p$ daje

$$\partial_l g_{km} = \partial_{kl}^2 \mathbf{r} \cdot \partial_m \mathbf{r} + \partial_k \mathbf{r} \cdot \partial_{lm}^2 \mathbf{r} = \Gamma_{m|kl} + \Gamma_{k|lm}. \quad (2.28)$$

Biorąc cykliczne permutacje indeksów $\{lkm\}$ otrzymamy dwie dodatkowe relacje

$$\partial_k g_{ml} = \partial_{mk}^2 \mathbf{r} \cdot \partial_l \mathbf{r} + \partial_m \mathbf{r} \cdot \partial_{kl}^2 \mathbf{r} = \Gamma_{l|km} + \Gamma_{m|kl}, \quad (2.29)$$

$$\partial_m g_{lk} = \partial_{ml}^2 \mathbf{r} \cdot \partial_k \mathbf{r} + \partial_l \mathbf{r} \cdot \partial_{mk}^2 \mathbf{r} = \Gamma_{k|ml} + \Gamma_{l|mk}. \quad (2.30)$$

Dodając (2.28) oraz (2.29) i odejmując (2.30) otrzymamy symbole Christoffela I rodzaju

$$\Gamma_{m|kl} = \frac{1}{2} (\partial_l g_{km} + \partial_k g_{ml} - \partial_m g_{kl})$$

znane już ze wzoru (2.11). Symbole Christoffela Γ_{kl}^m II rodzaju mają zatem postać

$$\Gamma_{kl}^m = \sum_r g^{rm} \Gamma_{r|kl} = \frac{1}{2} \sum_r g^{rm} (\partial_l g_{kr} + \partial_k g_{rl} - \partial_r g_{kl}).$$

Oba rodzaje symboli Christoffela stanowią współczynniki koneksji metrycznej na powierzchni S : struktury, która umożliwi porównywanie obiektów wektorowych (tensorowych) w różnych punktach powierzchni. W ogólności, koneksja jest strukturą niezależną od tensora metrycznego, ale staje się z nim związana, jeśli zażądamy pewnych dodatkowych warunków przesunięcia równoległego (np. zachowanie długości wektora podczas przesuwania równoległego).

Niech teraz

$$\partial_{ijl}^3 \mathbf{r} = \sum_k A_{ijl}^k \partial_i \mathbf{r} + B_{ijl} \mathbf{n}.$$

Różniczkując (2.27) po u^l otrzymamy

$$\partial_{ijl}^3 \mathbf{r} = \partial_l \left[\sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \mathbf{r} + \mathcal{I}_{ij} \mathbf{n} \right] = \sum_k \left(\partial_l \Gamma_{ij}^k \partial_k \mathbf{r} + \Gamma_{ij}^k \partial_{kl}^2 \mathbf{r} \right) + \partial_l \mathcal{I}_{ij} \mathbf{n} + \mathcal{I}_{ij} \partial_l \mathbf{n}$$

Wykorzystując powtórnie (2.27) i (2.26) otrzymamy

$$\partial_{ijl}^3 \mathbf{r} = \sum_k \left(\partial_l \Gamma_{ij}^k + \sum_r \Gamma_{ij}^r \Gamma_{rl}^k + \mathcal{I}_{ij} \mathcal{N}_{kl} \right) \partial_k \mathbf{r} + \left(\sum_k \Gamma_{ij}^k \mathcal{I}_{kl} + \partial_l \mathcal{I}_{ij} \right) \mathbf{n}.$$

W konsekwencji

$$A_{ijl}^k = \partial_l \Gamma_{ij}^k + \sum_r \Gamma_{ij}^r \Gamma_{rl}^k + \mathcal{I}_{ij} \mathcal{N}_{kl}$$

$$B_{ijl} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \mathcal{I}_{kl} + \partial_l \mathcal{I}_{ij}.$$

Założenie o gładkości parametryzacji implikuje symetrię wielkości A oraz B w dolnych wskaźnikach, w szczególności $A_{ijl}^k = A_{ilj}^k$ oraz $B_{ijl} = B_{ilj}$. Wykorzystując pierwszy z nich otrzymamy tożsamość Gaussa

$$\partial_l \Gamma_{ij}^k - \partial_j \Gamma_{il}^k + \sum_r \left(\Gamma_{ij}^r \Gamma_{rl}^k - \Gamma_{il}^r \Gamma_{rj}^k \right) = -(\mathcal{I}_{ij} \mathcal{N}_{kl} - \mathcal{I}_{il} \mathcal{N}_{kj}), \quad k, i, j, l = 1, 2, \quad (2.31)$$

która wskazuje na to, że symbole Christoffela, składowe macierzy przekształcenia Weingartena oraz składowe II formy podstawowej nie mogą być zupełnie dowolne: łączą je pewne warunki zgodności. W szczególności dla $l = k = 1$ oraz $j = i = 2$ prawa strona (2.31) przyjmie postać

$$-(\mathcal{I}_{22} \mathcal{N}_{11} - \mathcal{I}_{21} \mathcal{N}_{12}) = -\frac{1}{g} \left[-N(GL - FM) + M(GM - FN) \right] = \frac{1}{g} G(NL - M^2) = GK_G,$$

gdzie wykorzystaliśmy znane już relacje

$$\mathcal{I} = - \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} GL - FM & GM - FN \\ EM - FL & EN - FM \end{bmatrix}$$

oraz wzór (2.23) na krzywiznę Gaussa.

Tw. 2.5 (Egregium Gaussa). *Krzywizna Gaussa wyraża się wyłącznie przez składowe I formy podstawowej (składowe tensora metrycznego) i ma postać⁴*

$$K_G = \frac{1}{G} \left[\partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{21}^1 + \sum_r \left(\Gamma_{22}^r \Gamma_{r1}^1 - \Gamma_{21}^r \Gamma_{r2}^1 \right) \right]. \quad (2.32)$$

Z warunków symetrii $B_{ijl} = B_{ilj}$ wynikają tożsamości Codazzi-Mainarda postaci

$$\sum_r \left(\Gamma_{jl}^r \mathcal{I}_{ir} - \Gamma_{il}^r \mathcal{I}_{jr} \right) = \partial_j \mathcal{I}_{il} - \partial_i \mathcal{I}_{jl}, \quad i, j, l = 1, 2.$$

2.11. Przesunięcie równoległe i pochodna kowariantna

DEF. 2.16. Polem wektorowym wzdłuż krzywej $\gamma : (a, b) \rightarrow S$ na powierzchni S sparametryzowanej przez $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ nazywamy gładkie odwzorowanie $\mathbf{v} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, takie że $\mathbf{v}_t \in T_{\gamma(t)} S$ dla każdego $t \in (a, b)$. Zatem

$$\mathbf{v}_t = v^1(t) \partial_1 \mathbf{r}|_{\gamma(t)} + v^2(t) \partial_2 \mathbf{r}|_{\gamma(t)}.$$

Pochodna tego odwzorowania, mierząca zmiany pola wektorowego wzdłuż krzywej,

$$\dot{\mathbf{v}}_t = \frac{d}{dt} \mathbf{v}_t = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}_{t+\epsilon} - \mathbf{v}_t}{\epsilon}$$

⁴ W bardziej współczesnym sformułowaniu oznacza to, że dwie powierzchnie o tej samej krzywiznie Gaussa są lokalnie izometryczne!

nie jest już na ogół wektorem stycznym do powierzchni, bo wektor \dot{v}_t (z punktu widzenia \mathbb{R}^3) ma na ogół także składową prostopadłą do powierzchni S . Aby operacja różniczkowania była poprawnie zdefiniowana, tzn. aby wynik był wektorem stycznym do powierzchni, należy określić sposób przyporządkowania wektorowi $v_{t+\epsilon} \in T_{\gamma(t+\epsilon)}S$ wektora z przestrzeni $T_{\gamma(t)}S$.

DEF. 2.17 (Koneksja afiniczna). Koneksją afiniczną na powierzchni S nazywamy liniowe odwzorowanie $\Gamma : T_q S \rightarrow T_p S$ określone dla dowolnych $p, q \in S$, takie że $\Gamma \rightarrow \text{id}$ przy $q \rightarrow p$.

Odwzorowanie Γ , jako przekształcenie liniowe, jest określone poprzez wartości na wektorach bazowych

$$\Gamma(\partial_k \mathbf{r}|_q) = \beta_k^j(p, q) \partial_j \mathbf{r}|_p, \quad (2.33)$$

gdzie $\beta_k^j(p, q)$ jest macierzą tego odwzorowania zależną od punktów p i q . Jeśli ustalimy punkt p , to z uwagi na warunek $\Gamma \rightarrow \text{id}$ przy $q \rightarrow p$, możemy zapisać z dokładnością do wyrazów liniowych we współrzędnych punktów p i q ,

$$\beta_k^j(p, q) = \delta_k^j + \partial_r \beta_k^j|_{(p,q)}(q^r - p^r) + \dots \quad (2.34)$$

Koneksja afiniczna pozwala poprawnie zdefiniować operację różniczkowania pola wektorowego wzdłuż krzywej wprowadzając pojęcie *pochodnej kowariantnej*.

DEF. 2.18 (Pochodna kowariantna). *Pochodną kowariantną pola wektorowego v_t wzdłuż krzywej $\gamma(t)$ nazywamy wielkość*

$$Dv_t = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(v_{t+\epsilon}) - v_t}{\epsilon}.$$

Zauważmy, że dla bliskich sobie punktów $p = \gamma(t)$ oraz $q = \gamma(t + \epsilon)$ mamy $q^r - p^r = \epsilon \dot{u}^r + \dots$ z dokładnością do wyrazów liniowych w ϵ . W konsekwencji

$$\Gamma(v_{t+\epsilon}) = v^k(t + \epsilon) \beta_k^j(t, t + \epsilon) \partial_j \mathbf{r}|_p = (v^k(t) + \epsilon \dot{v}^k) (\delta_k^j + \epsilon \partial_r \beta_k^j \dot{u}^r) \partial_j \mathbf{r}|_p,$$

gdzie wykorzystaliśmy (2.33), (2.34) oraz rozwinięcie funkcji $v^k(t + \epsilon)$ w szereg Taylora z dokładnością do wyrazów liniowych w ϵ . Zatem

$$\begin{aligned} \Gamma(v_{t+\epsilon}) - v_t &= v^k(t) \partial_k \mathbf{r}|_p + \epsilon (v^k(t) \partial_r \beta_k^j \dot{u}^r \partial_j \mathbf{r}|_p + \dot{v}^k(t) \delta_k^j \partial_j \mathbf{r}|_p) - v^k(t) \partial_k \mathbf{r}|_p \\ &= \epsilon (\dot{v}^k + \Gamma_{rj}^k \dot{u}^r v^j) \partial_k \mathbf{r}|_p. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$Dv_t = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(v_{t+\epsilon}) - v_t}{\epsilon} = (\dot{v}^k + \Gamma_{rj}^k \dot{u}^r v^j) \partial_k \mathbf{r}|_p,$$

gdzie $\Gamma_{rj}^k \equiv \partial_r \beta_j^k$ są współczynnikami koneksji afinicznej (współczynnikami Christoffela II rodzaju).

Z punktu widzenia przestrzeni \mathbb{R}^3 definicja pochodnej kowariantnej może być równoważnie sformułowana jako

FAKT 2.3. Pochodna kowariantna pola wektorowego v_t spełnia relacje

$$Dv_t = \pi_{\gamma(t)}(\dot{v}_t), \quad (2.35)$$

gdzie $\pi_{\gamma(t)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_{\gamma(t)}S$ jest rzutowaniem prostopadłym.

Zauważmy, że $\dot{v}_t = Dv_t + N$, gdzie N jest wektorem prostopadłym do $T_{\gamma(t)}S$. W konsekwencji dla dowolnego pola wektorowego wzdłuż krzywej w_t ,

$$\dot{v}_t \cdot w_t|_{\gamma(t)} = \langle Dv_t, w_t \rangle_{\gamma(t)}.$$

Dowód: Wyznamy postać pochodnej kowariantnej z relacji (2.35). W tym celu obliczymy pochodną v_t w kierunku stycznym do krzywej $\gamma(t) = \mathbf{r}(u^1(t), u^2(t))$

$$\dot{v}_t = \frac{d}{dt} \left[v^1(t) \partial_1 \mathbf{r} + v^2(t) \partial_2 \mathbf{r} \right] = \sum_k \left[\dot{v}^k \partial_k \mathbf{r} + \sum_j v^k \dot{u}^j \partial_{kj}^2 \mathbf{r} \right],$$

a następnie wyznaczmy iloczyny skalarne z wektorami bazowymi $\{\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}\}$,

$$\langle Dv_t, \partial_s \mathbf{r} \rangle_{\gamma(t)} = \sum_k \left[\dot{v}^k \langle \partial_k \mathbf{r}, \partial_s \mathbf{r} \rangle_{\gamma(t)} + \sum_j v^k \dot{u}^j \partial_{kj}^2 \mathbf{r} \cdot \partial_s \mathbf{r} |_{\gamma(t)} \right].$$

Ponieważ $\partial_{kj}^2 \mathbf{r} \cdot \partial_s \mathbf{r} |_{\gamma(t)} = \sum_k g_{ks} \Gamma_{ij}^k$ to

$$\langle Dv_t, \partial_s \mathbf{r} \rangle_{\gamma(t)} = \langle \dot{v}_t, \partial_s \mathbf{r} \rangle_{\gamma(t)} = \sum_r \left(\dot{v}^r g_{rs} + \sum_{k,j} v^r \dot{u}^j \Gamma_{rj}^k g_{ks} \right). \quad (2.36)$$

Niech

$$Dv_t = (Dv_t)^1 \partial_1 \mathbf{r} + (Dv_t)^2 \partial_2 \mathbf{r},$$

wówczas

$$(Dv_t)^k = \sum_j g^{kj} \langle Dv_t, \partial_j \mathbf{r} \rangle_{\gamma(t)}.$$

Ostatecznie podstawiając (2.36) oraz wykorzystując $\sum_s g^{ks} g_{rs} = \delta_r^k$, otrzymamy

$$(Dv_t)^k = \sum_s g^{ks} \sum_r \left[\dot{v}^r g_{rs} + \sum_{p,j} v^r \dot{u}^j g_{ps} \Gamma_{rj}^p \right] = \dot{v}^k + \sum_{r,j} \Gamma_{rj}^k v^r \dot{u}^j.$$

Zatem

$$Dv_t = \sum_k \left(\dot{v}^k + \sum_{r,j} \Gamma_{rj}^k v^r \dot{u}^j \right) \partial_k \mathbf{r}. \quad (2.37)$$

□

Pochodna kowariantna nie zależy zatem bezpośrednio od tensora metrycznego, a tylko od współczynników koneksji.

2.11.1. Częstkowa pochodna kowariantna

Jeśli pole wektorowe v określone jest nie tylko wzdłuż krzywej, ale na powierzchni S , wówczas relację (2.37) można wyrazić w jeszcze innej formie

$$(Dv_t)^k = \dot{v}^k + \sum_{r,j} \Gamma_{rj}^k v^r \dot{u}^j = \sum_j \underbrace{\left(\partial_j v^k + \sum_r \Gamma_{rj}^k v^r \right)}_{v_{;j}^k} \dot{u}^j,$$

gdzie wielkość $v_{;j}^k$ nazywamy *częstkową pochodną kowariantną*. Współczynniki $[v_{;j}^k]$ tworzą tensor typu (1,1) i nie zależą od wyboru krzywej (tak jak kierunkowa pochodna kowariantna).

Własności częstkowej pochodnej kowariantnej

- (1) liniowość: $(\alpha v^k + \beta w^k)_{;j} = \alpha v^k_{;j} + \beta w^k_{;j}$,
- (2) reguła Leibniza: $(v^k w^r)_{;j} = v^k_{;j} w^r + v^k w^r_{;j}$,
- (3) pochodna kowariantna funkcji skalarnej jest równa pochodnej cząstkowej, tzn.

$$f_{;k} = \partial_k f.$$

PRZYKŁAD 2.24 (Pochodna kowariantna pola kowektorów). Pochodna kowariantna wielkości skalarnej $v^k \alpha_k$ jest równa pochodnej cząstkowej, zatem

$$\begin{aligned} \alpha_k \partial_j v^k + v^k \partial_j \alpha_k &= \partial_j (v^k \alpha_k) = (v^k \alpha_k)_{;j} = v^k_{;j} \alpha_k + v^k \alpha_{k;j} = (\partial_j v^k + \Gamma_{rj}^k v^r) \alpha_k + v^k \alpha_{k;j} \\ v^k \partial_j \alpha_k &= \Gamma_{rj}^k v^r \alpha_k + v^k \alpha_{k;j} \\ v^k \alpha_{k;j} &= (\partial_j \alpha_k - \Gamma_{kj}^r \alpha_r) v^k. \end{aligned}$$

Ostatecznie, z uwagi na dowolność v^k ,

$$\alpha_{k;j} = \partial_j \alpha_k - \Gamma_{kj}^r \alpha_r.$$

W podobny sposób uogólnia się pochodną kowariantną na pola tensorowe, np. dla tensora typu (1,1) mamy

$$A^k_{i;j} = \partial_j A^k_i + \Gamma_{nj}^k A^n_i - \Gamma_{ij}^n A^k_n. \quad (2.38)$$

2.11.2. Przesunięcie równoległe

DEF. 2.19. Pole wektorowe v_t jest przenoszone *równoległe* wzdłuż krzywej $\gamma(t)$, jeśli znika jego pochodna kowariantna w kierunku tej krzywej, tzn.

$$(Dv_t)^k = \dot{v}^k + \sum_{r,j} \Gamma_{rj}^k v^r \dot{t}^j = 0, \quad k = 1, 2. \quad (2.39)$$

PRZYKŁAD 2.25 (Przesunięcie równoległe na sferze). Dla sfery mamy $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^1 = \text{ctg} \theta$, $\Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta$. Zatem równania przesunięcia równoległego dla pola $v_t = [v^1(t), v^2(t)]$ wzdłuż krzywej $\gamma(t) = r[\theta(t), \varphi(t)]$ są następujące:

$$\begin{cases} \dot{v}^1 - \sin \theta \cos \theta v^2 \dot{\varphi} = 0 \\ \dot{v}^2 + \text{ctg} \theta (v^1 \dot{\varphi} + v^2 \dot{\theta}) = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

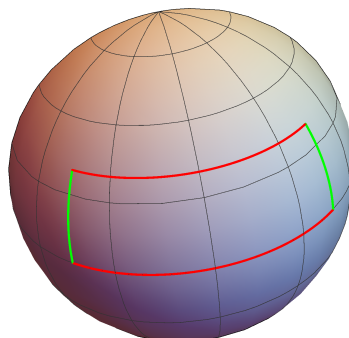
Niech $v_0 = [v_0^1, v_0^2]$ będzie jednostkowym wektorem zaczepionym na równiku w punkcie $r(\pi/2, 0)$. Dokonamy przesunięcia tego wektora wzdłuż krzywej zamkniętej na sferze pokazanej na Rys. 2.3

(1) Przesuwamy go równoległe wzdłuż równika $\theta = \pi/2$ do punktu $r(\pi/2, \pi/2)$. Bezpośrednio z (2.40) wynika, że $\dot{v}^1 = \dot{v}^2 = 0$, zatem w punkcie $r(\pi/2, \pi/2)$ przesunięty równoległe wektor v_0 ma te same składowe $[v_0^1, v_0^2]$.

(2) Przesuwamy go dalej wzdłuż południka $\varphi = \pi/2$ do punktu $r(\pi/3, \pi/2)$. Bezpośrednio z (2.40) mamy $v^1 = \text{const.} = v_0^1$ oraz $\dot{v}^2 + \text{ctg} \theta v^2 \dot{\theta} = 0$. Rozwiązaniem ostatniego równania jest $v^2 \sin \theta = \text{const.}$, a ponieważ $v^2(\theta = \pi/2) = v_0^2$, to $v^2(\theta = \pi/3) = v_0^2 / \sin(\pi/3) = 2/\sqrt{3} v_0^2$. Ostatecznie w punkcie $r(\pi/3, \pi/2)$ wektor v_0 ma składowe $[v_0^1, 2/\sqrt{3} v_0^2]$.

(3) Przesuwamy go dalej wzdłuż równoleżnika $\theta = \pi/3$ do punktu $r(\pi/3, 0)$. Bezpośrednio z (2.40) mamy

$$\begin{cases} v^1 - \frac{\sqrt{3}}{4} v^2 \dot{\varphi} = 0 \\ v^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} v^1 \dot{\varphi} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{dv^1}{d\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{4} v^2 \\ \frac{dv^2}{d\varphi} = -\frac{v^1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$



Rysunek 2.3. Krzywa zamknięta na sferze, wzdłuż której przesuwany jest wektor v .

Sprowadzając ostatni układ do pojedynczego równania II rzędu

$$\frac{d^2 v^1}{d\varphi^2} + \frac{1}{4} v^1 = 0$$

otrzymamy rozwiązanie postaci

$$v^1(\varphi) = C_1 \cos(\varphi/2) + C_2 \sin(\varphi/2), \quad v^2(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(-C_1 \sin(\varphi/2) + C_2 \cos(\varphi/2) \right).$$

Uwzględniając początkową orientację wektora

$$\begin{aligned} v_0^1 &= v^1(\varphi = \pi/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_1 + C_2) \\ \frac{2}{\sqrt{3}} v_0^2 &= v^2(\varphi = \pi/2) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}}(-C_1 + C_2) \end{aligned}$$

otrzymamy stałe C_1, C_2 w postaci

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_0^1 - v_0^2), \quad C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_0^1 + v_0^2).$$

Zatem w punkcie $r(\pi/3, 0)$ wektor v_0 ma składowe $[\sqrt{1/2}(v_0^1 - v_0^2), \sqrt{2/3}(v_0^1 + v_0^2)]$.

(4) Przesuwamy go dalej wzdłuż południka $\varphi = 0$ do punktu $r(\pi/2, 0)$. Równania przesunięcia równoległego są analogiczne do tych w punkcie (2). Mamy tylko inne warunki początkowe. Zatem $v^1 = \text{const.} = \sqrt{1/2}(v_0^1 - v_0^2)$ oraz $v^2 \sin \theta = \text{const.} = \sqrt{1/2}(v_0^1 + v_0^2)$ i w konsekwencji współrzędne przesuniętego równoległe wektora są $v(\theta = \pi/2, \varphi = 0) = \sqrt{1/2}[v_0^1 - v_0^2, v_0^1 + v_0^2]$. Łatwo sprawdzić, że jest on nadal jednostkowy, jeśli v_0 był jednostkowy. Ostatecznie kosinus kąta pomiędzy v_0 oraz $v(\theta = \pi/2, \varphi = 0)$

$$\begin{aligned} \cos \psi &= g_{11}(\pi/2, 0) v_0^1 v^1(\pi/2, 0) + g_{22}(\pi/2, 0) v_0^2 v^2(\pi/2, 0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} v_0^1 (v_0^1 - v_0^2) + \frac{1}{\sqrt{2}} v_0^2 (v_0^1 + v_0^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (v_0^1)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} (v_0^2)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

W ogólności, aby wyznaczyć zmianę wektora o współrzędnych a^i , jaka nastąpi w wyniku przesunięcia równoległego wzdłuż krzywej $\gamma(t) = \mathbf{r}(u^1(t), u^2(t))$, wystarczy rozpatrzyć przesunięcie wzdłuż niewielkiej pętli przechodzącej przez punkt $\mathbf{r}(\mathbf{u}_0)$. Infinitesimalna zmiana wektora w wyniku jego przesunięcia od punktu $\mathbf{r}(\mathbf{u}_0)$ do punktu $\mathbf{r}(\mathbf{u}_0 + d\mathbf{u})$ dany jest przez

$$da^k = -\Gamma_{ij}^k a^i du^j,$$

zatem zmiana wektora wzdłuż pętli jest

$$\delta a^k = -\oint \Gamma_{ij}^k(\mathbf{u}) a^i(\mathbf{u}) du^j. \quad (2.41)$$

Z uwagi na niewielkie rozmiary pętli możemy dokonać rozwinięć

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k(\mathbf{u}) &= \Gamma_{ij}^k(\mathbf{u}_0) + \partial_r \Gamma_{ij}^k(\mathbf{u}_0) \Delta u^r + \dots = (\Gamma_{ij}^k)_0 + (\partial_r \Gamma_{ij}^k)_0 \Delta u^r + \dots \\ a^k(\mathbf{u}) &= a^k(\mathbf{u}_0) + \Delta a^k = a^k(\mathbf{u}_0) - \Gamma_{ij}^k(\mathbf{u}_0) a^i(\mathbf{u}_0) \Delta u^j + \dots = a_0^k - (\Gamma_{ij}^k)_0 a_0^i \Delta u^j + \dots \end{aligned}$$

i podstawić je do (2.41). Otrzymamy z dokładnością do wyrazów liniowych w Δu^r

$$\begin{aligned} \delta a^k &= -\oint \left[(\Gamma_{ij}^k)_0 + (\partial_r \Gamma_{ij}^k)_0 \Delta u^r \right] \left[a_0^i - (\Gamma_{sr}^i)_0 a_0^s \Delta u^r \right] du^j \\ &= -(\Gamma_{ij}^k)_0 a_0^i \oint du^j + \left[(\Gamma_{ij}^k)_0 (\Gamma_{sr}^i)_0 - (\partial_r \Gamma_{sj}^k)_0 \right] a_0^s \oint \Delta u^r du^j \end{aligned}$$

Pierwszy z powyższych składników jest zerowy z uwagi na zamkniętość krzywej i równość wartości początkowych i końcowych \mathbf{u} . Natomiast całkując przez części możemy przekształcić drugą z całek do postaci

$$\oint \Delta u^r du^j = \int_{t_1}^{t_2} \Delta u^r \frac{du^j}{dt} dt = \Delta u^r u^j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \Delta u^j \frac{du^r}{dt} dt = -\oint \Delta u^j du^r.$$

Powyższa tożsamość oznacza, że całka $\oint \Delta u^r du^j$ jest antysymetryczna w indeksach (r, j) , zatem tylko antysymetryczna część $(\Gamma_{ij}^k)_0 (\Gamma_{sr}^i)_0 - (\partial_r \Gamma_{sj}^k)_0$ wniesie wkład Δa^k . W konsekwencji

$$\delta a^k = \frac{1}{2} [(\Gamma_{ij}^k)_0 (\Gamma_{sr}^i)_0 - (\Gamma_{ir}^k)_0 (\Gamma_{sj}^i)_0 + (\partial_j \Gamma_{sr}^k)_0 - (\partial_r \Gamma_{sj}^k)_0] a_0^s \oint \Delta u^r du^j$$

Wprowadzając tensor Riemanna w punkcie $\mathbf{r}(\mathbf{u}_0)$ jako

$$(R_{srj}^k)_0 := (\partial_j \Gamma_{sr}^k)_0 - (\partial_r \Gamma_{sj}^k)_0 + (\Gamma_{ij}^k)_0 (\Gamma_{sr}^i)_0 - (\Gamma_{ir}^k)_0 (\Gamma_{sj}^i)_0 \quad (2.42)$$

otrzymamy ostatecznie

$$\Delta a^k = -\frac{1}{2} R_{srj}^k a_0^s \oint \Delta u^j du^r.$$

Podsumowując, zmiana wektora a^k w wyniku przesunięcia równoległego wzdłuż pętli jest wyznaczona przez tensor krzywizny oraz pole pętli, którego miarą jest $1/2 \oint \Delta u^r du^j$.

2.12. Dewiacja geodezyjna i tensor krzywizny

Rozpatrzmy rodzinę linii geodezyjnych $\{\gamma(t, \mu) = \mathbf{r}(u^1(t, \mu), u^2(t, \mu))\}_\mu$ indeksowanych parametrem μ . Przez dewiację geodezyjną rozumiemy zmianę odległości pomiędzy

dwoma punktami na geodezyjnych wychodzących z jednego punktu powierzchni. Miarą dewiacji geodezyjnej będzie szybkość zmiany tej odległości. Niech

$$\xi^k = \frac{\partial u^k}{\partial \mu}, \quad \dot{u}^k = \frac{\partial u^k}{\partial t}$$

Ponieważ każda z krzywych tej rodziny jest geodezyjna, to wektor styczny do niej jest przemieszczony równolegle, zatem

$$D\dot{u}^k = \dot{u}^k_{;l}\dot{u}^l = 0. \quad (2.43)$$

Dodatkowo zauważmy, że

$$\xi^k_{;l}\dot{u}^l = \dot{u}^k_{;l}\xi^l. \quad (2.44)$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} \xi^k_{;l}\dot{u}^l &= (\partial_l \xi^k + \Gamma_{jl}^k \xi^j) \dot{u}^l = \frac{\partial^2 u^k}{\partial t \partial \mu} + \Gamma_{jl}^k \xi^j \dot{u}^l \\ \dot{u}^k_{;l} \xi^l &= (\partial_l \dot{u}^k + \Gamma_{jl}^k \dot{u}^j) \xi^l = \frac{\partial^2 u^k}{\partial \mu \partial t} + \Gamma_{jl}^k \dot{u}^j \xi^l. \end{aligned}$$

Relacja (2.44) wynika z równości prawych stron na podstawie przemienności drugich pochodnych cząstkowych oraz symetrii symboli Christoffela.

Wykażemy następujące równanie dewiacji geodezyjnej

$$D^2 \xi^k = (\dot{u}^k_{;lj} - \dot{u}^k_{;jl}) \xi^l \dot{u}^j. \quad (2.45)$$

Dowód: Obliczając lewą stronę otrzymamy

$$D^2 \xi^k = D(D\xi^k) = D(\xi^k_{;l}\dot{u}^l) = (\xi^k_{;l}\dot{u}^l)_{;j}\dot{u}^j.$$

Podstawienie (2.44) do nawiasu prowadzi do

$$(\xi^k_{;l}\dot{u}^l)_{;j}\dot{u}^j = (\dot{u}^k_{;l}\xi^l)_{;j}\dot{u}^j = \dot{u}^k_{;lj}\xi^l\dot{u}^j + \dot{u}^k_{;jl}\xi^l\dot{u}^j.$$

Korzystając ponownie z (2.44) w drugim składniku po prawej stronie otrzymamy

$$D^2 \xi^k = \dot{u}^k_{;lj}\xi^l\dot{u}^j + \dot{u}^k_{;jl}\dot{u}^l\xi^j.$$

Ale z uwagi na (2.43) zachodzi relacja

$$0 = (\dot{u}^k_{;l}\dot{u}^l)_{;j} = \dot{u}^k_{;lj}\dot{u}^l + \dot{u}^k_{;jl}\dot{u}^l_{;j}.$$

Ostatecznie

$$D^2 \xi^k = \dot{u}^k_{;lj}\xi^l\dot{u}^j - \dot{u}^k_{;jl}\xi^j\dot{u}^l = (\dot{u}^k_{;lj} - \dot{u}^k_{;jl})\xi^l\dot{u}^j.$$

□

Niekomutatywność drugiej pochodnej kawariantnej występująca we wzorze (2.45) jest związana z niezerowymi elementami tensora Riemanna. Pokażemy, że dla składowych pola wektorowego v^k zachodzi

$$v^k_{;lj} - v^k_{;jl} = (\partial_j \Gamma_{il}^k - \partial_l \Gamma_{ij}^k + \Gamma_{jn}^k \Gamma_{il}^n - \Gamma_{ln}^k \Gamma_{ij}^n) v^i = R^k_{ilj} v^i, \quad (2.46)$$

gdzie $[R^k_{ilj}]$ stanowi ten sam zbiór liczb co we wzorze (2.42). Wielkości te tworzą pole tensorowe typu (3,1) na powierzchni S .

Dowód: Oznaczmy pierwszą pochodną kowariantną pola v^k przez

$$C_l^k := v_{;l}^k = \partial_l v^k + \Gamma_{rl}^k v^r .$$

C_l^k są składowymi tensora typu (1,1), zatem jego pochodna kowariantna zgodnie z (2.38) ma postać

$$C_{l;j}^k = \partial_j C_l^k + \Gamma_{nj}^k C_l^n - \Gamma_{lj}^n C_n^k .$$

Zatem

$$\begin{aligned} v_{;lj}^k &= \partial_j (\partial_l v^k + \Gamma_{rl}^k v^r) + \Gamma_{nj}^k (\partial_l v^n + \Gamma_{rl}^n v^r) - \Gamma_{lj}^n (\partial_n v^k + \Gamma_{rn}^k v^r) \\ &= \partial_{jl}^2 v^k + \Gamma_{rl}^k \partial_j v^r + \Gamma_{nj}^k \partial_l v^n - \Gamma_{lj}^n \partial_n v^k + (\partial_j \Gamma_{rl}^k + \Gamma_{nj}^k \Gamma_{rl}^n - \Gamma_{lj}^n \Gamma_{rn}^k) v^r \end{aligned}$$

Zamieniając indeksy $(l, j) \rightarrow (j, l)$ otrzymamy

$$v_{;jl}^k = \partial_{lj}^2 v^k + \Gamma_{rj}^k \partial_l v^r + \Gamma_{nl}^k \partial_j v^n - \Gamma_{jl}^n \partial_n v^k + (\partial_l \Gamma_{rj}^k + \Gamma_{nl}^k \Gamma_{rj}^n - \Gamma_{jl}^n \Gamma_{rn}^k) v^r$$

Ostatecznie odejmując stronami i korzystając z symetrii drugiej pochodnej cząstkowej oraz symboli Christoffella otrzymamy (2.46). \square

Równanie dewiacji geodezyjnej (2.45) można przepisać jako

$$D^2 \xi^k = (\dot{u}_{;lj}^k - \dot{u}_{;jl}^k) \xi^l \dot{u}^j = R_{rlj}^k \dot{u}^r \dot{u}^j \xi^l .$$

Całkowicie kowariantna wersja tensora Riemanna typu (4,0), tzn. $R_{mrlj} = g_{km} R_{rlj}^k$, nosi nazwę (pola) *tensora krzywizny* i znikanie wszystkich jego składowych oznacza brak zakrzywienia przestrzeni. Tensor krzywizny ma następujące algebraiczne własności symetrii:

- (1) symetria par: $R_{mrlj} = R_{ljmr}$,
- (2) antysymetria indeksów:

$$R_{mrlj} = -R_{rmlj} = -R_{mrjl} = R_{rmjl} ,$$

- (3) cykliczność:

$$R_{mrlj} + R_{mjrl} + R_{mljr} = 0 .$$

W ogólności, w przestrzeni N -wymiarowej jest $N^2(N^2 - 1)/12$ niezależnych składowych tensora krzywizny.

W przypadku powierzchni 2-wymiarowych tylko jedna składowa tensora krzywizny jest niezależna⁵, wybierzmy R_{1212} . Wówczas

$$\begin{aligned} R_{1212} &= -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121} \\ R_{1111} &= R_{1122} = R_{2211} = R_{2222} = 0 \end{aligned}$$

Relacje te podsumowuje wzór

$$R_{mrlj} = (g_{ml}g_{rj} - g_{mj}g_{rl}) \frac{R_{1212}}{g} .$$

W oparciu o tensor krzywizny wprowadza się tensor Ricciego

$$R_rj = R_{rkj}^k = g^{km} R_{mrkj}$$

⁵ Nie dotyczy to tensora Riemanna R_{rlj}^k , który ma więcej niezależnych składowych.

oraz skalar krzywizny

$$R = g^{rj} R_{rj}.$$

W przypadku powierzchni 2-wymiarowych, tensor Ricciego jest proporcjonalny do tensora metrycznego

$$R_{rj} = g^{km} (g_{mk} g_{rj} - g_{mj} g_{rk}) \frac{R_{1212}}{g} = (2g_{rj} - \delta_r^m g_{mj}) \frac{R_{1212}}{g} = g_{rj} \frac{R_{1212}}{g}, \quad (2.47)$$

a skalar krzywizny jest proporcjonalny do jedynej niezależnej składowej tensora krzywizny,

$$R = \frac{2R_{1212}}{g}. \quad (2.48)$$

Na podstawie (2.32) mamy relację wiążącą skalar krzywizny z krzywizną Gaussa:

$$K_G = \frac{R_{221}^1}{g_{22}} = \frac{g^{11} R_{1221}}{g_{22}} = -\frac{R_{1212}}{g} = -\frac{R}{2}, \quad (2.49)$$

bo $g^{11} = g_{22}/g$.

PRZYKŁAD 2.26. Dla powierzchni $r(u^1, u^2) = [u^1, u^2, (u^1)^2 - (u^2)^2]$ mamy na podstawie Przykładu 2.16

$$R_{1212} = g_{k1} R_{212}^k = g_{k1} (\partial_2 \Gamma_{21}^k - \partial_1 \Gamma_{22}^k + \Gamma_{2n}^k \Gamma_{21}^n - \Gamma_{1n}^k \Gamma_{22}^n) = \frac{4}{g^2},$$

gdzie $g = 1 + 4(u^1)^2 + 4(u^2)^2$. Wykorzystując (2.47) mamy

$$R_{rj} = \frac{1}{g^2} \begin{bmatrix} 4(1 + 4(u^1)^2) & -16u^1 u^2 \\ -16u^1 u^2 & 4(1 + 4(u^2)^2) \end{bmatrix} = \frac{4}{g^2} g_{rj}$$

oraz na podstawie (2.48)

$$R = \frac{8}{g^2}.$$

Porównując ten wynik z obliczoną w Przykładzie 2.21 krzywizną Gaussa $K_G = -4/g^2$ potwierdza się relacja (2.49).

2.13. Podstawy ogólnej teorii względności i równanie pola grawitacyjnego

2.13.1. Zasady równoważności

W ogólności, własność ciał odpowiedzialna za ich oddziaływanie grawitacyjne z innymi ciałami (nazwijmy tę cechę masą grawitacyjną ciała m_g) mogłaby nie być tożsama z własnością ciał związaną z ich bezwładnością, czyli oporem przed zmianą stanu ruchu (miarę bezwładności nazwijmy masą bezwładną m_b), pozwalającą przeliczyć siłę na dynamiczne skutki, jakie siła ta wywołuje, tzn.

$$F = m_b a.$$

Jeśli jedyną siłą, jaka działa na cząstkę punktową, jest siła grawitacyjna pochodząca od źródła, które charakteryzuje w danym punkcie wektor przyspieszenia grawitacyjnego $g = -\text{grad } V$, to

$$m_b a = m_g g = -m_g \text{grad } V. \quad (2.50)$$

Od czasów Newtona wszystkie eksperymenty potwierdzają, że nie ma (mierzalnej) różnicy pomiędzy *masą bezwładną* i *masą grawitacyjną*, tzn.

$$m_b = m_g.$$

Postulat ten nosi nazwę *zasady równoważności Newtona*.

W tej sytuacji z (2.50) wynika, że wszystkie cząstki punktowe spadają w polu grawitacyjnym z tym samym przyspieszeniem (*zasada równoważności Galileusza*). W szczególności,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \text{grad } V = 0,$$

a zatem tory cząstek (przy takich samych warunkach początkowych) nie zależą od rodzaju cząstki.

PRZYKŁAD 2.27 (Spadająca swobodnie winda).

- W układzie spadającej swobodnie windy panuje nieważkość (nie widzimy skutków działania grawitacji). Układ taki zachowuje się jak układ inercjalny (kropla wprawiona w ruch porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym!). Można w nim stosować prawa Szczególnej teorii względności (STW).
- Z drugiej strony, względem nieporuszającej się Ziemi układ taki porusza się z (prawie) stałym przyspieszeniem g , zatem kropla też ma przyspieszenie g .
- Przebieg zjawiska fizycznego nie powinien zależeć od tego, w którym z układów będziemy je opisywać. Oba układy są równoważne.
- Układ windy nazwiemy *lorentzowskim lokalnym układem inercjalnym*.
- Układ windy nie może być 'za duży', tak aby niejednorodności pola grawitacyjnego można było zaniedbać!

układ inercjalny poruszający się z przyspieszeniem g (tzw. *lorentzowski lokalny układ inercjalny*) \sim układ z polem grawitacyjnym o przyspieszeniu g

A. Einstein analizując ruch w różnych układach odniesienia (np. w układzie związanym ze spadającą swobodnie windą lub ogólniej układy pozostające w spadku swobodnym) uogólnił powyższe zasady do stwierdzenia, iż

na podstawie obserwacji i badań spadku swobodnego (a nawet innych eksperymentów fizycznych!) nie można odróżnić układu z jednorodnym polem grawitacyjnym od równoważnego układu poruszającego się z przyspieszeniem.

Powyższą obserwację nazywa się *zasadą równoważności Einsteina*. W lorentzowskim lokalnym układzie odniesienia można stosować prawa STW.

Niejednorodności pola grawitacyjnego wprowadzają nielokalność, która przejawia się między innymi zakrzywieniem czasoprzestrzeni. Miarą tej niejednorodności (nielokalności) są zjawiska pływowe.

2.13.2. Zjawiska pływowe w teorii Newtona

Przyspieszeniem pływowym α nazywamy chwilowe, względne przyspieszenie dwóch cząstek poruszających się wzdłuż dwóch różnych linii geodezyjnych pola grawitacyjnego

(krzywych stożkowych) o natężeniu $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\text{grad } V(\mathbf{r})$. Obliczmy je w chwili, gdy względne położenie tych cząstek określa wektor ξ . Załóżmy, że krzywe te leżą na tyle blisko siebie, że możemy rozwinąć przyspieszenie pływowe w szereg Taylora względem ξ ,

$$\alpha = \mathbf{a}(\mathbf{r} + \xi) - \mathbf{a}(\mathbf{r}) \simeq (\xi \cdot \nabla) \mathbf{a}(\mathbf{r}) = - \sum_{k,m} \xi_k \partial_{km}^2 V(\mathbf{r}) \mathbf{e}_m$$

Określmy tensor pływów jako $\zeta_{km}(\mathbf{r}) = \partial_{km}^2 V(\mathbf{r})$, wówczas

$$\alpha_m(\mathbf{r}) = - \sum_k \xi_k \zeta_{km}(\mathbf{r}).$$

PRZYKŁAD 2.28. Dla potencjału newtonowskiego $V(\mathbf{r}) = -GM_Z/r$, gdzie $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ otrzymamy następujący tensor pływów:

$$[\zeta(\mathbf{r})]_{ij} = -\frac{GM_Z}{r^5} (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2).$$

Zatem ξ spełnia równania

$$\frac{d^2 \xi_m}{dt^2} + \sum_k \zeta_{km} \xi_k = 0, \quad m = 1, 2, 3. \quad (2.51)$$

Założmy teraz, że dwie cząstki jednocześnie wyruszyły z punktu P i poruszają się jednostajnie z jednakowymi prędkościami wzdłuż dwóch fragmentów kół wielkich na sferze o promieniu R przecinających się w punktach P i Q i leżących w płaszczyznach przecinających się pod kątem φ . Odległość ξ pomiędzy nimi będzie wyznaczona przez długość fragmentu równoleżnika. Jeśli każda z cząstek przebędzie łuk s , to odległość pomiędzy nimi wyniesie

$$\xi(s) = \varphi R \sin \frac{s}{R}.$$

Zauważmy, że w przeciwieństwie do analogicznej sytuacji w płaskiej przestrzeni, $\xi(s)$ zachowuje się niemonotonicznie w funkcji s . Jednocześnie

$$\frac{d^2 \xi}{ds^2} = -\varphi \frac{1}{R} \sin \frac{s}{R} = -\frac{1}{R^2} \xi = -K_G \xi.$$

czyli

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + c^2 K_G \xi = 0. \quad (2.52)$$

Porównanie relacji (2.51) oraz (2.52) nasuwa przypuszczenie, że tensor pływów w płaskiej przestrzeni z polem grawitacyjnym o potencjale V może być zastąpiony w ogólniejszym przypadku przez wielkość określającą krzywiznę powierzchni (przestrzeni) (tensor krzywizny)!

2.13.3. Równanie pola grawitacyjnego

Szczególna teoria względności wykorzystuje strukturę 4-wymiarowej przestrzeni Minkowskiego, w której określony jest tensor (pseudo)metryczny

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ponieważ tensor η nie zależy od punktu, przestrzeń taka jest płaska. Grawitacja wprowadza zakrzywienie przestrzeni przejawiające się uzależnieniem tensora (pseudo)metrycznego od punktu, tj. $[g(p)_{\mu\nu}]$, $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$. Zakrzywienie 4-wymiarowej czasoprzestrzeni opisuje w pełni tensor krzywizny $[R(p)_{\alpha\beta\mu\nu}]$.

Z drugiej strony za oddziaływania grawitacyjne odpowiada materia reprezentowana przez *tensor energii-pędu* o następującej strukturze:

$$[T^{\mu\nu}] = \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} \text{gęstość} \\ \text{energii} \end{array} & \begin{array}{c} 1/c \times \text{strumień energii przez} \\ \text{powierzchnię prostopadłą do } e_k \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} c \times \\ \text{gęstość wektora pędu} \end{array} & \begin{array}{c} \text{tensor napięć =} \\ \text{strumienie skła-} \\ \text{dowych wekto-} \\ \text{ra pędu} \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Tensor energii-pędu ma dwie podstawowe własności:

- (i) jest symetryczny $[T^{\mu\nu}] = [T^{\nu\mu}]$,
- (ii) znika jego czterodivergencja, tzn. $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$.

Ogólnie

Geometria czasoprzestrzeni \sim rozkład i ruch materii oraz energii

Równanie pola grawitacyjnego zapostulowane przez A. Einsteina w roku 1915 ma postać

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.53)$$

gdzie lewa strona jest *tensorem Einsteina* o znikającej czterodivergencji (czterodivergencja samego tensora Ricciego $R_{\mu\nu}$ nie znika!). W ten sposób obie strony równania przedstawiają 2-wskaźnikowe tensory symetryczne i o znikającej czterodivergencji. Ponieważ tensor Einsteina $G_{\mu\nu}$ wyraża się przez drugie pochodne (czasowe i przestrzenne) składowych tensora metrycznego (por. wzór (2.42)), zatem pole grawitacyjne opisywane jest przez 10 równań różniczkowych cząstkowych na poszczególne składowe tensora metrycznego. Stałą κ należy dobrać w taki sposób, aby równanie pola grawitacyjnego (2.53) przechodziło w równanie Poissona

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = 4\pi G\rho(\mathbf{r})$$

w granicy małych prędkości i słabego pola grawitacyjnego (tzw. *granica newtonowska*.) Granica newtonowska pozwala wyznaczyć

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

Równanie (2.53) można przekształcić do postaci:

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \quad T = g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta},$$

Wynika stąd, że w pustej przestrzeni (gdzie $T_{\mu\nu} = 0$) równanie (2.53) redukuje się do $R_{\mu\nu} = 0$.

Einstein rozważał także ogólniejszą postać równania (2.53)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu},$$

gdzie Λ oznacza tzw. stałą kosmologiczną (tradycyjnie = 0), którą potem odrzucił (z uwagi na modele Friedmanna oraz ich potwierdzenie przez obserwacje Hubble'a). Obecnie wraca się do tej ogólniejszej postaci upatrując w wielkości Λ przejawów ciemnej energii.

Rozdział 3

Powierzchnie wielowymiarowe

3.1. Tensory i iloczyn tensorowy

Niech V będzie n -wymiarową przestrzenią wektorową z bazą $\{e_1, \dots, e_n\}$ oraz niech V^* będzie przestrzenią sprzężoną (dualną) do V , tj. zbiorem wszystkich 1-form liniowych $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$. Z kursu algebry liniowej wiadomo, że V^* jest n -wymiarową przestrzenią wektorową z kanoniczną bazą dualną $\{e^1, \dots, e^n\}$, określoną jako

$$\forall v \in V \quad e^k(v) = v^k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

gdzie v^k są współrzędnymi v w bazie $\{e_1, \dots, e_n\}$. Dodatkowo, przestrzeń wektorowa $(V^*)^*$ jest kanonicznie izomorficzna z V , zatem wektory z V można utożsamiać z 1-formami liniowymi działającymi na V^* , dzięki relacji

$$\forall \alpha \in V^* \quad e_k(\alpha) = \alpha_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

gdzie α_k są współrzędnymi 1-formy α w bazie $\{e^1, \dots, e^n\}$.

3.1.1. Algebra tensorów

DEF. 3.1 (Funkcjonał wieloliniowy). Odwzorowanie $T : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{n\text{-krotnie}} \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy funkcjonałem n -liniowym, jeśli T jest liniowe ze względu na każdy argument, tzn.

$$\begin{aligned} T(\dots, v+w, \dots) &= T(\dots, v, \dots) + T(\dots, w, \dots), \quad \forall v, w \in V \\ T(\dots, av, \dots) &= aT(\dots, v, \dots) \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}. \end{aligned}$$

PRZYKŁAD 3.1. Odwzorowanie $T : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $V = \mathbb{R}^2$, określone jako

$$T(v, w) = 2v^1w^1 + 3v^2w^1 - 8v^1w^2 + 5v^2w^2$$

jest 2-liniowym funkcjonałem. Odwzorowanie T nazwiemy tensorem typu $(2,0)$. Niech $e_1 = [1, 0]$ oraz $e_2 = [0, 1]$ będą bazą \mathbb{R}^2 . Liczby $T(e_i, e_j) = t_{ij}$ określają składowe tensora T . W tym przykładzie $t_{11} = 2$, $t_{12} = -8$, $t_{21} = -3$, $t_{22} = 5$. Tensory określonego typu można dodawać i mnożyć przez liczbę. Wszystkie tensory określonego typu tworzą przestrzeń wektorową. Tensory typu $(2,0)$ tworzą przestrzeń o wymiarze n^2 , gdzie $\dim V = n$. Bazę w tej przestrzeni wyznaczają tensory E^{ij} , takie że

$$E^{ij}(v, w) = v^i w^j.$$

W szczególności

$$E^{ij}(e_k, e_\ell) = \delta_k^i \delta_\ell^j.$$

Każdy inny tensor z tej przestrzeni da się wówczas zapisać jako

$$T^{(2,0)} = \sum_{i,j=1}^n t_{ij} E^{ij}.$$

DEF. 3.2 (Tensor). $(r + s)$ -liniowy funkcjonal

$$T^{(r,s)} : \underbrace{V \times \dots \times V}_{r\text{-krotnie}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{s\text{-krotnie}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

nazywamy tensorem typu (r, s) .

Zbiór wszystkich tensorów typu (r, s) wraz z działaniami dodawania i mnożenia przez liczbę

$$\begin{aligned} (T^{(r,s)} + W^{(r,s)})(\dots) &= T^{(r,s)}(\dots) + W^{(r,s)}(\dots) \\ (a T^{(r,s)})(\dots) &= a T^{(r,s)}(\dots). \end{aligned}$$

tworzy przestrzeń wektorową o wymiarze n^{r+s} . Będziemy ją oznaczać $(V^*)^r \otimes V^s$. Bazę w tej przestrzeni tworzą tensory $E_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ określone przez relacje

$$E_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(v_{(1)}, \dots, v_{(r)}, \alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s)}) = v_{(1)}^{i_1} \dots v_{(r)}^{i_r} \alpha_{j_1}^{(1)} \dots \alpha_{j_s}^{(s)},$$

gdzie $v_{(k)}^i$ są składowymi wektorów $v_{(k)}$ w bazie $\{e_i\}$ oraz $\alpha_j^{(k)}$ są składowymi 1-form $\alpha^{(k)}$ w bazie $\{e^j\}$.

DEF. 3.3 (Składowe tensora). Liczby

$$T^{(r,s)}(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, e^{j_1}, \dots, e^{j_s}) = t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$$

są składowymi tensora w bazie $\{E_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}\}$.

Ostatecznie mamy relacje

$$T^{(r,s)} = \sum_{\substack{i_1 \dots i_r \\ j_1 \dots j_s}} t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} E_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$$

oraz

$$T^{(r,s)}(v_{(1)}, \dots, v_{(r)}, \alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s)}) = \sum_{\substack{i_1 \dots i_r \\ j_1 \dots j_s}} t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} v_{(1)}^{i_1} \dots v_{(r)}^{i_r} \alpha_{j_1}^{(1)} \dots \alpha_{j_s}^{(s)} \in \mathbb{R}.$$

Bazę $\{E_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}\}$ konstruuje się z baz $\{e_1, \dots, e_n\}$ oraz $\{e^1, \dots, e^n\}$ używając iloczynu tensorowego \otimes (por. Rozdział 3.1.2):

$$E_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s}.$$

Kanoniczny iloczyn tensorowy (jeden z możliwych) określony jest przez iloczyn Kroneckera, tj.

$$v \otimes w = \sum_{i_1, i_2} v^{i_1} w^{i_2} E_{i_1 i_2},$$

lub bezpośrednio używając składowych wektorów $v \in V, w \in W$ jako

$$[v^1, \dots, v^n] \otimes [w^1, \dots, w^m] = [v^1 w^1, \dots, v^1 w^m, v^2 w^1, \dots, v^2 w^m, \dots, v^n w^1, \dots, v^n w^m].$$

Ogólnie

$$T^{(r,s)} \otimes T^{(p,q)} = \sum t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} w_{k_1 \dots k_p}^{l_1 \dots l_q} E_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} E_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p}.$$

PRZYKŁAD 3.2. Dla tensorów 2-go rzędu mamy odpowiednio

$$\begin{aligned} T^{(2,0)} &= \sum_{i,j} t_{ij} E^{ij}, & E^{ij} &= \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j, \\ T^{(0,2)} &= \sum_{i,j} t^{ij} E_{ij}, & E_{ij} &= \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \\ T^{(1,1)} &= \sum_{i,j} t_j^i E_j^i, & E_j^i &= \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j, \end{aligned}$$

3.1.2. Iloczyn tensorowy przestrzeni wektorowych

Niech X, Y, Z będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem \mathbb{K} . Odwzorowanie $\phi : X \times Y \rightarrow Z$ nazywamy dwuliniowym, jeśli dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \phi(\alpha x_1 + \beta x_2, y) &= \alpha \phi(x_1, y) + \beta \phi(x_2, y), & \forall x_1, x_2 \in X, y \in Y \\ \phi(x, \alpha y_1 + \beta y_2) &= \alpha \phi(x, y_1) + \beta \phi(x, y_2), & \forall x \in X, y_1, y_2 \in Y. \end{aligned}$$

PRZYKŁAD 3.3. Obraz odwzorowania ϕ nie musi być domknięty ze względu na dodawanie, a zatem może nie mieć struktury liniowej. Pokazuje to następujący przykład. Niech $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ dane dla $x = [x_1, x_2]$ oraz $y = [y_1, y_2]$

$$\phi(x, y) = x^T y = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 \end{bmatrix}.$$

Odwzorowanie ϕ jest 2-liniowe oraz $\text{Im} \phi = \phi(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \subset M_2(\mathbb{R})$, ale

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2 \quad \det \phi(x, y) = 0 \iff \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \quad \text{rank} \phi(x, y) < 2.$$

Zauważmy, że

$$\phi(e_1, e_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \phi(e_2, e_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

zatem

$$\phi(e_1, e_1) + \phi(e_2, e_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin \text{Im} \phi.$$

W konsekwencji $\text{Im} \phi$ nie jest podprzestrzenią liniową $M_2(\mathbb{R})$.

Ponieważ w ogólności obrazem ϕ nie musi być podprzestrzeń wektorowa w Z , chcielibyśmy narzucić pewne warunki, aby ϕ zachowywało strukturę liniową.

DEF. 3.4 (Iloczyn tensorowy przestrzeni). Iloczynem tensorowym przestrzeni wektorowych X oraz Y jest wektorowa przestrzeń Z wraz z dwuliniowym odwzorowaniem $\phi : X \times Y \rightarrow Z$, takim że dla każdej przestrzeni wektorowej V i dwuliniowego odwzorowania $\bar{\phi} : X \times Y \rightarrow V$ istnieje *jedynie* liniowe odwzorowanie $j : Z \rightarrow V$, takie że poniższy diagram jest przemienny.

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\bar{\phi}} & V \\ \phi \downarrow & \nearrow j & \\ Z & & \end{array}$$

(3.3)

Zwyczajowo piszemy $Z = X \otimes Y$.

Powyższy diagram implikuje fakt, że inny wybór odwzorowania ϕ (a zatem inny wybór iloczynu tensorowego) prowadzi do izomorficznej struktury wektorowej. Podsumowuje to następujące stwierdzenie:

FAKT 3.4. Załóżmy, że $X \otimes Y$ oraz $X \overline{\otimes} Y$ są dwoma iloczynami tensorowymi X i Y . Wówczas istnieje liniowy izomorfizm $i : X \otimes Y \rightarrow X \overline{\otimes} Y$, taki że $i(\phi(x, y)) = \overline{\phi}(x, y)$ dla wszystkich $x \in X$ oraz $y \in Y$.

W szczególności z (3.3) możemy wnosić, że diagram

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\phi} & X \otimes Y \\ \downarrow b & \swarrow \ell & \\ \mathbb{R} & & \end{array}$$

gdzie $b \in B(X \times Y; \mathbb{R})$ jest 2-liniowym funkcjonałem na $X \times Y$ oraz $\ell \in L(X \otimes Y; \mathbb{R})$ jest jedynym liniowym funkcjonałem na $X \otimes Y$, ustala (przy danym ϕ) jedno-jednoznaczność

$$B(X \times Y; \mathbb{R}) \equiv L(X \otimes Y; \mathbb{R}).$$

Oznacza to następującą własność:

FAKT 3.5. Liniowe przekształcenie

$$I : L(X \otimes Y; \mathbb{R}) \rightarrow B(X \times Y; \mathbb{R}), \quad b = I(\ell) = \ell \circ \phi$$

jest liniowym izomorfizmem.

W szczególności, izomorfizm I ustala wzajemną odpowiedniość pomiędzy elementami $L(X \otimes Y; \mathbb{R})$ oraz $B(X \times Y; \mathbb{R})$, tzn.

$$\ell \in L(X \otimes Y; \mathbb{R}) \iff \ell \in X^* \otimes Y^* \iff \ell \in B(X \times Y; \mathbb{R}).$$

Ponieważ $X \otimes Y$ jest nadal przestrzenią wektorową, to iloczyn tensorowy można uogólnić na skończoną liczbę przestrzeni wektorowych, tj. podobnie definiuje się $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$.

Wybermy w n -wymiarowej przestrzeni X bazę $\{e_1, \dots, e_n\}$ oraz w m -wymiarowej przestrzeni Y bazę $\{f_1, \dots, f_m\}$, wówczas $Z = X \otimes Y$ będzie mn -wymiarową przestrzenią wektorową, z bazą $\{\phi(e_k, f_j) = e_k \otimes f_j\}_{k,j=1}^{nm}$. W konsekwencji elementami przestrzeni $X \otimes Y$ są obiekty postaci

$$T = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m t^{kj} e_k \otimes f_j.$$

PRZYKŁAD 3.4. W oparciu o Def. 3.4 możemy rozważać przestrzeń wektorową $V^* \otimes V$ jako rozpiętą przez wektory bazowe $\{e^k \otimes e_j \equiv E_j^k\}_{k,j=1}^n$. Elementami tej przestrzeni są tensory typu (1,1) (por. Def. 3.2)

$$V^* \otimes V \ni T^{(1,1)} = \sum_{k,j=1}^n t_k^j e^k \otimes e_j,$$

gdzie zespół liczb $\{t_k^j\}_{k,j=1}^n$ określa współrzędne tensora $T^{(1,1)}$ w bazie $\{e^k \otimes e_j\}_{k,j=1}^n$. Za-uważmy, że

$$T \in V^* \otimes V \iff T \in V^* \otimes (V^*)^* \iff T \in (V \otimes V^*)^* \iff T \in L(V \otimes V^*, \mathbb{R}).$$

Zatem rzeczywiście, z uwagi na Fakt 3.5, tensor T typu (1,1) możemy utożsamiać z 2-liniowym funkcjonałem na $V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$L(V \otimes V^*, \mathbb{R}) \simeq B(V, V^*; \mathbb{R}).$$

Wówczas

$$T^{(1,1)}(v, \alpha) = \sum_{k,j=1}^n t_k^j (e^k \otimes e_j)(v, \alpha) = \sum_{k,j=1}^n t_k^j e^k(v) e_j(\alpha) = \sum_{k,j=1}^n t_k^j \alpha_j v^k.$$

Na mocy Faktu 3.5 ($r + s$)-liniowy funkcjonał $T^{(r,s)}$ można zatem utożsamiać z elementem

$$T \in \mathcal{L}(\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_r \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_s) \iff T \in \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_r \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_s.$$

W konsekwencji

$$T^{(r,s)} = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} t_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s},$$

gdzie

$$t_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} = T^{(r,s)}(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, e^{j_1}, \dots, e^{j_s}) \quad (3.4)$$

są składowymi tensora $T^{(r,s)}$ w bazie $\{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s}\}$.

3.1.3. Prawo transformacyjne tensorów

Składowe tensora $T^{(r,s)}$ (3.4) zmieniają się przy transformacji zmiany bazy. Jeśli zmieniamy bazę $e_i \mapsto (e')_i = A_i^k e_k$, to $e_k = (A')_k^j (e')_j$, gdzie $A_i^j (A')_j^k = \delta_i^k$ oraz $(e')^i = (A')^i_j e^j$, $e^j = A_i^j (e')^i$, wówczas

$$\{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s}\} \mapsto \{(e')^{i_1} \otimes \dots \otimes (e')^{i_r} \otimes (e')_{j_1} \otimes \dots \otimes (e')_{j_s}\}.$$

Składowe tensora T transformują się wówczas zgodnie z regułą

$$\begin{aligned} (t')_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} &= T^{(r,s)}((e')_{i_1}, \dots, (e')_{i_r}, (e')^{j_1}, \dots, (e')^{j_s}) \\ &= T^{(r,s)}(A_{i_1}^{k_1} e_{k_1}, \dots, A_{i_r}^{k_r} e_{k_r}, (A')_{l_1}^{j_1} e^{l_1}, \dots, (A')_{l_s}^{j_s} e^{l_s}) \\ &= A_{i_1}^{k_1} \dots A_{i_r}^{k_r} (A')_{l_1}^{j_1} \dots (A')_{l_s}^{j_s} T^{(r,s)}(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}, e^{l_1}, \dots, e^{l_s}) \\ &= A_{i_1}^{k_1} \dots A_{i_r}^{k_r} (A')_{l_1}^{j_1} \dots (A')_{l_s}^{j_s} t_{k_1, \dots, k_r}^{l_1, \dots, l_s}. \end{aligned}$$

Górne składowe tensora nazywamy składowymi *kontrawariantnymi*, a składowe dolne *kowariantnymi*.

W szczególności składowe wektora $V \ni v = v^i e_i$ (kontrawariantne) transformują się zgodnie z relacją

$$(v')^j = (A')^j_i v^i,$$

podczas gdy składowe formy $V^* \ni \omega = \omega_i e^i$ (kowariantne) przekształcają się zgodnie z

$$(\omega')_i = A_i^k \omega_k.$$

3.2. Rozmaitości różniczkowe

DEF. 3.5 (Topologia). Topologią na zbiorze X nazywamy rodzinę zbiorów $\{\tau\}$, taką że

- (1) przeliczalna suma zbiorów z rodziny $\{\tau\}$ również należy do $\{\tau\}$,
- (2) skończony przekrój zbiorów z rodziny $\{\tau\}$ również należy do $\{\tau\}$.

Zbiory należące do $\{\tau\}$ nazywamy zbiorami otwartymi, a parę $(X, \{\tau\})$ przestrzenią topologiczną.

DEF. 3.6 (Homeomorfizm). Niech $(X, \{\tau\})$ oraz $(Y, \{\omega\})$ będą przestrzeniami topologicznymi. Odwzorowanie $f : X \rightarrow Y$ nazywamy ciągłym, jeśli $f^{-1}(V) \in \{\tau\}$ dla każdego $V \in \{\omega\}$.

Ciągłe odwzorowanie $f : U \rightarrow V$, które jest bijekcją oraz dla którego f^{-1} jest ciągłe, nazywamy homeomorfizmem.

Niech M będzie przestrzenią topologiczną.

DEF. 3.7 (Mapa). n -wymiarową mapą (układem współrzędnych) punktu $p \in M$ nazywamy parę (φ, U) , gdzie U jest zbiorem otwartym zawierającym p oraz $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ jest homeomorfizmem na otwarty podzbiór \mathbb{R}^n .

Dla $p \in U$, $\varphi(p) = (x_1, \dots, x_n)$ są współrzędnymi punktu p .

DEF. 3.8. Każdy zbiór n -wymiarowych map $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$ pokrywających M , tzn.

$$M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha},$$

nazywamy n -wymiarowym atlasem.

DEF. 3.9 (Rozmaitość topologiczna). Każdą przestrzeń topologiczną M posiadającą n -wymiarowy atlas nazywamy n -wymiarową rozmaitością topologiczną.

Niech $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ oraz (φ_β, U_β) będą dwiema mapami z atlasu, takimi że $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Wtedy

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (3.5)$$

jest homeomorfizmem. Jeśli wszystkie homeomorfizmy postaci (3.5) są klasy C^r , $r = 1, 2, \dots$, to mówimy, że atlas zawierający te mapy jest klasy C^r .

DEF. 3.10 (Zgodność). Dwa n -wymiarowe atlasy $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$, $\{(\psi_\alpha, V_\alpha)\}$ klasy C^r są zgodne jeśli rodzina $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha), (\psi_\alpha, V_\alpha)\}$ jest również atlasem klasy C^r .

Warunek zgodności oznacza, że odwzorowania $\varphi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap V_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta)$ określone na niepustych podzbiórach $U_\alpha \cap V_\beta$ są klasy C^r . Zgodność atlasów jest relacją równoważności. Klasa abstrakcji tej relacji w zbiorze wszystkich atlasów klasy C^r określa strukturę różniczkową na M . Dana rozmaitość topologiczna M może posiadać atlasy tej samej klasy, które nie są zgodne.

PRZYKŁAD 3.5. Jednoelementowe atlasy $\{(\varphi, \mathbb{R})\}$ oraz $\{(\psi, \mathbb{R})\}$, gdzie $\varphi(t) = t$, $\psi(t) = t^3$ są klasy C^r . Natomiast atlas $\{(\varphi, \mathbb{R}), (\psi, \mathbb{R})\}$ nie jest klasy C^r , bowiem funkcja $\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ nie jest różniczkowalna w $t = 0$. Zatem wymienione jednoelementowe atlasy nie są zgodne, a przestrzeń $M = \mathbb{R}$ ma co najmniej dwie struktury różniczkowe.

Różne struktury różniczkowe zadawane są przez atlasy maksymalne.

DEF. 3.11 (Atlas maksymalny). Atlas \mathcal{A} jest maksymalny, gdy dla każdego $p \in M$ i dla każdego zbioru otwartego $V \subseteq M$ istnieje mapa $(\varphi, U) \in \mathcal{A}$, taka że $p \in U \subseteq V$.

DEF. 3.12 (Rozmaitość różniczkowa). Rozmaitością różniczkową klasy C^r nazywamy przestrzeń topologiczną (Hausdorffa, przeliczalną) wraz z wyróżnioną n -wymiarową strukturą różniczkową klasy C^r .

Jeśli rozmaitość jest klasy C^1 , to istnieje równoważny atlas klasy C^∞ , a więc gładka (klasy C^∞) struktura różniczkowa.

Metodę konstrukcji rozmaitości różniczkowych podaje poniższe twierdzenie.

Tw. 3.1. Niech $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ będzie gładką funkcją na otwartym podzbiorniku $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ i niech $c \in \mathbb{R}^m$. Jeśli dla każdego $a \in f^{-1}(c)$ pochodna $df|_a : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest surjekcją, to przeciwobraz $f^{-1}(c)$ jest n -wymiarową gładką rozmaitością różniczkową.

Fakt ten wynika z twierdzenia o funkcjach uwikłanych. Jednocześnie na mocy twierdzenia Whitneya: jeśli M jest gładką rozmaitością wymiaru n , to istnieje dyfeomorfizm $\theta : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$, taki że zbiór $\theta(M)$ jest podrozmaitością w \mathbb{R}^{2n+1} .

PRZYKŁAD 3.6. Niech M_n oznacza zbiór macierzy $n \times n$ o rzeczywistych składowych oraz niech $O(n)$ będzie zbiorem ortogonalnych macierzy, tj.

$$O(n) = \{A \in M_n : AA^T = A^T A = \mathbb{1}\}.$$

Określmy funkcję $f : M_n \rightarrow S_n$ z n^2 -wymiarowej przestrzeni wektorowej w przestrzeń symetrycznych macierzy S_n wymiaru $n(n+1)/2$ jako

$$f(X) = XX^T.$$

Pochodna tej funkcji ma postać

$$df|_X(H) = HX^T + XH^T, \quad H \in M_n.$$

Z powodu dowolności H i nieosobliwości $A \in O(n)$, możemy znaleźć $K \in M_n$, takie że $H = KA$. Zatem

$$df|_A(K) = KAA^T + A(KA)^T = K + K^T \in S_n.$$

Dodatkowo dla $K = S/2$, gdzie S jest symetryczna, $df|_A(K)$ pokrywa cały zbiór macierzy symetrycznych. W konsekwencji, $df|_A$ jest surjekcją oraz $O(n) = f^{-1}(\mathbb{1})$ jest rozmaitością różniczkową wymiaru

$$\dim O(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

3.3. Pola tensorowe i formy różniczkowe

DEF. 3.13 (Pole tensorowe). Polem tensorowym na rozmaitości M nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi p tensora określona typu (r, s) , tzn. $S \ni p \mapsto T^{(r,s)}(p)$, określonego na przestrzeniach wektorowych $V = T_p M$ oraz $V^* = T_p^* M$.

3.4. Wiązka styczna i kostyczna

Niech M będzie n -wymiarową rozmaitością różniczkową z atlasem $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$. Wiązkię styczną do rozmaitości M określamy jako

$$TM = \bigcup_{q \in M} T_q M.$$

Zbiór TM parametryzujemy $2n$ współrzędnymi $(q^1, \dots, q^n, v^1, \dots, v^n)$ wykorzystując mapy z atlasu M do konstrukcji atlasu dla TM , tzn.

$$\{((\varphi_\alpha, d\varphi_\alpha), U_\alpha \times \mathbb{R}^n)\}.$$

Bibliografia

- [1] P. G. Walczak, Wstęp do geometrii różniczkowej, www.math.uni.lodz.pl/~pawelwal/Dg-wstep.pdf.
- [2] M. Sadowski, Geometria różniczkowa, Wyd. Uniw. Gdańskiego, 1998.
- [3] B. Gdowski, Elementy geometrii różniczkowej z zadaniami, PWN, 1982.
- [4] J. Gancarzewicz, Geometria różniczkowa, BM 64, PWN, 1987.
- [5] M. Spivak, Analiza na rozmaitościach, Wyd. Naukowe PWN, 2005.