Sygnały dyskretne

1. Pokazać, że dla każdego 4-periodycznego sygnału $f[n]$ jego DFT jest postaci
$$\hat{f}[k] = f[0] + f[1](-i)^k + f[2](-1)^k + f[3]i^k \,.$$

2. Dany jest sygnał N-periodyczny $x[n] = \sin(2\pi n/N)$. Wyznaczyć jego DFT oraz moc sygnału w oparciu o twierdzenie o mocy.

3. Dla dyskretnego sygnału N-okresowego $f[n] = \cos^2(n\omega)$, $\omega = 2\pi/N$ wyznaczyć moc, jeśli

   a) $N = 2$, b) $N = 4$, c) $N > 4$.

4. Dany jest sygnał periodyczny $f[n] = \delta_N[n] + \delta_N[n-1]$. Znaleźć splot cykliczny $f * f$.

5. Wyznaczyć transformatę Z dla sygnału $f[n] = \sin(n\omega)H[n]$. Określić jej obszar zbieżności.

6. Niech $e_a[n] := a^n H[n]$. Wyznaczyć splot $e_a * e_b$ w przypadkach, gdy a) $a \neq b$, b) $a = b$.

7. Wyznaczyć odpowiedź impulsową przyczynowego układu reprezentowanego następującym równaniem różnicowym:

   a) $y[n] - y[n-2] = u[n-1]$,

   b) $y[n] - \frac{1}{4}y[n-2] = u[n] + u[n-1]$,

   c) $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = u[n]$.

8. Układ przyczynowy opisany jest równaniem różnicowym $y[n] - \frac{1}{4}y[n-2] = u[n] + u[n-1]$.

   a) Czy układ jest stabilny?

   b) Znaleźć odpowiedź układu na sygnał schodkowy $H[n]$.

9. Układ przyczynowy opisany jest równaniem różnicowym $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = u[n]$.

   a) Czy układ jest stabilny?

   b) Znaleźć odpowiedź układu na sygnał $u[n] = (1/2)^n H[n]$.

Sygnały ciągłe

1. Pokazać, że
$$e^{-\alpha|t|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\,, \quad \alpha > 0\,.$$

2. Znaleźć transformatę Fouriera sygnałów:
$$\text{a)}\quad f(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t) & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}\,, \qquad \text{b)}\quad f(t) = e^{-\alpha t}H(t) \;=\; \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\alpha t} & t > 0 \end{cases}\,, \quad \alpha > 0\,,$$
$$\text{c)}\quad f(t) \;=\; H(t)e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)\,, \qquad \alpha, \omega_0 > 0\,.$$

3. Obliczyć sploty
$$\text{a)}\ \Pi_a * \Pi_b\,, \qquad \Pi_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \dfrac{a}{2} \\ 0 & |t| > \dfrac{a}{2} \end{cases} \qquad \text{b)}\ E_\alpha * H\,, \qquad E_\alpha(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\alpha t} & t > 0 \end{cases}\,,$$
$$\text{c)}\ E_\alpha * E_\beta\,, \quad \alpha \neq \beta\,,$$

4. Zastosować transformatę Laplace'a do rozwiązywania równania różniczkowego opisującego:

   a) 1D oscylator harmoniczny: $\ddot{x}+\omega_0^2 x = 0$ przy warunkach początkowych 1) $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$, 2) $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$,

   b) układ RLC w przypadku słabego tłumienia.

5. Odpowiedź układu $y(t)$ na sygnał $u(t)$ określona jest w następujący sposób:
$$y(t) \;=\; \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)}u(\tau)d\tau\,.$$

   a) Pokazać, że układ jest liniowy i czasowo-niezmienniczy.

   b) Znaleźć odpowiedź impulsową układu.

   c) Pokazać, że układ jest stabilny.

6. Filtr dolnoprzepustowy określony jest przez widmo odpowiedzi impulsowej:
$$\hat{h}(\omega) \;=\; \begin{cases} 1 - \dfrac{|\omega|}{\omega_c} & \text{dla } |\omega| \leqslant \omega_c \\ 0 & \text{dla } |\omega| > \omega_c. \end{cases}$$
   Znaleźć odpowiedź impulsową tego filtra.

7. Odpowiedź impulsowa układu liniowego i czasowo-niezmienniczego ma postać $h(t) = H(t)$. Znaleźć odpowiedź układu na sygnał prostokątny $\Pi_2(t)$.

8. Układ liniowy i czasowo-niezmienniczy określony jest przez odpowiedź impulsową $h(t) = \delta(t) + te^{-t}H(t)$.

   a) Wyznaczyć odpowiedź układu na sygnał harmoniczny $u(t) = u_0\,e^{i\omega t}$.

   b) Znaleźć widmo odpowiedzi impulsowej.

9. Pewien układ RC opisany jest równaniem różniczkowym
$$RC\dot{y} + y \;=\; -RC\dot{u} + u\,,$$

a) Znaleźć widmo odpowiedzi impulsowej układu

b) Wyznaczyć odpowiedź impulsową układu. *Wskazówka:* Wykorzystać w tym celu odwrotną transformatę Fouriera funkcji

$$e^{-at}H(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{a+i\omega}$$

c) Znaleźć funkcję przejścia (transmitancję) dla tego układu i na tej podstawie znaleźć odpowiedź impulsową układu. Porównać z wynikami poprzedniego punktu!

10. Pewien układ liniowy opisany jest równaniem $\ddot{y} - 5\dot{y} + 4y = u(t)$.

    a) Znaleźć transmitancję układu,

    b) określić, czy układ jest stabilny,

    c) wyznaczyć odpowiedź impulsową $h(t)$ dla tego układu,

    d) czy $h(t)$ jest bezwzględnie całkowalna?

    e) znaleźć odpowiedź na sygnał $u(t) = e^{2t}$,

    f) wyznaczyć odpowiedź na impuls $u(t) = 3\delta(t-1)$.

11. Układ RL opisany jest równaniem $L\dot{I}(t) + RI(t) = u(t)$, gdzie $I(t)$ jest natężeniem prądu w obwodzie. Przyjmijmy warunek początkowy $I(0) = 0$.

    a) Znaleźć transmitancję i odpowiedź impulsową. Czy układ jest stabilny?

    b) Wyznaczyć odpowiedź na sygnał schodkowy $H(t)$.