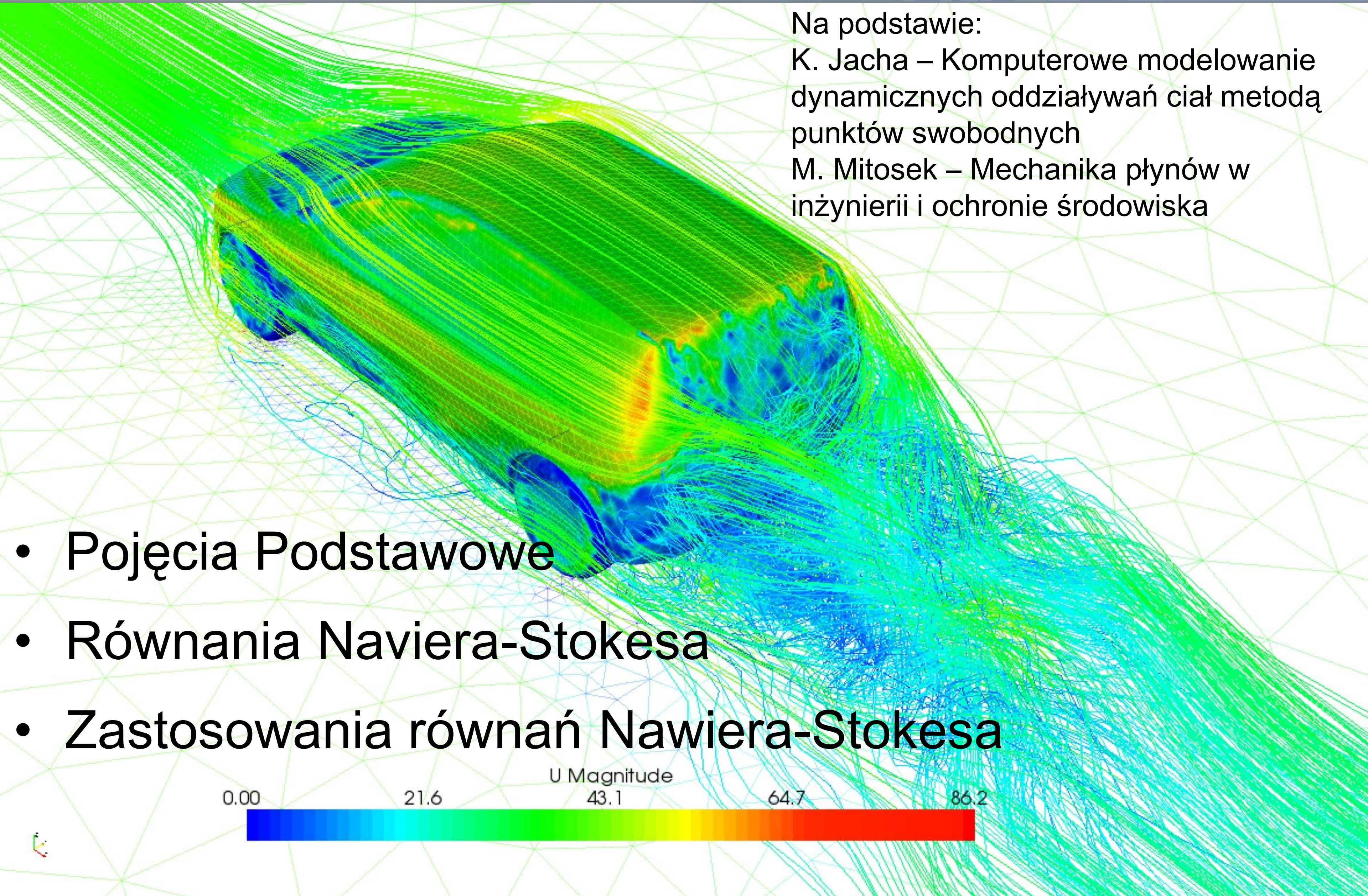
Fizyka w symulacji komputerowej i modelowaniu komputerowym

Równania Naviera-Stokesa

Łukasz Pepłowski

Plan



Na podstawie:
K. Jacha – Komputerowe modelowanie dynamicznych oddziaływań ciał metodą punktów swobodnych
M. Mitosek – Mechanika płynów w inżynierii i ochronie środowiska

- Pojęcia Podstawowe
- Równania Naviera-Stokesa
- Zastosowania równań Nawiera-Stokesa

Podstawowe pojęcia

- Mechanika płynów:
  - Mechanika cieczy i mechanika gazów – dział mechaniki klasycznej, w której wielkości masy i energii podlegają prawom zachowania.
- Mechanikę płynów można podzielić na hydrodynamikę i aerodynamikę.
- Przedmiotem mechaniki cieczy i gazów są ośrodki ciągłe, czyli:
  - Dowolnie małe elementy objętości są wystarczająco duże w porównaniu z odległościami atomowymi, tak że można w opisie ich stanu używać pojęć takich jak ciśnienie, temperatura itp.
  - Cząstki (cieczy, punkty materialne) są na tyle małe, że w porównaniu z wymiarami całej cieczy mogą być traktowane jak punkty geometryczne.
  - W stanie statycznym w cieczach nie występują naprężenia ścinające, a w cieczach nielepkich naprężenia ścinające są zerowe również w dynamice
  - Wzajemne przemieszczanie elementów cieczy mogą być duże nawet przy małych towarzyszących im siłach

Podstawowe pojęcia

- Gęstość płynu $\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$
- Ciężar właściwy γ $\gamma = g\rho$
- Objętość właściwa $w = \frac{1}{\rho}$
- Ściśliwość płynu (zdolność do zmiany objętości w danej temperaturze, przy zmianie ciśnienia) jej miarą jest współczynnik ściśliwości β_p (1/Pa): $\frac{dV}{V} = -\beta_p dp$
- Rozszerzalność cieplna – zdolność płynu do zmiany swej objętości przy zmianie temperatury (w stałym ciśnieniu):

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\beta_T dT$$

Podstawowe pojęcia

- Dyfuzja (molekularna) w płynach – proces molekularnego wyrównywania stężeń:

$$I_A = -D\frac{dc_A}{dl}$$

  gdzie I_A – natężenie strumienia dyfuzji składnika A, c_A – masowe stężenie składnika A, l – odległość, D - współczynnik proporcjonalności (współczynnik dyfuzji molekularnej)

- Lepkość – zdolność do przenoszenia naprężeń stycznych, przy wzajemnym przemieszczaniu się jego elementów z różnymi prędkościami:

$$\tau = \frac{T}{A} = \pm\mu\frac{dv}{dn}$$

  gdzie to T siła styczna do powierzchni A.
  pochodna dv/dn to prędkość odkształcania kątowego, μ dynamiczny współczynnik lepkości (tylko dla płynów Newtonowskich – np. woda.)

Podstawowe pojęcia

- Stosunek dynamicznego współczynnika lepkości do gęstości płynu nazywa się kinematycznym współczynnikiem lepkości ν (m^2/s):
$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

- Napięcie powierzchniowe – efekt działania sił molekularnych na granicy faz. Wynikają one z tego, że siły oddziaływania między drobinami cieczy są większe niż siły oddziaływania ciecz-gaz. Powstaje wtedy błona, na którą działają pewne siły. Miarą tej siły jest współczynnik napięcia powierzchniowego lub wprost napięcie powierzchniowe σ, czyli stosunek siły napinającej F do długości przekroju błony L, na którą działa siła F:
$$\sigma = \frac{F}{L}$$

Podstawowe pojęcia

- Płyny rzeczywiste i doskonałe. W celu ułatwienia matematycznego opisu zjawisk fizycznych w płynach w rozważaniach stosuje się często uproszczone modele cieczy i gazów, np.:
  - Płyn nielepki, w którym pomija się siły styczne, podczas ruchu ośrodka: $\mu=0$;
  - Płyn nieściśliwy: $\rho=0$;
  - Ciecz doskonała, w której pomija się lepkość i ściśliwość, rozszerzalność cieplną i napięcie powierzchniowe
  - Gaz doskonały, w którym pomija się objętość molekuł, siły spójności oraz lepkość. Gaz ten spełnia równanie Clapeyrona
  - Gaz termodynamicznie doskonały, który spełnia równanie Clapeyrona, lecz jest ośrodkiem lepkim.

$$pV = nRT$$

Równanie Naviera-Stokesa

Równanie Naviera-Stokesa jest ogólnym równaniem ruchu płynu rzeczywistego.

$$\frac{d\mathrm{v}_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + v\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial z^2}\right) + \frac{v}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right),$$

$$\frac{d\mathrm{v}_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + v\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_y}{\partial z^2}\right) + \frac{v}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right),$$

$$\frac{d\mathrm{v}_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + v\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_z}{\partial z^2}\right) + \frac{v}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right),$$

Opisuje zasadę zachowania masy i pędu dla poruszającego się płynu. Według nich zmiany pędu elementu płynu zależą jedynie od zewnętrznego ciśnienia i wewnętrznych sił lepkości w płynie.

Równanie Naviera-Stokesa

Postać wektorowa równania Naviera-Stokesa:

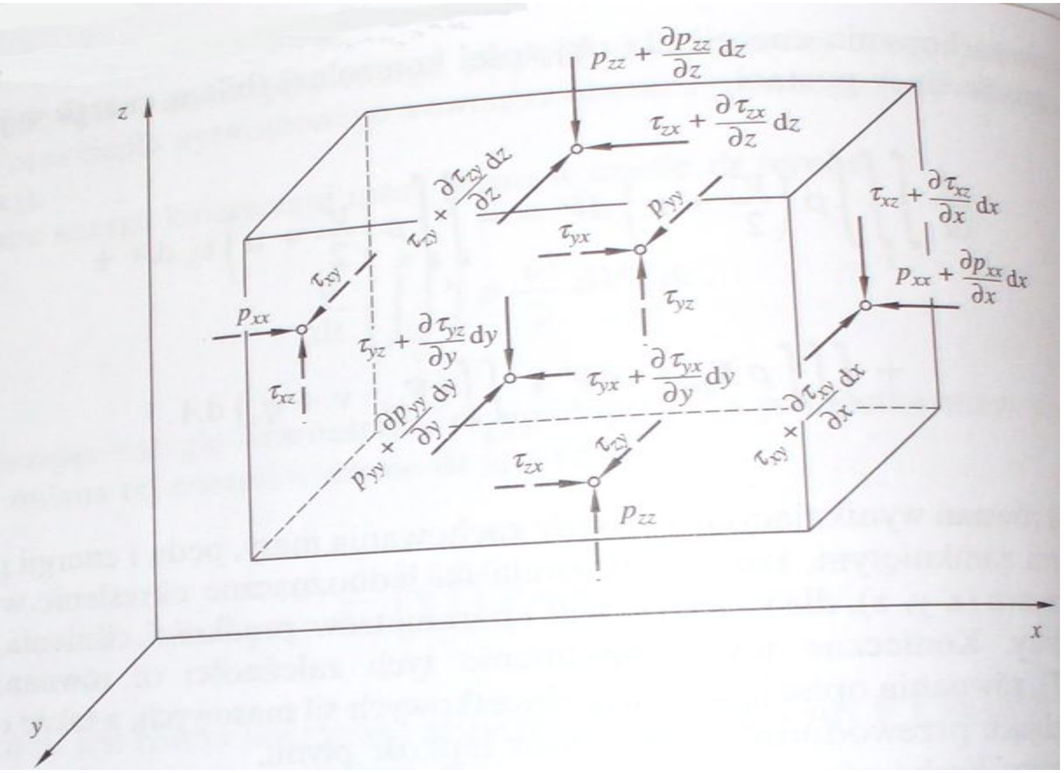
$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{jm} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\ p + \nu\nabla^2\mathbf{v} + \frac{\nu}{3}\,\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \mathbf{v}$$

Równanie Naviera-Stokesa

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{jm} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\; p + \nu\nabla^2\mathbf{v} + \frac{\nu}{3}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}$$

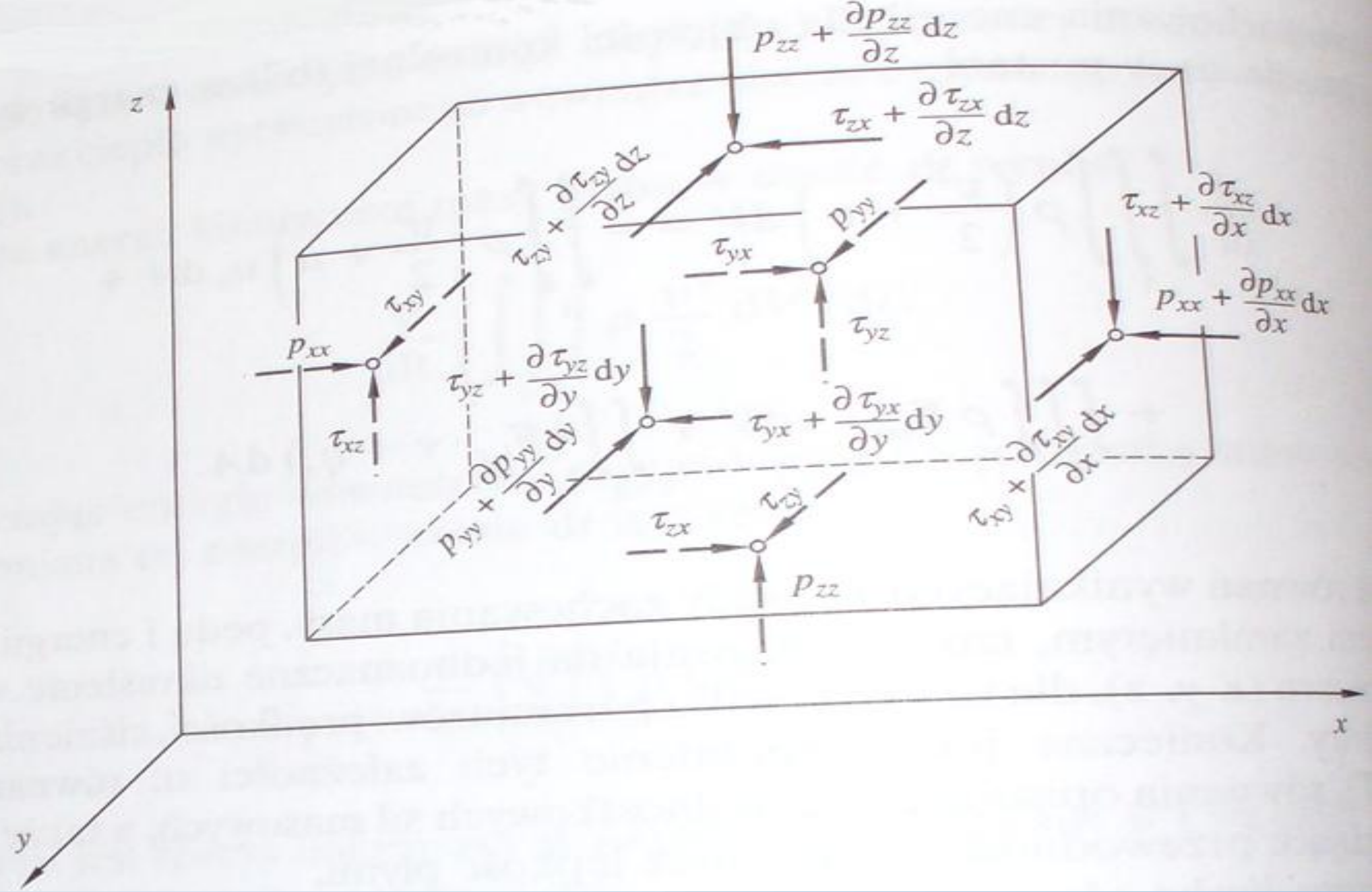
- Wypadkową siłę bezwładności można zapisać jako: $\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}dxdydz$
- Wypadkowa siła masowa jest równa: $\rho\mathbf{F}_{jm}dxdydz$
  gdzie składowe jednostkowe $\mathbf{F}_{jm}$ będą oznaczane jako X, Y, Z.

Równanie Naviera-Stokesa



Siły powierzchniowe działają na każdą ściankę sześcianu – elementu płynu. Na rysunku zaznaczono zwroty sił powierzchniowych na ściankach bliższych początku układu współrzędnych. Na każdej ściance występują naprężenia (jedno normalne i dwa styczne), jako składowe jednostkowej siły powierzchniowej.

Równanie Naviera-Stokesa



Równanie Naviera-Stokesa

- Naprężenia w płynie można zapisać jako macierz 9 funkcji:

$$S = \begin{vmatrix} p_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & p_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & p_{zz} \end{vmatrix}$$

- Uwzględniając wszystkie siły działające w jednym kierunku (np. x) mamy:

$$p_{xx}dydz - \left(p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz + \tau_{yx}dzdx - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dzdx + \tau_{zx}dxdy - \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) = -\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

- Co po uwzględnieniu siły masowej, po porównaniu z siłą bezwładności daje równanie równowagi sił w kierunku osi x:

$$\frac{d\mathrm{v}_x}{dt} \rho dxdydz = X\rho dxdydz - \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dxdydz$$

Równanie Naviera-Stokesa

- Po podzieleniu przez masę elementu $\rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ otrzymujemy (dla trzech kierunków):

$$\frac{d\mathrm{v}_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right),$$

$$\frac{d\mathrm{v}_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right),$$

$$\frac{d\mathrm{v}_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right).$$

gdzie:

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial x}\right),$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = -\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial z}\right),$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y}\right).$$

$$p_{xx} = p + \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right) - 2\mu\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x},$$

$$p_{yy} = p + \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right) - 2\mu\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y},$$

$$p_{zz} = p + \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right) - 2\mu\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}.$$

Równanie Naviera-Stokesa

- Po podstawieniu:

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial x}\right), \qquad p_{xx} = p + \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right) - 2\mu\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x},$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = -\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial z}\right), \quad \text{i} \quad p_{yy} = p + \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right) - 2\mu\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y},$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y}\right). \qquad p_{zz} = p + \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right) - 2\mu\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}.$$

$$\frac{d\mathrm{v}_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right),$$

do: $$\frac{d\mathrm{v}_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right),$$ otrzymujemy równania Naviera-Stokesa:

$$\frac{d\mathrm{v}_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right).$$

$$\frac{d\mathrm{v}_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial z^2}\right) + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right),$$

$$\frac{d\mathrm{v}_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_y}{\partial z^2}\right) + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right),$$

$$\frac{d\mathrm{v}_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_z}{\partial z^2}\right) + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right),$$

Równanie Naviera-Stokesa

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{jm} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\; p + \nu\nabla^2\mathbf{v} + \frac{\nu}{3}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}$$

- Dla płynu nieściśliwego (div**v**=0) równanie ogranicza się do:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{jm} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\; p + \nu\nabla^2\mathbf{v}$$

- Jeśli płyn jest nielepki (ν=0) mamy:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{jm} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\; p$$

- Gdy płyn znajduje się w spoczynku względem układu współrzędnych mamy:

$$\mathbf{F}_{jm} = \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\; p$$

Równanie Naviera-Stokesa

- Rozwiązania równań Naviera-Stokesa mogą być znalezione jedynie metodami numerycznymi

Etapy rozwiązywania równań Naviera-Stokesa (N-S)

1. Określić czynniki wywołujące przepływ:

a) różnica ciśnień,

b) ruch powierzchni ograniczającej układ,

c) siły masowe (np. grawitacji).

2. Wybrać odpowiedni układ współrzędnych i właściwą dla tego układu formę równań N-S.

3. Wyznaczyć ogólną postać zależności na składowe prędkości płynu i ciśnienie:

a) określić czy przepływ jest stacjonarny czy niestacjonarny,

b) określić przewidywany kierunek przepływu, tj. które składowe prędkości są niezerowe

c) określić od jakich współrzędnych zależą niezerowe składowe prędkości i ciśnienie.

4. Określić warunki brzegowe i/lub warunki początkowe np.:

a) brak poślizgu na powierzchni kontaktu ciecz – ciało stałe,

b) brak naprężeń stycznych na powierzchni swobodnej cieczy,

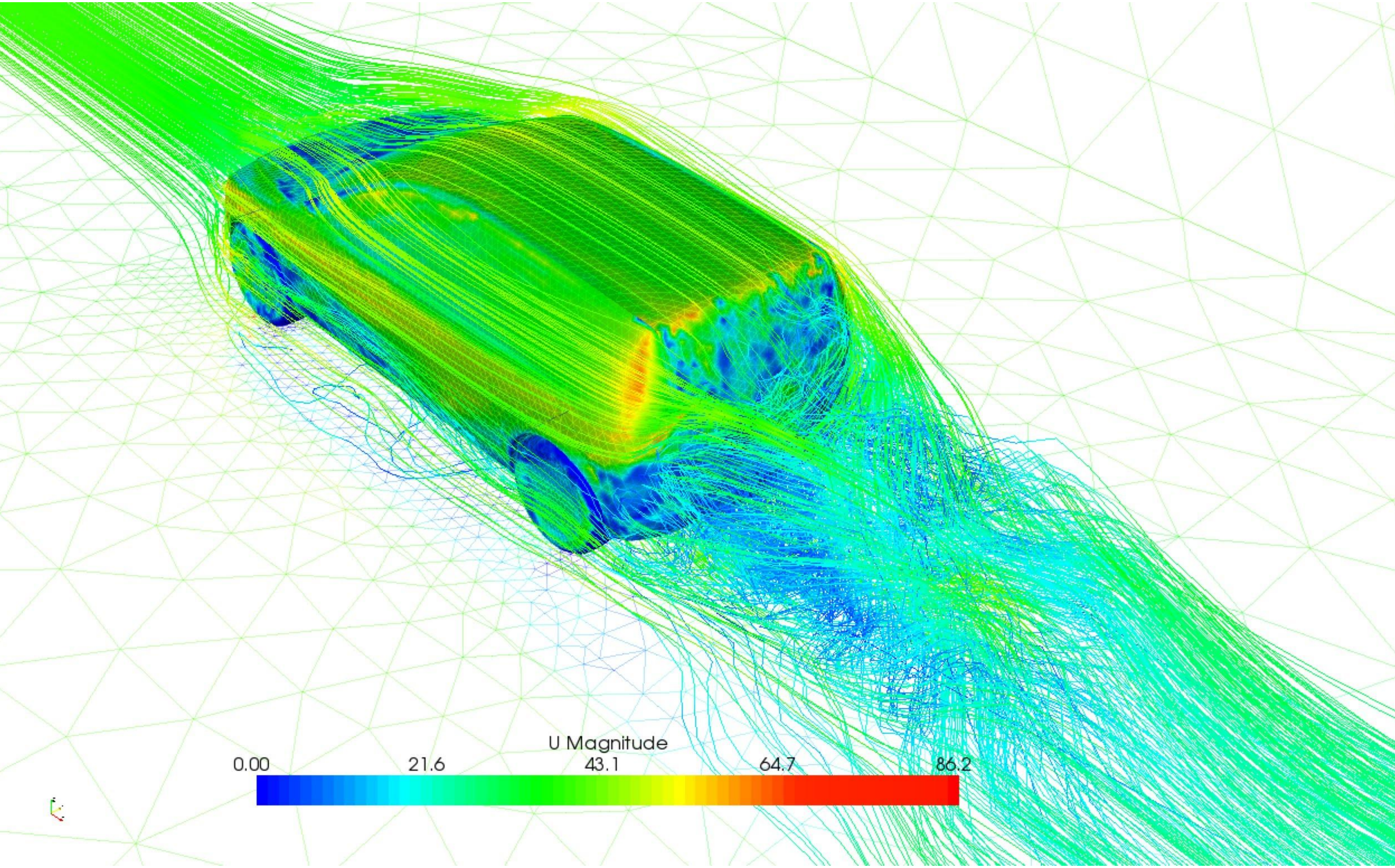
c) równość prędkości i naprężeń na powierzchni miedzyfazowej ciecz – ciecz,

d) warunek symetrii; np. gdy rozkład prędkości ma oś lub płaszczyznę symetrii, to w osi lub w
płaszczyźnie symetrii zeruje się pochodna prędkości,

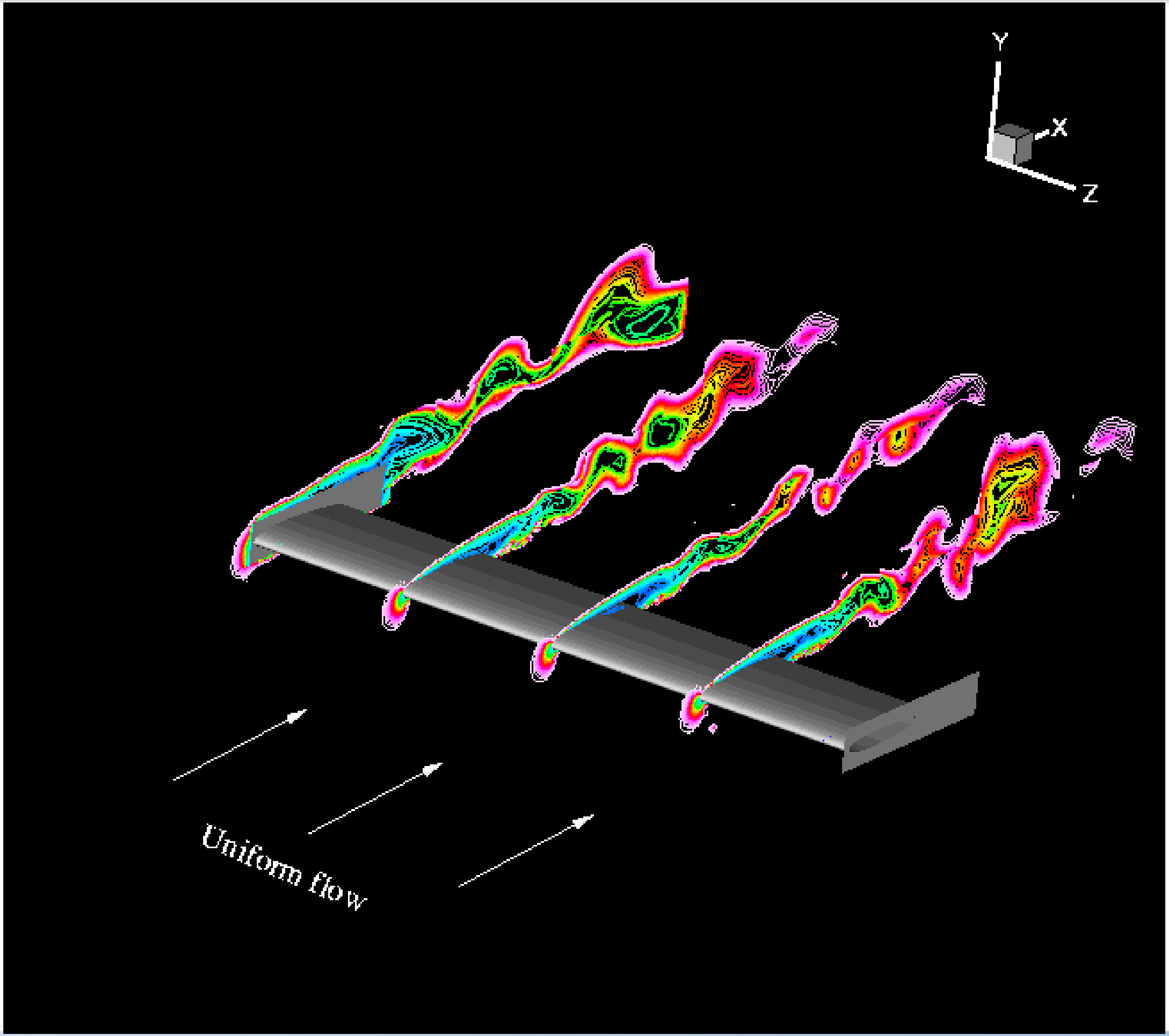
e) płyn jest w stanie bezruchu na początku procesu lub porusza się z zadaną prędkością początkową.

5. Uprościć i rozwiązać układ równań ciągłości i Naviera – Stokesa.

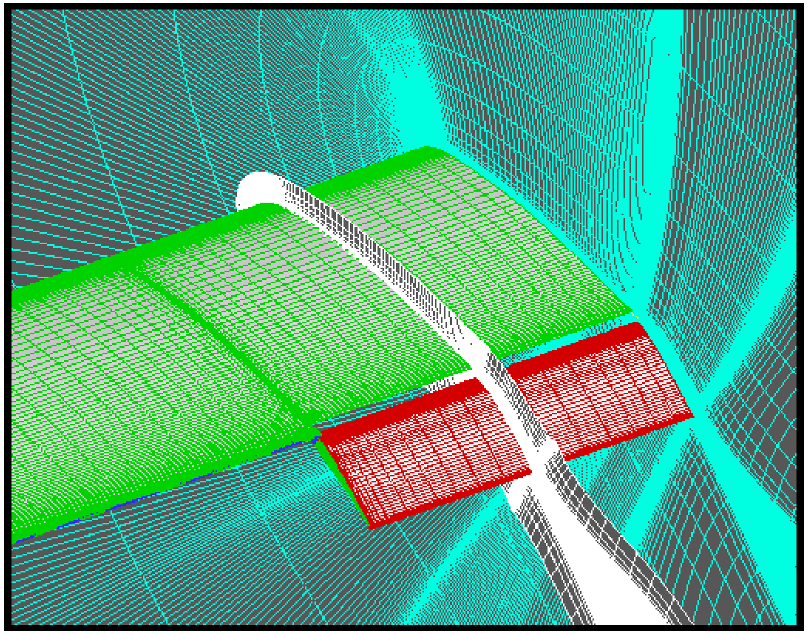
Zastosowania równań Naviera Stokesa



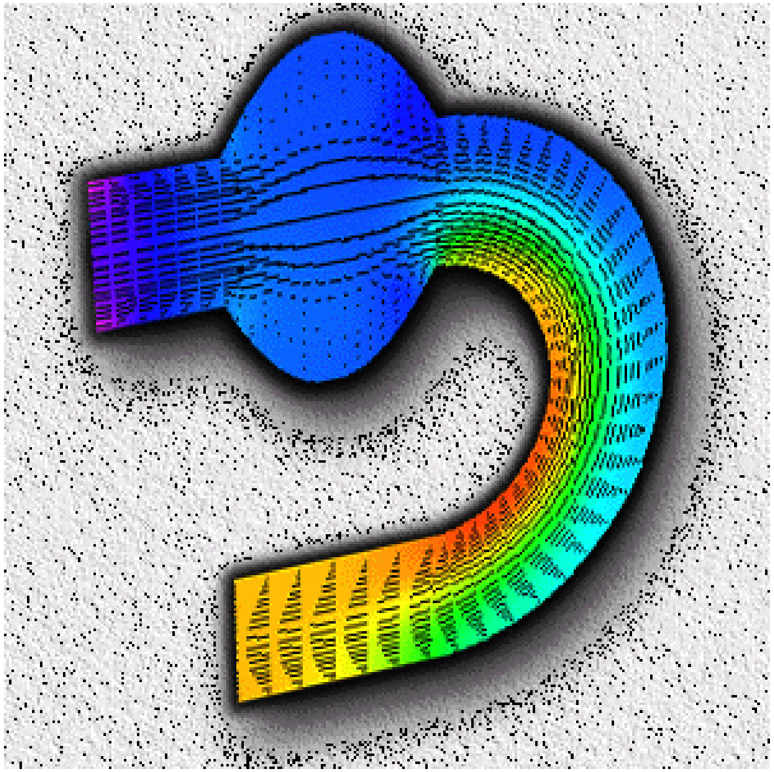
Zastosowania równań Naviera Stokesa



Zastosowania równań Naviera Stokesa



Zastosowania równań Naviera Stokesa



Zastosowania równań Naviera Stokesa

FILMY

Dziękuję za uwagę ☺