Równania różniczkowe zwyczajne (ODE)

Problem: rozwiązać równanie postaci $\frac{d\vec{r}}{dt} = f(\vec{r}, t)$, $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$

Uwaga! Równania wyższych rzędów można zawsze sprowadzić do równań tej postaci. np. równanie ruchu punktu materialnego:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \cancel{m}\, \frac{\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}{m} \qquad \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \; \dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$$

sprowadzamy się do: podstawiamy $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)}{m} \qquad \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t) \qquad \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$$

initial value problem

Najprostszy algorytm — algorytm Eulera

Trzy wyprowadzenia:

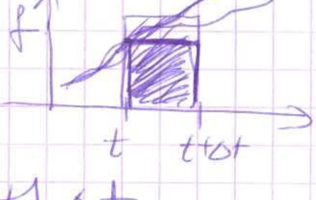
1° Szkolne → iloraz różnicowy

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = f(\vec{r}, t) \Rightarrow \vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t\, f(\vec{r}$$

2° Formalne rozwiązanie równania i całkowanie numer.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = f(\vec{r}, t)$$

$$\left[\vec{r}(t)\right]_t^{t+\Delta t} = \int_t^{t+\Delta t} f(\vec{r}, t)\, dt$$



$$\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = f(\vec{r}, t)\, \Delta t$$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t\, f(\vec{r}, t)$$

3° Szereg Taylora – b. ważny w metodach numerycznych
Pozwala za pomocą wielomianu znaleźć wartość funkcji za pomocą wartości w innym punkcie i informacji o zmienności w tym punkcie (pochodnej)

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{1!}\Delta t + \frac{\ddot{\vec{r}}(t)}{2!}\Delta t^2 + \frac{\dddot{\vec{r}}(t)}{3!}\Delta t^3 + \dots$$

ODE 2

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \dot{\vec{r}}(t)\Delta t + \cancel{\frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}(t)\Delta t^2} + \cancel{\frac{1}{6}\dddot{\vec{r}}(t)\Delta t^3} + \ldots$$

$f(\vec{r}, t)$ bo $\frac{d\vec{v}}{dt} = f$

Rząd metody = które wyrazy w sz. Taylora zostawiamy

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t\, f(\vec{r}, t)$$

Metoda Eulera = równoważne założeniu, że $f(\vec{r}, t)$ jest stałe podczas ~~Δt~~ kroku (Δt)

Euler stosowany do równania Newtona

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}{m} \qquad \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \ \dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$$

Euler ok. jeżeli $\vec{a}$=const

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}{m} \qquad \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \longrightarrow \vec{v}(t+\Delta t) = v(t) + \vec{a}\Delta t$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t) \qquad \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \longrightarrow \vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + v(t)\Delta t$$

Euler: wzór jak na ruch jednostajny

Sztuczka: zamiast $v(t)$ ~~explicite~~, weźmy $v(t+\Delta t)$ ~~implicite~~ z drugiego równania:

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + v(t+\Delta t)\Delta t$$

Wówczas

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \left(v(t) + \vec{a}\Delta t\right)\Delta t$$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + v(t)\Delta t + \vec{a}\Delta t^2$$

Porównajmy ze wzorem na ruch jedn. przysp. (= wzór w szeregu Tayl.)

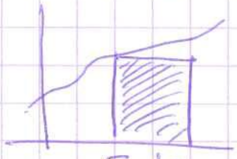
$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \frac{\dot{\vec{r}}(t)\Delta t}{1!} + \frac{\ddot{\vec{r}}(t)}{2!}\Delta t^2 + \ldots =$$

$$\vec{r}(t) + v(t)\Delta t + \frac{\vec{a}(t)}{2}\Delta t^2 + \ldots \quad \text{ściśle jeżeli } \vec{a}=\text{const}$$

Euler (ruch jednostajny w jednym ze wzorów) $\Rightarrow$ brak $\frac{1}{2}$ w ost. wz.

Jeżeli $f(\vec{r},t)$ jest znane analitycznie i możemy policzyć jej pochodne, możemy liczyć $\vec{r}(t+\Delta t)$ z wielką precyzją, zachowując wiele wyrazów rozwinięcia w szereg Taylora.
Ale uwaga – jeżeli możemy ją scałkować, to znamy wzór analityczny

Metoda Eulera jest asymetryczna (korzysta z informacji na początku przedziału czasowego) – explicit



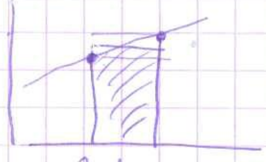
Euler

MidPoint

$$\frac{r_n - r_{n-1}}{\Delta t} = f(r_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}})$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_{n-1}}{2\Delta t} = f\left(\vec{r}_n\cancel{(t+\tfrac{\Delta t}{2})}, t_n + \tfrac{\Delta t}{2}\right)$$

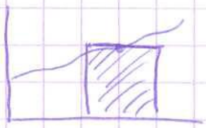


Adams

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2}$$

Podobne do MidPoint, ale inne:

Dwustopniowa metoda explicite (ulepszona met. Eulera)



Trochę inne podejście – dwuetapowe:

etap 1°: metodą Eulera policzmy wartość funkcji w środku przedziału tj. dla $t + \frac{\Delta t}{2}$

$$\vec{r}\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right) = \vec{r}(t) + \frac{\Delta t}{2} f(\vec{r},t)$$ to zapewni symetryczność

etap 2°: korzystając z tej wartości obliczmy wartość na końcu:

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t\, f\left(\vec{r}\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right), t+\frac{\Delta t}{2}\right)$$

Zapiszmy to trochę inaczej:

Podwojona zmiana $\vec{r}$ w pierwszej połowie kroku

$1° \rightarrow \quad 2\left(\vec{r}\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right) - \vec{r}(t)\right) = \vec{k}_1 = h f(\vec{r},t) \qquad h \equiv \Delta t$

Zmiana $\vec{r}$ podczas całego kroku

$2° \rightarrow \quad \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = h f\left(\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{k}_1, t + \frac{1}{2}h\right) = \vec{k}_2$

$$\Longrightarrow \vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{k}_2$$

Ostatecznie przepis

$$\vec{k}_1 = \Delta t\, f(\vec{r}, t)$$
$$\vec{k}_2 = \Delta t\, f\left(\vec{r} + \tfrac{1}{2}\vec{k}_1,\ t + \tfrac{1}{2}\Delta t\right)$$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{k}_2$$

- Bardziej formalne wyprowadzenie wymaga użycia rozwinięcia w szereg Taylora funkcji dwóch zmiennych ~~$f(t+\Delta t$~~, $f(\vec{r}+k_2, t+\Delta t)$
- Trzeba obliczać f między krokami — kłopot jeżeli układ wielu równań np. wiele punktów.

~~Również bez formalnego wyprowadzenia~~

Ogólne sformułowanie: model explicit

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \sum_{i=1}^{s} w_i \vec{K}_i \qquad \vec{K}_1 = hf(\vec{r}, t)$$

~~$\vec{K}_2 = hf(\vec{r}+a_i h$~~, $i>1$

$$\vec{K}_i = hf\left(t + a_i h,\ \vec{r} + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j\right)$$

Trzeba w każdym kroku s-razy obliczać wartość $f(x,y)$

$s=1$: $\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + w_1 K_1 = \vec{r}(t) + hf(\vec{r}, t)$
$= \vec{r}(t) + \Delta t f(\vec{r}, t)$ metoda Eulera = RK1

$s=2$: $\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + w_1 \vec{K}_1 + w_2 \vec{K}_2$

$$\vec{K}_1 = hf(\vec{r}, t)$$
$$\vec{K}_2 = hf\underbrace{(\vec{r} + b_{21}K_1,\ t + a_2 h)}_{\text{rozwijamy w szereg Taylora}}$$

uproszczenie!
$\vec{r} \to r$

$$f(\vec{r} + b_{21} h f(\vec{r}, t),\ t + a_2 h) = f(\vec{r}, t) + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{(\vec{r},t)} \cdot (a_2 h) + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{(\vec{r},t)}}_{\nabla f} \cdot (b_{21} h f(\vec{r}, t))$$

Wstawiamy rozwinięcie

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + w_1 h f(\vec{r},t) + w_2 h\Big\{ f(\vec{r},t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\vec{r},t)\cdot a_2 h + \frac{\partial f}{\partial r}(\vec{r},t)\cdot b_{21} h f(\vec{r},t)\Big\}$$

1 2 3

$$= \vec{r}(t) + h f(\vec{r},t)(w_1+w_2) + w_2 h^2\left(a_2 \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{(\vec{r},t)} + b_{21} f \frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

Wzorem do porównania jest rozwinięcie w szereg Taylora względem czasu:

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{1!}h + \frac{\ddot{\vec{r}}(t)}{2!}h^2 + \frac{\vec{r}^{(3)}(t)}{3!}h^3 + \dots$$

1 2 3

2 – 2 $$(w_1+w_2) h f(\vec{r},t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{1!} h$$

$$(w_1+w_2) f(\vec{r},t) = \dot{\vec{r}}(t) \iff$$ Pierwotne równanie $\frac{d\vec{r}}{dt} = f(\vec{r},t)$

$$\Downarrow$$

$$w_1+w_2 = 1$$

$$\boxed{w_1+w_2=1}$$

3 – 3 $$\frac{\ddot{\vec{r}}(t)}{2} h^2 = w_2 h^2\left(a_2 \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{(\vec{r},t)} + b_{21} f(\vec{r},t)\frac{\partial f}{\partial r}\Big|_{(\vec{r},t)}\right)$$

Zajmijmy się lewą stroną

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\dot{\vec{r}}(t)}_{\substack{= f(\vec{r},t) \\ \text{z równania}}}\Big) = \frac{d}{dt}\big(f(\vec{r},t)\big) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial r}\underbrace{\frac{dr}{dt}}_{=\dot{\vec{r}}(t) = f(\vec{r},t)} =$$

różniczka zupełna

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial t}dt}$$

$$\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial r} f(\vec{r},t)\right) = h^2\left(\underline{\underline{w_2 a_2}}\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial r}\underline{\underline{b_{21} w_2}}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_2 a_2 = \frac{1}{2} \\ w_2 b_{21} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a_2 = b_{21}$$

$\boxed{\text{ODE C}}$

Układ równań na w_1, w_2, b_{21} i a_2 (4 niewiadome, ale mamy tylko 3 równania)

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ w_2 = \frac{1}{2a_2} \\ b_{21} = a_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \infty$ wiele rozwiązań, niech parametrem będzie a_2

$\Downarrow$

cała rodzina metod

$$w_1 = 1 - \frac{1}{2a_2} \qquad a_2 \neq 0$$

Wówczas

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \left(1 - \frac{1}{2a_2}\right) hf(\vec{r}, t) + \frac{1}{2a_2} hf(\vec{r} + a_2 hf(\vec{r}, t), t + a_2 h)$$

$\leftarrow$ W powyższej formule można przeprowadzić minimalizację w zmiennej a_2, żeby zminimalizować błąd tj. różnicę z Taylorem

Przyjmijmy np. $a_2 = 1 \Rightarrow w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$, $b_{21} = 1$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \frac{h}{2} f(\vec{r}, t) + \frac{h}{2} f(\vec{r} + \underbrace{hf(\vec{r}, t)}_{k_1}, t+h)$$

Inne rozwiązanie to $a_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow w_2 = \frac{1}{2\frac{1}{2}} = 1$

$$w_1 = 1 - w_2 = 0$$

$$b_{21} = a_2 = \frac{1}{2}$$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + 0 + 1 \cdot hf(\underbrace{\vec{r} + \tfrac{1}{2} hf(\vec{r}, t)}_{\vec{r}(t + \frac{\Delta t}{2})}, t + \tfrac{1}{2} h)$$

$\Downarrow$

Metoda MidPoint

$s = 4$ i zoptymalizowane współczynniki dają przepis na **RK4**

$$\vec{k}_1 = hf(\vec{r}, t)$$
$$\vec{k}_2 = hf(\vec{r} + \tfrac{\vec{k}_1}{2}, t + \tfrac{h}{2})$$
$$\vec{k}_3 = hf(\vec{r} + \tfrac{\vec{k}_2}{2}, t + \tfrac{h}{2})$$
$$\vec{k}_4 = hf(\vec{r} + \vec{k}_3, t + h)$$

optymalna metoda RK4

Obliczenia dla wyższych rzędów są trudne, bo współczynniki przy ~~potęgach~~ pochodnych h zależą od funkcji f.

$$\vec{r}(t+h) = \vec{r}(t) + \frac{1}{6}(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4) + O(h^5)$$

To zaimplementować

Automatyczne dopasowywanie kroku

ODE7

Podejście 1°: „step doubling"

w każdym kroku lub co ileś kroków przeprowadzamy obliczenia dla kroku Δt i kroku $\Delta t/2$
Jeżeli wyniki są różne to zmniejszamy krok.
Jeżeli takie same to możemy sprawdzić, czy wydłużenie do $2\Delta t$ nie daje tych samych wyników co Δt

Robienie tego w każdym kroku podwaja obliczenia
Robienie rzadziej → można przegapić krytyczny moment

Podejście 2°: Policzyć RK4 i RK5 i sprawdzić różnice w wyniku. Gdy jest błąd → nie zmieniamy rzędu, tylko długość kroku Δt

To jednak wymaga policzenia f dla wielu (10) różnych argumentów: 4 dla RK4 i 6 dla RK5

Runge – Kutta – Fehlberg

$\underbrace{\text{Runge – Kutta}}_{1900}$ – $\underbrace{\text{Fehlberg}}_{1969}$

Dla Runge-Kutta rzędu $M > 4$ więcej niż $K_1 - K_M$ (obliczeń funkcji f) jest potrzebne. Dla RK5 to 6, RK6 – 7, RK7 – 9, RK8 – 11
Dlatego RK4 jest tak popularne.

Są też rozwiązania z pięcioma wywołaniami dla RK4 równie dokładne, co to klasyczne (tylko bardziej kosztowne obliczeniowo)

Fehlberg odkrył takie zestawy $\{K_i\}$, które pozwalają, w różnych kombinacjach na stworzenie algorytmów RK różnych rzędów (embedded RK formulas)

Jedna z ulepszonych wersji Fehlberga metod RK czwartego rzędu, która wymaga pięciu wyrazów

$$\begin{cases} \vec{K_1} = hf(\vec{r}, t) \\ \vec{K_2} = hf\left(\vec{r} + \frac{1}{4}\vec{K_1}, t + \frac{1}{4}h\right) \\ \vec{K_3} = hf\left(\vec{r} + \frac{3}{32}\vec{K_1} + \frac{9}{32}\vec{K_2}, t + \frac{3}{8}h\right) \\ \vec{K_4} = hf\left(\vec{r} + \frac{1932}{2197}\vec{K_1} - \frac{7200}{2197}\vec{K_2} + \frac{7296}{2197}\vec{K_3}, t + \frac{12}{13}h\right) \\ \vec{K_5} = hf\left(\vec{r} + \frac{439}{216}\vec{K_1} - 8\vec{K_2} + \frac{3680}{513}\vec{K_3} - \frac{845}{4104}\vec{K_4}, t + h\right) \end{cases}$$

$$\vec{r}(t+h) = \vec{r}(t) + \frac{25}{216}\vec{K_1} + \frac{1408}{2565}\vec{K_3} + \frac{2197}{4104}\vec{K_4} - \frac{1}{5}\vec{K_5}$$

Dokładając jeden wyraz

$$\vec{K_6} = hf\left(\vec{r} - \frac{8}{27}\vec{K_1} + 2\vec{K_2} - \frac{3544}{2565}\vec{K_3} + \frac{1859}{4104}\vec{K_4} - \frac{11}{40}\vec{K_5}, t + \frac{1}{2}h\right)$$

można obliczyć RK rzędu 5:

$$\vec{r}(t+h) = \vec{r}(t) + \frac{16}{135}\vec{K_1} + \frac{6656}{12825}\vec{K_3} + \frac{28561}{56430}\vec{K_4} - \frac{9}{50}\vec{K_5} + \frac{2}{55}\vec{K_6}$$

Zatem niewielkim dodatkowym kosztem obliczając funkcję f dla szóstego argumentu możemy obliczyć jednocześnie RK4 i RK5 i porównując wyniki zmniejszać lub zwiększać krok czasowy.

To metoda RKF4(5)

Tu ~~zakładamy~~ mamy $\vec{r}(0)$ itp.

0) Definiujemy wszystkie współczynniki (stałe) i zadajemy wartości graniczne dla błędu (ε_{min}, ε_{max}) i kroku czasowego (h_{min}, h_{max})

1) Uruchamiamy procedurę RKF45 obliczając $\vec{r}_4$ i $\vec{r}_5$. Obliczamy $\varepsilon = |\vec{r}_4 - \vec{r}_5|$

2) Jeżeli $\varepsilon_{min} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{max}$, krok h pozostaje bez zmian → wykonujemy następny krok obliczeń

3) Jeżeli $\varepsilon < \varepsilon_{min}$: ~~$h \to h/2$~~ $h \to 2h$
Jeżeli $\varepsilon > \varepsilon_{max}$: ~~$h \to 2h$~~ $h \to h/2$

4) Przy warunku, że $h_{min} \leq h \leq h_{max}$ wykonywany jest następny krok

$\boxed{\text{ODE 9}}$

Błąd można policzyć jawnie (choć w praktyce niepotrzebne):

$$\varepsilon = |\vec{r}_5 - \vec{r}_4| = \left| \frac{1}{360}\vec{k}_1 - \frac{128}{4275}\vec{k}_3 - \frac{2197}{75240}\vec{k}_4 + \frac{1}{50}\vec{k}_5 + \frac{2}{55}\vec{k}_6 \right|$$

Metody powinnie adaptujące krok:

NR: $$h_{nast} = h_{popr} \cdot \underbrace{S}_{\text{np. } \boxed{0.95}} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/5}$$

tolerancja

Van Pessos $$h_{nast} = h_{popr} \cdot \underbrace{\left(\frac{S}{2\varepsilon}\right)}_{\substack{\text{obcięcone} \\ 0.1 < \ < 4}}^{1/4}$$ zmiana tylko gdy $\varepsilon \geqslant S$ - tolerancja

10^{-8}

Problem! Metody RK nie nadają się ~~(wprost)~~ do wprost do wrażliwych ~~problemów~~ zagadnień, w których funkcja f nie jest dana jawnie np. problem wielu oddziałujących ze sobą cząstek. Ważne, że chcemy obliczyć tylko $f(x_0, t_0)$ – inne wymagałyby ciężkich obliczeń.
$\hookrightarrow$ RK1 = Euler lub Verlet.

~~Zagadnienia, którymi my się zajmiemy (implementacja).~~

Zanim zajmiemy się implementacją RK4 i ~~oszacowania~~ ~~odchylenia~~ wbudowanej RKF4(5) przyjrzyjmy się jeszcze jednej metodzie:

Algorytm Verleta – metoda dopasowana do r-Newtona

Taylor trzeciego rzędu dla $\vec{r}(t+\Delta t)$ i $\vec{r}(t+(-\Delta t))$:

- $$\vec{r}(t+\Delta t) \cong \vec{r}(t) + \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{1!}\Delta t + \frac{\ddot{\vec{r}}(t)}{2!}\Delta t^2 + \frac{\dddot{\vec{r}}(t)}{3!}\Delta t^3 + \dots$$
$$= \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\Delta t + \frac{\vec{a}(t)\Delta t^2}{2} + \frac{\vec{r}^{(3)}(t)}{6}\Delta t^3$$

- $$\vec{r}(t-\Delta t) = \vec{r}(t+(-\Delta t)) =$$
$$\cong \vec{r}(t) - \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{1!}\Delta t + \frac{\ddot{\vec{r}}(t)}{2!}(-\Delta t)^2 + \frac{\vec{r}^{(3)}(t)}{3!}(-\Delta t)^3 + \dots$$
$$= \vec{r}(t) - \vec{v}(t)\Delta t + \frac{\vec{a}(t)}{2}\Delta t^2 - \frac{\vec{r}^{(3)}(t)}{6}\Delta t^3$$

Dodajemy stronami

$$\vec{r}(t+\Delta t) + \vec{r}(t-\Delta t) \cong 2\vec{r}(t) + \vec{a}(t)\Delta t^2$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\vec{r}(t+\Delta t) = -\vec{r}(t-\Delta t) + 2\vec{r}(t) + \vec{a}(t)\Delta t^2}$$

oprócz ~~zmiennej~~ obecnego bierze również poprzedni stan (ale tylko położ.)

Możemy, jeżeli potrzebujemy również obliczyć prędkość – odejmujemy stronami:

$$\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t-\Delta t) = 2\Delta t\, \vec{v}(t) + \cancel{\frac{1}{3}\vec{r}^{(3)}\Delta t^3}$$
$$\downarrow$$
$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t-\Delta t)}{2\Delta t}$$

odwracając – przepis na poch. drugą

$$\ddot{\vec{r}}_n = \frac{\vec{r}_{n-1} - 2\vec{r}_n + \vec{r}_{n+1}}{\Delta t^2}$$

implementacja na zajęciach SO

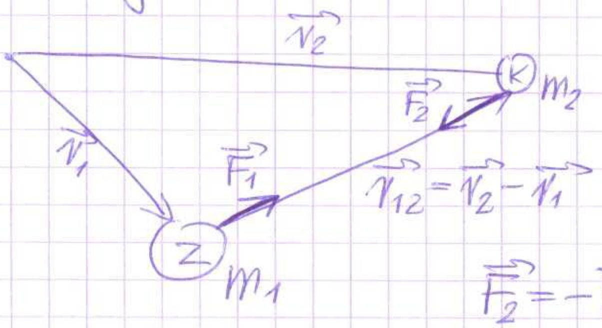
Nieco bardziej skomplikowany układ równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu

$\boxed{\text{ODE } 11}$

Zagadnienie dwóch ciał w 2D

Ziemia — 1

Księżyc — 2



$$\vec{F_2} = -\vec{F_1} \qquad \boxed{F = \frac{GMm}{r_{12}}}$$

Równania dynamiki:

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} = \vec{F_1} = F\dfrac{\vec{r_{12}}}{r_{12}} \\ m_2 \dfrac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} = \vec{F_2} = -F\dfrac{\vec{r_{12}}}{r_{12}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \dfrac{F}{m}\dfrac{(x_2-x_1)}{r_{12}} \\ \dfrac{d^2y_1}{dt^2} = \dfrac{F}{m}\dfrac{(y_2-y_1)}{r_{12}} \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -\dfrac{F}{m}\dfrac{(x_2-x_1)}{r_{12}} \\ \dfrac{d^2y_2}{dt^2} = -\dfrac{F}{m}\dfrac{(y_2-y_1)}{r_{12}} \end{cases} \end{cases}$$

$$r_{12} = |\vec{r_2}-\vec{r_1}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

4 równania drugiego rzędu $\rightarrow$ 8 równań 1go rzędu

$$\boxed{N=8}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = v_{x1}, \quad \dfrac{dv_{x1}}{dt} = \dfrac{F}{m}\dfrac{(x_2-x_1)}{r_{12}} \\ \dfrac{dy_1}{dt} = v_{y1}, \quad \dfrac{dv_{y1}}{dt} = \dfrac{F}{m}\dfrac{y_2-y_1}{r_{12}} \\ \dfrac{dx_2}{dt} = v_{x2}, \quad \dfrac{dv_{x2}}{dt} = \dfrac{-F}{m}\dfrac{(x_2-x_1)}{r_{12}} \\ \dfrac{dy_2}{dt} = v_{y2}, \quad \dfrac{dv_{y2}}{dt} = -\dfrac{F}{m}\dfrac{(y_2-y_1)}{r_{12}} \end{cases}$$

$y_0 = x_1, \quad y_1 = v_{x1}$

$y_2 = y_1, \quad y_3 = v_{y1}$

$y_4 = x_2, \quad y_5 = v_{x2}$

$y_6 = y_2, \quad y_7 = v_{y2}$

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(\{y\}_{i=1}^{8}, t)$$