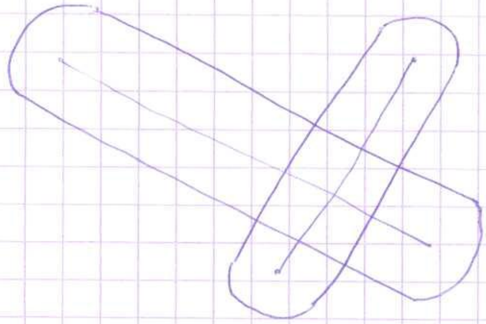
Zderzenie dwóch kul

Dwa etapy

<u>Detekcja kolizji</u>: wersja statyczna (w pełnych krokach)

$$d < r_1 + r_2$$

wersja z cofaniem w czasie = przecięcie dwóch cylindrów domkniętych półsferami



Problem sprowadza się do obliczenia odległości dwóch odcinków

| to odległość $< r_1 + r_2$

trudniejsze niż odległość dwóch prostych

- Jeżeli się zajmiemy, to później.

Reakcja na kolizję

$\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ – prędkości przed zderzeniem (tuż przed)

$\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ – prędkości tuż po zderzeniu

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$ – normalna zderzenia

Zderzenie $\Rightarrow$ krótkie, ale intensywne oddziaływanie (siły impulsowe)
nie ma sensu analizować zależnych od czasu sił

↓

Popęd – całka siły w czasie zderzenia (zmiana pędu)

$$\vec{J} = \int_{t_p}^{t_k} \vec{F}(t)\,dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}_k - \vec{p}_p = m(\vec{u} - \vec{v})$$

Kolizje 2

- Trzecia zasada Newtona: $\vec{F_1} = -\vec{F_2} \Rightarrow$

$$\vec{J_1} = -\vec{J_2}$$
$$J_1\vec{n} = -J_2\vec{n}$$

$$J_1 = -J_2$$
$$m_1(u_{1,n} - v_{1,n}) = m_2(u_{2,n} - v_{2,n})$$
$$\downarrow$$
$$m_1 v_{1,n} + m_2 v_{2,n} = m_1 u_{1,n} + m_2 u_{2,n}$$ — zasada zachowania pędu w kier. norm

W kier. prost. pęd w ogóle się nie zmienił (=> też zachow.)

$v_{1,t} = u_{1,t}$, $v_{2,t} = u_{2,t}$

3 zas. Newt => zas. zach. pędu

- Zasada zachowania energii (ale niekoniecznie kinetycznej)

Straty energii kinetycznej wyrażone mogą być współczynnikiem restytucji

$$\cancel{e = \frac{u_{1,n} - u_{2,n}}{v_{1,n} - v_{2,n}}} \qquad e = -\frac{u_{1,n} - u_{2,n}}{v_{1,n} - v_{2,n}}$$

$e = 0$ - zderzenie idealnie niesprężyste $\Leftrightarrow$ $u_{1,n} = u_{2,n}$

kule się sklejają

$e = 1$
$$-\frac{u_{1,n} - u_{2,n}}{v_{1,n} - v_{2,n}} = 1$$

$$-u_{1,n} + u_{2,n} = v_{1,n} - v_{2,n}$$
$$\boxed{v_{1,n} + u_{1,n} = v_{2,n} + u_{2,n}}$$ prędkość całkowita przed zderzeniem równa jest prędkości całkowitej po zderzeniu

Z drugiej strony załóżmy, że zasada zachowania energii kinetycznej jest spełniona – jeżeli to prawda – da się ją sprowadzić do prawdziwości

$$\frac{m_1 v_{1,n}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2n}^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \qquad /\cdot 2$$

$$m_1 (v_{1n}^2 - u_{1,n}^2) = m_2 (v_{2,n}^2 - u_{2,n}^2)$$

$$m_1 (v_{1n} - u_{1n})(v_{1n} + u_{1n}) = m_2 (v_{2n} - u_{2n})(v_{2n} + u_{2n})$$

$$e = 1$$

Zostanie $m_1 (v_{1n} - u_{1n}) = m_2 (v_{2n} - u_{2n})$ czyli zas. zach. pędu

CBDU.

czyli $e=1 \Leftrightarrow$ zderzenie idealnie sprężyste

Równanie opisujące zderzenie dwóch kul:

Znane: $e, v_{1n}, v_{2,n}$

3 niewiadome: J, u_{1n}, u_{2n}

$$\begin{cases} 1 \quad J = m_1 (u_{1,n} - v_{1,n}) \\ 2 \quad -J = m_2 (u_{2,n} - v_{2,n}) \\ 3 \quad e = -\dfrac{u_{1,n} - u_{2,n}}{v_{1,n} - v_{2,n}} \end{cases}$$

cały problem jest jednowymiarowy

$\Updownarrow$

zmiany prędkości jedynie w kier. $\vec{n}$

$1 \rightarrow \quad u_{1,n} = v_{1,n} + \frac{J}{m_1}$ – zmiana prędkości w wyniku zderzenia

$2 \rightarrow \quad u_{2,n} = v_{2,n} - \frac{J}{m_2}$

Wstawiamy do e:

$$e = -\frac{\left(v_{1,n} + \frac{J}{m_1}\right) - \left(v_{2,n} - \frac{J}{m}\right)}{v_{1n} - v_{2n}} = -\frac{\frac{J}{m_1} + \frac{J}{m_2} + v_{1,n} - v_{2n}}{v_{1n} - v_{2n}}$$

Wprowadźmy nowe oznaczenie:

masa zredukowana dwóch ciał $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$

$\Delta v_n = v_{1,n} - v_{2,n}$ prędkość względna przed zderzeniem

Kol. 4

$$e = -\frac{J\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)+\Delta v_n}{\Delta v_n} = -\frac{\frac{1}{\mu}J+\Delta v_n}{\Delta v_n}$$

nieznane jest tylko J

Wyznaczamy J:

$$\frac{1}{\mu}J = -e\Delta v_n - \Delta v_n = -(e+1)\Delta v_n$$

$$\boxed{J = -\mu(e+1)\Delta v_n}$$

Teraz możemy obliczyć u_{1n} i u_{2n}: $u_{1n} = v_{1n} + \frac{J}{m_1}$

Ogólniej (składowe styczne się nie zmieniają):

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \frac{J}{m_1}\vec{n}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{J}{m}\vec{n}$$

Wstawmy J do tych wzorów (bez wektorów)

$$\cancel{u_{1n} = v_{1n} + \frac{J}{m_1} = v_{1n} + \frac{-\mu(e+1)(v_{1n}-v_{2n})}{m_1} =} \quad \cancel{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}$$

$$\cancel{v_{1n}\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2} - \left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)(e+1)\frac{v_{1n}-v_{2n}}{m_1} = -m_2(e+1)}$$

$$\cancel{= -\frac{m_2(e+1)v_{1n}}{m_1+m_2} + \frac{m_2(e+1)v_{2n}}{m_1+m_2}}$$

$$u_{1n} = v_{1n} + \frac{J}{m_1} = v_{1n} + \frac{-\mu(e+1)(v_{1n}-v_{2n})}{m_1} \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}$$

$$\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}$$

$$= v_{1n}\cdot\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2} - \frac{\cancel{m_1}\cdot m_2}{(m_1+m_2)\cdot\cancel{m_1}}\cdot(e+1)(v_{1n}-v_{2n})$$

$$= v_{1n}\left(\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2} - \frac{m_2(e+1)}{m_1+m_2}\right) + v_{2n}\left(\frac{m_2(e+1)}{m_1+m_2}\right)$$

$$= v_{1n}\frac{m_1+\cancel{m_2}-\cancel{m_2}-m_2 e}{m_1+m_2} + v_{2n}\frac{m_2(e+1)}{m_1+m_2}$$

$$= \frac{m_1-m_2 e}{m_1+m_2}v_{1n} + \frac{m_2(e+1)}{m_1+m_2}v_{2n}$$

Analogicznie

$$u_{2n} = \frac{m_1(e+1)}{m_1+m_2} v_{1n} + \frac{m_2 - m_1 e}{m_1+m_2} v_{2n}$$

Gdy $e=1$ tzn. odbicie idealnie sprężyste

$$u_{1n} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} v_{1n} + \frac{2m_2}{m_1+m_2} v_{2n}$$

$$u_{2n} = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} v_{2n} + \frac{2m_1}{m_1+m_2} v_{1n}$$

wyniki znowu ze szkoły

to można łatwo uzyskać z 1) zas. zach. en. kin + 2) zas. zach pędu

Do testowania – problem bilardzisty

zad. $\boxed{m_1 = m_2,\ e=1} \longrightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m} \Rightarrow \mu = \frac{m}{2}$

$$\Rightarrow J = -\frac{m}{2}\cdot 2 \cdot \Delta v_n = -m\Delta v_n$$

Wówczas

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \frac{J}{m}\vec{n} = \vec{v}_1 - \Delta v_n \vec{n} = \vec{v}_1 - (v_{1n} - v_{2n})\vec{n}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{J}{m}\vec{n} = \vec{v}_2 + \Delta v_n \vec{n} = \vec{v}_2 + (v_{1n} - v_{2n})\vec{n}$$

Jaki jest kąt kul po zderzeniu – coś co możemy łatwo testować

$$\cos(\sphericalangle(\vec{u}_1, \vec{u}_2)) \Longleftrightarrow \vec{u}_1 \circ \vec{u}_2 = (\vec{v}_1 - \Delta v_n \vec{n}) \circ (\vec{v}_2 + \Delta v_n \vec{n}) =$$

$$= \vec{v}_1 \circ \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \circ \vec{n}\Delta v_n - \Delta v_n \vec{n} \circ \vec{v}_2 - \Delta v_n^2 \underset{=1}{\vec{n}^2}$$

$$= \vec{v}_1 \circ \vec{v}_2 + \underbrace{\vec{n}\circ(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}_{\Delta v_n} \cdot \Delta v_n - \Delta v_n^2 =$$

$$= \vec{v}_1 \circ \vec{v}_2 + \cancel{\Delta v_n^2} - \cancel{\Delta v_n^2} = \vec{v}_1 \circ \vec{v}_2$$

$\Longrightarrow$ Jeżeli $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$

Jeżeli jedna z kul spoczywa $\Rightarrow$ to samo $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$

$\boxed{\text{TEST}}$