

# Spis treści

<b>Wstęp</b>	<b>2</b>
Wkład własny do teorii splątania zawarty w pracy . . . . .	5
<b>1 Wprowadzenie do teorii kwantowych układów złożonych</b>	<b>7</b>
1.1 Kwantowy rachunek prawdopodobieństwa . . . . .	7
1.2 Kwantowe układy złożone . . . . .	9
1.3 Niekołmogorowska własność kwantowego rachunku prawdopodobieństwa . . . . .	12
1.4 Splątanie jako zasób informacyjny . . . . .	16
1.5 Dekoherecja . . . . .	19
<b>2 Geometryczny obraz zbioru stanów kwantowych</b>	<b>21</b>
2.1 Podstawowe pojęcia i fakty związane z wypukłością . . . . .	21
2.2 Stożki i pojęcie dualności . . . . .	23
2.3 Ilustracja wprowadzonych pojęć - stożki w $\mathbb{R}^2$ , $\mathbb{R}^3$ i w $\mathbb{R}^4$ . . . . .	28
2.4 Stożek macierzy półdodatnio określonych . . . . .	33
2.5 Zbiór stanów kwantowych jako rozmaitość z brzegiem . . . . .	34
<b>3 Kryteria separowalności</b>	<b>40</b>
3.1 Separowalność, $k$ -separowalność, podstawowe pojęcia i definicje . . . . .	40
3.2 Świadcowie $k$ -splątania . . . . .	42
3.3 Optymalność świadków $k$ -splątania . . . . .	43
3.4 Ogólna teoria wykrywania i optymalności . . . . .	45
3.5 Kryterium odwzorowań dodatnich . . . . .	48
3.6 Konstrukcja świadka splątania wykrywającego zadany stan splątany . . . . .	54
3.7 Kryterium obrazu . . . . .	57
3.8 Kryterium realignmentu . . . . .	57
3.9 Izomorfizm Jamiołkowskiego . . . . .	64
3.10 Rozkładalność odwzorowań i świadków . . . . .	66
3.11 Nierozszerzalne bazy produktowe . . . . .	68
3.12 Doświadczalny pomiar świadka splątania. Świadcowie nieliniowi . . . . .	69
<b>4 Własności spektralne świadków splątania</b>	<b>72</b>
4.1 Wprowadzenie - definicje i oznaczenia . . . . .	74
4.2 Warunki konieczne i wystarczające na bycie świadkiem $k$ -splątania . . . . .	75
4.3 Podprzestrzenie nie zawierające niezerowych wektorów $k$ -separowalnych . . . . .	80
4.4 Sygnatury świadków splątania . . . . .	84

---

4.5	Zależności między wartościami własnymi . . . . .	88
4.6	Rozkładalność świadków splątania . . . . .	95
4.7	Optymalność świadków splątania . . . . .	98
<b>5</b>	<b>Własności spektralne stanów separowalnych</b>	<b>100</b>
5.1	Kryteria nie używające informacji o bazie własnej . . . . .	100
5.2	Kryteria wykorzystujące informację o bazie własnej . . . . .	101
5.3	Zbiory stanów wykrywanych - skuteczność spektralnych kryteriów separowalności . . . . .	106
5.4	Przykłady działania kryteriów spektralnych . . . . .	108
5.5	Gradientowa metoda rozstrzygania o separowalności . . . . .	118
5.6	Parametryzacja świadków i kryteria spektralne dla wyższych rzędów Schmidta . . . . .	119
	<b>Podsumowanie</b>	<b>120</b>
	<b>A Realignment</b>	<b>124</b>
	<b>B Dowody ogólnej teorii wykrywania i optymalności</b>	<b>129</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>131</b>

# Wstęp

Historia tematyki, której dotyczy ta praca, zaczęła się w 1935 roku, gdy Einstein, Podolski i Rosen [1] zaobserwowali, że postulaty mechaniki kwantowej dopuszczają istnienie stanów dwóch cząstek, które pozwalają na “niepokojące działanie na odległość”, sprzeczne z klasycznymi wyobrażeniami o rzeczywistości. Taka własność stanu została przez Schrödingera nazwana *splątaniem* (*Verschränkung*). Pojawiło się pytanie, czy takie stany istnieją w przyrodzie, czy też to mechanika kwantowa jest niekompletna. W latach 60-tych J. Bell [2] zaproponował doświadczalną metodę wykrycia istnienia stanów splątanych<sup>1</sup>. Eksperymenty w tej dziedzinie na początku lat 80-tych [3] - potwierdziły istnienie takich stanów. Para cząstek w stanie splątanym jest skorelowana w sposób, na który nie pozwala fizyka klasyczna. Ponieważ splątanie wynika z matematycznej struktury mechaniki kwantowej, objawiać się może ono w bardzo różnych układach fizycznych.

**Zastosowanie stanów splątanych** Ponieważ splątanie dwóch układów kwantowych polega na ich nieklasycznym skorelowaniu, zaczęto rozważać możliwość wykorzystania splątania jako nowego zasobu informacyjnego. Pierwszą dziedziną, w której zaproponowano jego zastosowanie była teoria algorytmów [4]. Historia obliczeń kwantowych zaczyna się w 1982 roku, gdy R. Feynman w artykule [5] zapostulował budowę komputera, który wykonywałby obliczenia operując na stanach kwantowych. Koszt obliczeniowy symulacji układu kwantowego rośnie wykładniczo z jego rozmiarem. Uniknęlibyśmy tego, jeżeli układ kwantowy symulowany byłby przez pewien “uniwersalny symulator kwantowy”. Niedługo potem pojawiły się pierwsze algorytmy kwantowe, które rozwiązują w czasie wielomianowym problemy trudne dla klasycznych komputerów, takie jak faktoryzacja liczb pierwszych [6] czy transformata Fouriera [7]. Pierwszym algorytmem kwantowym był algorytm Deutsch-Jozsy [8]. Aktualny przegląd algorytmów kwantowych można znaleźć w [9].

Równoległe pojawiły się następne propozycje wykorzystania nieklasycznych korelacji w stanach splątanych. W pracy [10] pokazano, w jaki sposób teleportować stany kwantowe przy pomocy pary stanów splątanych. W [11] zaproponowano by oprzeć bezpieczeństwo przesyłanej informacji na zasadzie nieoznaczoności Heisenberga. Praca [12] pokazuje w jaki sposób przesyłać bezpiecznie informację kodując ją w stanach kwantowych. Prace te uznaje się za początek kryptografii kwantowej. Współczesny stan wiedzy z tej dziedziny prezentuje praca [13].

W dwupoziomowym układzie kwantowym (niech będzie to np. foton) można zakodować tylko jeden bit informacji (w stanie polaryzacji fotonu). Wykorzystując dodatkowe

---

<sup>1</sup>Ściśle rzecz ujmując, nie każdy stan splątany łamie nierówność Bella. Zostanie to omówione dokładniej w następnych rozdziałach pracy.

stopnie swobody dawane przez splątanie w stanie dwóch fotonów można zakodować nie dwa, ale nawet cztery bity informacji klasycznej. Procedura ta nazwana *gęstym kodowaniem* została zaproponowana w pracy [14]. Pozwala to na zwiększenie pojemności klasycznego kanału informacyjnego. W przypadku trzech splątanych fotonów, możemy przesłać nie trzy, ale osiem bitów informacji klasycznej (*supergęste kodowanie*, [15]).

Splątanie dwóch rozdzielonych przestrzennie podukładów zanika w skończonym czasie w wyniku termodynamicznego procesu zwanego dekoherencją. Chcąc uzyskać praktyczne implementacje opisanych powyżej procedur, musimy umieć wytworzyć w danej technologii stan splątany dwóch rozdzielonych podukładów, umieć wykonać na tym stanie dużą ilość dowolnych interesujących nas operacji zanim ulegnie on dekoherencji oraz umieć wykonać na nim dowolny pomiar [16]. W chwili obecnej metody informatyki kwantowej implementuje się w technologii optyki kwantowej, NMR-u w cieczech i ciałach stałych, pułapkowanych jonów i atomów, złącz Josephsona i kropek kwantowych (patrz [17], [18], [19]).

**Teoria splątania** Kwantowa teoria informacji stawia sobie za cel opisanie splątania w podobny sposób w jaki opisane są klasyczne prawa rządzące przesyłaniem informacji [20], oraz opracowanie sposobów operowania tym zasobem i wykrywania go.

Teoria splątania skupia się na układach skończenie wymiarowych ze względu na ich szerokie zastosowanie w praktycznych implementacjach, ale także ze względu na poważne trudności, które napotyka ona już w skończonym wymiarze. Dla układów nieskończenie wymiarowych teoria splątania jest rozwinięta dla stanów gaussowskich ważnych z punktu widzenia optyki kwantowej ([21] i referencje). W pracy tej zajmować się będziemy tylko splątaniem w układach skończenie wymiarowych.

Układy skończenie wymiarowe dzielimy ze względu na liczbę podukładów na dwucząstkowe i wielocząstkowe. W układach wielocząstkowych splątanie występuje w wielu rodzajach, z których każdy ma inne własności korelacji i które nie mogą być przeprowadzane jedno w drugie bez operacji globalnych na układzie jako całości. W teorii splątania wielocząstkowego problemy napotyka się już przy klasyfikacji splątania stanów czystych. Wyróżnioną liczbą podukładów jest liczba dwa. W układzie dwóch splątanych części splątanie ma prostszą klasyfikację, ta liczba podukładów wyróżniona jest również z punktu widzenia praktycznej implementacji. Niniejsza praca porusza tylko zagadnienie splątania dwucząstkowego.

Można wymienić następujące metody geometryczne opisu splątania:

- Rozbicie przestrzeni stanów na orbity działania grupy operacji lokalnych. Znalezienie minimalnego zbioru niezmienników działania tej grupy, które parametryzowałyby rodzaj splątania. Zadanie na przestrzeni orbit miary charakteryzującej splątanie z punktu widzenia jego przydatności jako zasobu informacyjnego.
- Opis zbioru stanów w języku geometrii różniczkowej. Wprowadzenie na zbiorze stanów struktur riemannowskich redukujących się na komutujących podzbiorach do odpowiednich struktur geometrycznych w klasycznym rachunku prawdopodobieństwa. Problem kwantowego uogólnienia entropii Shannona. Zadanie na rozmaitości stanów koneksji i badanie splątania w języku faz geometrycznych.

- Opis zbioru stanów i podzbioru stanów o różnym charakterze splątania w języku geometrii zbiorów wypukłych i stożków w przestrzeni operatorów hermitowskich. Badanie własności stożków dualnych tworzonych przez obserwable wykrywające splątanie stanów. Wpisywanie i opisywanie kul na badanych zbiorach wypukłych, wyznaczenie względnych objętości interesujących podzbiorów stanów.

Zakres tematyczny mojej pracy zawiera się w zbiorze metod opisanych w trzecim punkcie.

Celem mojej pracy było badanie zbioru stanów kwantowych układu złożonego metodami geometrycznymi. W tym celu badałem zbiory stanów separowalnych i świadków splątania pod względem własności spektralnych, ponieważ własności geometryczne tych zbiorów takie jak struktura ścian czy struktury geometryczne w przestrzeni zawierającej te zbiory wyrażają się w języku rozkładu spektralnego.

Rozdział pierwszy jest wstępem do zagadnień fizycznych o których traktuje praca. Rozdział drugi prezentuje metody geometryczne stosowane do uzyskania wyników i przedstawia po krótku geometrię zbioru stanów kwantowych. Rozdział trzeci opisuje w szczególności zagadnienie splątania w układzie dwucząstkowym. Rozdział czwarty i piąty opisuje własności spektralne elementów zbiorów, będących przedmiotem zainteresowania pracy i prezentuje ich geometryczne implikacje.

## Wkład własny do teorii splątania zawarty w pracy

W prezentowanej pracy, moimi własnymi wynikami są:

- **Ogólna teoria wykrywania i optymalności** (podrozdział 3.4).

Dla rodzin świadków wykrywających różne typy stanów funkcjonują różne teorie optymalności. Zaprezentowałem ogólny system pojęć, w którym można opisać dowolną optymalność. W tak ogólnym języku sformułowałem i udowodniłem na gruncie teorii stożków główne fakty dotyczące geometrii zbioru świadków optymalnych oraz udowodniłem charakteryzację optymalności świadka przez zbiór punktów ekstremalnych zbioru stanów wykrywanych, co uogólnia i wzmacnia znane wyniki. Dowody twierdzeń z tego podrozdziału zbiera Dodatek B.

- **Przykłady świadków wykrywających zadany stan splątany układu kwantowego wykrywany przez znane odwzorowanie dodatnie** (podrozdział 3.6).

Teoria, jak konstruować świadka splątania dla stanu, którego splątanie wykrywa dane odwzorowanie dodatnie, jest znana. Pokazałem jej działanie konstruując krok po kroku świadków dla najważniejszych odwzorowań dodatnich.

- **Dyskusja geometrii zbioru stanów wykrywanych przez kryterium realignmentu** (podrozdział 3.8)

Pokazuję tam kulę stanów wokół unormowanej identyczności, w której kryterium realignmentu nie wykrywa stanów splątanych. Pokazuję, że jeśli wymiary podukładów nie są równe, w kuli tej istnieją stany splątane. Udowadniam, że przy odpowiedniej

dysproporcji wymiarów podukładów, każda orbita lokalnych operacji liniowych zawiera stan niewykrywany przez kryterium realignmentu, co pozwala na wzmocnienie kryterium realignmentu. Dowód twierdzenia zawiera Dodatek A.

- **Własności spektralne świadków  $k$ -splątania** (rozdział 4).

W rozdziale tym udowadniam warunki konieczny i wystarczający na to, by obserwabla była świadkiem  $k$ -splątania. Korzystając z nich udowadniam ograniczenia na sygnaturę świadka splątania, które następnie tłumaczę na ograniczenia na liczbę liniowo niezależnych macierzy w części dodatniej i ujemnej rozkładu Kraus-Choi odwzorowania  $k$ -dodatniego. Wyniki te prezentuje praca [22]. Z ograniczeń na sygnaturę świadków  $k$ -splątania korzystam podając obserwacje geometryczne na temat punktu styczności brzegu zbioru unormowanych świadków  $k$ -splątania ze zbiorem stanów. Wprowadzając nową normę operatorową dokonuję parametryzacji brzegu świadków splątania. Pokazuję, jak można wyliczyć analitycznie jej wartość dla pewnych szczególnych przypadków.

- **Własności spektralne stanów separowalnych** (rozdział 5).

Wykorzystując parametryzację brzegu zbioru świadków splątania przeformułuję kryterium separowalności w języku wprowadzonej przeze mnie normy operatorowej. Osłabiając tą definicję otrzymuję zbiór warunków koniecznych separowalności. Wśród nich są takie, które nakładają ograniczenia na sumy wartości własnych stanu separowalnego. Pokazuję, że takie kryteria są w stanie wykrywać splątanie PPT. Podrozdział 5.4 ilustruje te kryteria na przykładach. W podrozdziale 5.5 proponuję gradientową metodą rozstrzygania o separowalności stanu, opartą o przeformułowaną definicję separowalności. Pod koniec tego rozdziału opisuję krótko, jak zaprezentowany w nim materiał uogólnia się na przypadek wyższych rzędów Schmidta ( $k$ -splątania). Wyniki tego rozdziału w dużym skrócie prezentuje publikacja [23]. W trakcie pisania pracy część z nich została niezależnie uzyskana przez autorów [24].

Praca współfinansowana z grantu Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego numer 3004/B/H03/2007/33.

Praca współfinansowana przez sieć “Laboratorium Fizycznych Podstaw Przetwarzania Informacji”.

Praca naukowa współfinansowana ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego, Budżetu Państwa i Budżetu Województwa Kujawsko-Pomorskiego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki Priorytetu VIII, działanie 8.2 poddziałanie 8.2.2 „Regionalne Strategie Innowacji”, projektu systemowego Samorządu Województwa Kujawsko-Pomorskiego „Krok w przyszłość 2 – stypendia dla doktorantów.



# Rozdział 1

## Wprowadzenie do teorii kwantowych układów złożonych

### 1.1 Kwantowy rachunek prawdopodobieństwa

Na mechanikę kwantową można patrzeć jako na niekomutatywne rozszerzenie klasycznego rachunku prawdopodobieństwa. Na wstępie pokażę, jakie modyfikacje do klasycznego rachunku prawdopodobieństwa wprowadza takie rozszerzenie. Wprowadzenie bazuje w znaczącym stopniu na książce K.R. Parthasarathy'ego [25].

W klasycznym rachunku prawdopodobieństwa, przestrzenią stanów  $d$ -poziomowego układu jest zbiór  $d$ -elementowy  $\Omega$ , a zbiorem zdarzeń jest jego maksymalna  $\sigma$ -algebra generowana przez singletony, tzn. zdarzenia elementarne. Do zadania miary potrzeba i wystarczy zadać jej wartości na generatorach. Rozkład prawdopodobieństwa  $d$ -poziomowego układu klasycznego jest więc pewnym wektorem  $p \in \mathbb{R}^d$  o wszystkich składowych dodatnich i sumujących się do jedności. Jego składowe określają wartości miary na zdarzeniach elementarnych. Ponieważ  $\sigma$ -algebra zdarzeń jest maksymalna, dowolna funkcja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  jest zmienną losową. Zbiór wszystkich takich funkcji jest izomorficzny z przestrzenią liniową  $\mathbb{R}^d$ . Rozkłady prawdopodobieństwa tworzą podzbiór przestrzeni do niej dualnej - możemy myśleć o rozkładzie prawdopodobieństwa jako o funkcjonale przyporządkowującym zmiennej losowej jej wartość oczekiwaną:

$$\mathbb{E}_p f = \sum_{i=1}^d p_i f_i, \quad (1.1)$$

co można również zapisać jako ślad iloczynu macierzy diagonalnych:

$$\mathbb{E}_p f = \text{Tr} \left( \begin{bmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_d \end{bmatrix} \right) = \text{Tr}(pf). \quad (1.2)$$

Jednocześnie widzimy, że zbiorowi zdarzeń elementarnych przypisaliśmy teraz pewną bazę w przestrzeni  $\mathbb{R}^d$ . Obserwable są dowolnymi macierzami diagonalnymi w zadanej bazie o wyrazach rzeczywistych na diagonalu. O bazie tej można myśleć jako o bazie przestrzeni  $\mathbb{C}^d$ , w której przestrzeń  $\mathbb{R}^d$  jest kanonicznie zanurzona. Na stany dodatkowo nakładamy warunek dodatniej diagonalu i jednostkowego śladu ( $\sum_{i=1}^d p_i = 1$ ).

Rozszerzając klasyczny rachunek prawdopodobieństwa do kwantowego, rezygnujemy z wymagania, by wszystkie obserwabli i stany były diagonalne w tej samej, standardowej bazie, a chcemy jedynie by dla każdej obserwabli czy stanu istniała baza ortogonalna, w której jest ona diagonalna. Jednym słowem zastępujemy macierze diagonalne hermitowskimi<sup>1</sup>. Obserwabłą jest teraz dowolna macierz hermitowska, a stanem dowolna półdodatnio określona macierz hermitowska o śladzie równym jeden. Zbiór obserwabli mierzonych w eksperymencie kwantowym jest więc reprezentowany jako algebra macierzy hermitowskich nad przestrzenią Hilberta  $\mathbb{C}^d$ . Przestrzeń tą nazywamy *przestrzenią Hilberta układu kwantowego*. Wzór (1.1) przyjmuje teraz postać:

$$\mathbb{E}_\rho = \text{Tr}(\rho W). \quad (1.3)$$

Jego prawa strona definiuje iloczyn Hilberta-Schmidta macierzy  $\rho$  i  $W$  w przestrzeni macierzy hermitowskich. Iloczyn skalarny w przestrzeni  $\mathbb{R}^d$  przechodzi na iloczyn  $HS$  w przestrzeni macierzy hermitowskich form dwuliniowych określonych na przestrzeni Hilberta układu.

Założmy teraz, że w danym doświadczeniu możemy mierzyć tylko komutujące obserwabli o pewnej ustalonej bazie własnej. Po odpowiednim obróceniu bazy, wszystkie one staną się diagonalne. Taka algebra obserwabli nie jest w stanie rozróżnić dwóch macierzy o tej samej diagonalni. Utożsamiając stany nierozróżnialne dochodzimy do wniosku, że zbiór stanów jest zbiorem macierzy diagonalnych o jednostkowym śladzie. Wzór (1.3) redukuje się wtedy do wzoru (1.1) i jesteśmy w przypadku klasycznym. Aby obserwować efekty kwantowe, musimy dysponować możliwością pomiaru wielkości fizycznych odpowiadających niekomutującym obserwabliom.

Zbiór klasycznych rozkładów prawdopodobieństwa jest sympleksem napinany przez stany czyste - rozkłady w których prawdopodobieństwo przyjmuje wartość 1 na pewnym singletonie i 0 poza nim. W reprezentacji (1.2) są to macierze o samych zerach z wyjątkiem jednego wyrazu diagonalnego równego 1. W przypadku kwantowym stanami czystymi są wszystkie projektory na jednowymiarowe podprzestrzenie przestrzeni Hilberta układu kwantowego. Ich zbiór jest zespoloną przestrzenią rzutową  $\mathbb{C}P^{d-1}$  i jako taki jest zbiorem spójnym, co odróżnia przypadek kwantowy od klasycznego, gdzie każdy stan czysty leży w innym wierzchołku sympleksu. Kwantowy stan czysty można zapisać jako  $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ , a wektor  $\Psi$ , wyznaczony z dokładnością do czynnika fazowego, jest wektorem jednostkowym z przestrzeni Hilberta układu. Jednowymiarowe podprzestrzenie wektorów różniących się o zespolony skalar są w jednoznacznej odpowiedniości ze stanami czystymi układu kwantowego. Dlatego unormowane wektory w przestrzeni Hilberta układu nazywa się *wektorami stanu*.

W przypadku klasycznym, gdy układ jest w stanie czystym, dysponujemy o nim pełną informacją - możemy przewidzieć z pewnością wynik pomiaru każdej obserwabli. W przypadku kwantowym, jeżeli obserwabli nie komutuje ze stanem<sup>2</sup> już tak nie jest. Więcej - dla każdego stanu można wskazać obserwabli, o której wyniku pomiaru nie możemy powiedzieć zupełnie nic (wszystkie wyniki tak samo prawdopodobne).

<sup>1</sup>Dopuszczamy tylko obserwabli o rzeczywistym widmie.

<sup>2</sup>Dzięki iloczynowi Hilberta-Schmidta możemy traktować stan i obserwabli jako elementy tej samej przestrzeni i ich mnożenie ma sens.



Istnieją pary baz tej samej przestrzeni Hilberta takich, że rozkład dowolnego wektora z pierwszej bazy w drugiej bazie ma równe moduły współczynników rozwinięcia i na odwrót. Takie pary baz nazywa się *bazami wzajemnie niezależnymi*<sup>3</sup>. Dla pary obserwabli o takich bazach własnych zachodzi zasada nieoznaczoności w swojej najsilniejszej postaci - znając wynik pomiaru jednej obserwabli nie wiemy zupełnie nic o wyniku pomiaru drugiej obserwabli. Dla innych par baz własnych współczynniki rozkładu wektora własnego z pierwszej bazy w drugiej bazie nie muszą mieć równych modułów i wtedy pomiar pierwszej obserwabli może dawać pewne przewidywanie co do wyniku pomiaru drugiej. W ogólności iloczyn wariancji rozkładów prawdopodobieństwa wyników pomiarów dwóch obserwabli o różnych bazach własnych jest ograniczony z dołu przez moduł ich komutatora na mierzonym stanie.

**Wyniki pomiarów i prawdopodobieństwa ich uzyskania** Rozważmy pomiar obserwabli  $A$  o rozkładzie spektralnym  $\sum_i a_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ . Podobnie jak w przypadku klasycznym, możliwymi wynikami pomiaru są wartości własne obserwabli. Dla stanu czystego zadanego przez wektor stanu  $\Psi$  wynik pomiaru  $a_i$  pojawia się z prawdopodobieństwem  $p_i = |\langle\Psi|\phi_i\rangle|^2$ . Im większy kąt tworzy wektor stanu z wektorem własnym obserwabli, tym mniejsze prawdopodobieństwo, że wynikiem pomiaru będzie wartość własna odpowiadająca temu wektorowi własnemu. Rozkład wyników pomiarów otrzymujemy z kwadratów modułów współczynników rozwinięcia wektora stanu w bazie własnej obserwabli.

Jeżeli układ jest w stanie mieszanym  $\rho$ , prawdopodobieństwo otrzymania wyniku  $a_i$  w pomiarze obserwabli  $A$  wynosi  $p_i = \langle\phi_i|\rho|\phi_i\rangle$ . Wynik ten można uzyskać przedstawiając stan mieszany jako kombinację stanów czystych.

## 1.2 Kwantowe układy złożone

Założmy, że chcemy potraktować dwa niezależne od siebie układy (np. bardzo odległe) formalnie jako jeden układ. Na układzie pierwszym mierzymy obserwabłą  $A$ . Jej wartości własnej  $a_i$  odpowiada wektor własny  $\phi_i$ . Na układzie drugim mierzymy obserwabłą  $B$ . Jej wartości własnej  $b_i$  odpowiada wektor własny  $\psi_i$ . Układ pierwszy jest w stanie  $\rho$ , a układ drugi w stanie  $\eta$ . Prawdopodobieństwo otrzymania wyniku  $a_i$  dla pierwszego układu i wyniku  $b_i$  dla drugiego układu jest równe

$$p_{ij} = \text{Tr}(|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\rho) \cdot \text{Tr}(|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\eta),$$

ponieważ zdarzenia te są od siebie niezależne. Chcemy teraz znaleźć taki projektor  $f(|\phi\rangle\langle\phi|, |\psi\rangle\langle\psi|)$  w przestrzeni obu układów i taki stan całości  $f(\rho, \eta)$ , by zachodził wzór:

$$\text{Tr}(|\phi\rangle\langle\phi|\rho) \cdot \text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|\eta) = \text{Tr}(f(|\phi\rangle\langle\phi|, |\psi\rangle\langle\psi|), f(\rho, \eta)) \quad (1.4)$$

(z uwagi na symetrię iloczynu  $HS$  ta sama funkcja  $f$  działa na obu jego argumentach). Z uwagi na liniowość iloczynu HS na pierwszym i drugim miejscu, funkcja  $f$  musi być

<sup>3</sup>W literaturze angielskiej *mutually unbiased bases*. Patrz np. [26] lub w pracy [27] i w referencjach tam zawartych.



gęstości dla podukładów:

$$\rho^{(1)} = \begin{bmatrix} \sum_j p_{1j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_j p_{2j} & \ddots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sum_j p_{d_1j} \end{bmatrix} \quad \rho^{(2)} = \begin{bmatrix} \sum_j p_{j1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_j p_{j2} & \ddots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sum_j p_{jd_1} \end{bmatrix}$$

Tak przeddefiniowane przechodzenie do stanu podukładu uogólnia się bezpośrednio do przypadku kwantowego.

Stany czyste splątane definiuje się jak projektory na wektory, które nie są produktowe. Jeżeli układ kwantowy jest w stanie czystym, to można przewidzieć wynik pomiaru dowolnej obserwabli komutującej ze stanem. Stany te są odpowiednikami klasycznych stanów czystych, zawierających pełną informację o układzie.

Dla ogólnego stanu czystego, porzucając informację o jednym z podukładów poprzez wykonanie śladu częściowego, dostajemy macierz gęstości o rzędzie równym rzędowi Schmidta wektora, na który rzutował wysładowany projektor. Dostajemy stan mieszany - o podukładzie wiemy mniej niż o całym układzie. Taka nieintuicyjna sytuacja nie jest możliwa w klasycznym rachunku prawdopodobieństwa.

Dla stanów mieszanych stany separowalne definiuje się jako stany, które można przedstawić jako kombinację wypukłą pewnej liczby stanów czystych separowalnych. Analogicznie, stan mieszany układu jest splątany, jeżeli taki rozkład nie istnieje.

**Operacje lokalne** Dynamika zamkniętego układu kwantowego zadawana jest przez jednoparametrową rodzinę operacji unitarnych, generowaną przez Hamiltonian. Dowolna zmiana układu kwantowego wywołana jest pewną operacją unitarną w jego przestrzeni Hilberta, poprzez jej działanie na stany:

$$\rho \mapsto U^\dagger \rho U$$

Jeżeli układ oddziałuje z otoczeniem, które również opisujemy kwantowo, wtedy dynamika stanów mieszanych jest wysładowaną po otoczeniu dynamiką większego układu powstałego po dołączeniu otoczenia do rozważanego układu. Charakteryzacja ta nie dotyczy jedynie zmian nieciągłych wywołanych przez pomiar, czyli przez wydobycie z układu części informacji.

Jeżeli układ składa się z dwóch dostatecznie rozseparowanych przestrzennie podukładów, wtedy na dynamikę układu składają się niezależne od siebie dynamiki obu podukładów, ponieważ nie oddziałują one ze sobą. Ogólna operacja unitarna, którą można wykonać na układzie rozseparowanym przestrzennie, to  $U \otimes V \in U(\mathbb{C}^{d_1}) \times U(\mathbb{C}^{d_2})$ . Operacje takie nazywamy lokalnymi operacjami unitarnymi i oznaczamy jako LO (*local operations*). Tworzą one grupę równą iloczynowi prostemu grup unitarnych przestrzeni Hilberta podukładów.

Grupę operacji lokalnych można rozszerzyć, pozwalając dodatkowo wykonywać dysponentom podukładów następujące czynności:

1. Dysponent pierwszego podukładu wykonuje pomiar na swoim podukładzie.

2. Wynik pomiaru jest przesyłany klasycznym kanałem dysponentowi drugiego podukładu, który na jego podstawie przygotowuje swój podukład w odpowiednim stanie (na przykład poprzez pomiar pewnej obserwabli na podukładzie, lub poprzez lokalną operację unitarną).

Obaj dysponenti mogą wielokrotnie powtarzać powyższe kroki w obie strony. Operacja złożona z wielokrotnie powtarzanych takich procedur i operacji lokalnych nazywa się operacją SLOCC. Każda operacja SLOCC na stanie da się reprezentować jako:

$$\rho \mapsto G^\dagger \otimes H^\dagger \rho G \otimes H, \quad G \in \mathbb{C}^{d_1}, \quad H \in \mathbb{C}^{d_2},$$

czyli jest elementem iloczynu grup  $GL(\mathbb{C}^{d_1}) \otimes GL(\mathbb{C}^{d_2})$ .

Operacje SLOCC, więc w szczególności operacje LO, przeprowadzają zbiór stanów separowalnych w siebie.

### 1.3 Niekołmogorowska własność kwantowego rachunku prawdopodobieństwa

W aksjomatyce rachunku prawdopodobieństwa wprowadzonej przez Kołmogorowa [28], istotną rolę odgrywa założenie o istnieniu jednej przestrzeni zdarzeń dla eksperymentu losowego. Kwantowy rachunek prawdopodobieństwa jest przykładem teorii probabilistycznej, dla której aksjomat ten nie jest spełniony [30]. Zjawiska takie jak splątanie wynikają właśnie z niekołmogorowskością <sup>4</sup> kwantowego rachunku prawdopodobieństwa [29]. W niniejszym podrozdziale zaprezentujemy kryterium, który musi spełniać teoria kołmogorowska i przykład łamania tego kryterium w mechanice kwantowej.

Mając dane trzy rozkłady prawdopodobieństwa  $A$ ,  $B$  i  $C$  dwuwartościowych zmiennych losowych określone na wspólnej przestrzeni probabilistycznej (trzy rozbicia tej samej przestrzeni na sumy rozłączne dwóch zbiorów), łączne rozkłady prawdopodobieństwa par  $AB$ ,  $BC$  i  $CA$  nie mogą być dowolne. Dla uproszczenia rozważajmy dalej te rozkłady prawdopodobieństwa jako zmienne losowe przyjmujące wartości  $\pm 1$  na zbiorach rozbicia. Pokażemy, jakie związki muszą zachodzić pomiędzy rozkładami par, by istniał rozkład prawdopodobieństwa  $p_{ABC}$ , którego byłyby one rozkładami brzegowymi. Dla prostoty końcowego wyniku zrezygnujemy z pełnej ogólności i weźmiemy pod uwagę jedynie takie rozkłady prawdopodobieństwa  $A$ ,  $B$  i  $C$ , że ich wartości średnie są równe zero (oba zbiory rozbicia mają tę samą miarę).

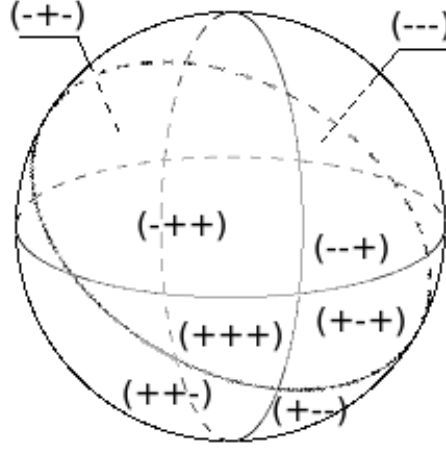
Iloczyn takich zmiennych losowych mogą przyjmować dwie wartości, a ich rozkład łączny jest wyznaczony jednoznacznie przez ich kowariancję <sup>5</sup> :

$$p(A \cdot B = \pm 1) = \frac{1 \pm \mathbb{E}(AB)}{2}$$

i analogicznie dla pozostałych par. Ponieważ wartość średnia każdej zmiennej w parze jest równa zero, rozkłady par spełniają następującą własność  $p_{AB}(++) = p_{AB}(--)$  oraz że

<sup>4</sup>W literaturze anglojęzycznej spotyka się określenie *non-kołmogorowness* [29]

<sup>5</sup>Symbol  $\mathbb{E}(\cdot)$  oznacza wartość oczekiwaną zmiennej losowej. Dla zmiennych losowych o wartości średniej równej zero kowariancja jest równa wartości oczekiwanej iloczynu.



Rysunek 1.1: Rozbicie sfery przez określenie trzech zmiennych losowych o wartości oczekiwanej 0

$p_{A \cdot B}(++) = p_{AB}(--)$  i podobnie dla pozostałych par zmiennych, dlatego rozkład każdej pary zmiennych (np.  $AB$ ) przedstawia się następująco:

$$p_{AB}(+, +) = p_{AB}(--) = \frac{1 + \mathbb{E}(AB)}{4} \quad p_{AB}(+, -) = p_{AB}(-+) = \frac{1 - \mathbb{E}(AB)}{4}$$

Rozkłady o powyższej własności można wyobrażać sobie jako rozbicia na dwie półsfery sfery  $S^2$  wyposażonej w standardową miarę indukowaną z miary Lebesgue'a na  $\mathbb{R}^3$  ( $SO(3)$  niezmienniczą). Rozkład  $p_{ABC}$  jest zadawany przez rozbicie sfery przez trzy przecinające się koła wielkie.

Mamy teraz do znalezienia osiem prawdopodobieństw w rozkładzie  $p_{ABC}$ , ale założenie o zerowaniu wartości średnich zmiennych  $A$ ,  $B$  i  $C$  pozwala wywnioskować, że prawdopodobieństwa, gdzie plusy zamieniono z minusami i odwrotnie (np.  $p_{ABC}(++-)$  i  $p_{ABC}(- - +)$ ) są sobie równe, więc mamy tylko cztery niewiadome związane czterema równaniami:

$$\begin{aligned} 2p_{ABC}(+++)+2p_{ABC}(++-)+2p_{ABC}(+-+)+2p_{ABC}(+--)&= 1 \\ 2p_{ABC}(+++)+2p_{ABC}(++-)-2p_{ABC}(+-+)-2p_{ABC}(+--)&= \mathbb{E}(AB) \\ 2p_{ABC}(+++)-2p_{ABC}(++-)-2p_{ABC}(+-+)+2p_{ABC}(+--)&= \mathbb{E}(BC) \\ 2p_{ABC}(+++)-2p_{ABC}(++-)+2p_{ABC}(+-+)-2p_{ABC}(+--)&= \mathbb{E}(CA) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Układ ten ma zawsze cztery rozwiązania. Od tych rozwiązań wymagamy, by były one większe od zera. Otrzymujemy w wyniku cztery warunki na kowariancje:

$$\begin{aligned} p_{ABC}(+++)+p_{ABC}(++-)&= \frac{1}{4}(1 + \mathbb{E}(AB) + \mathbb{E}(BC) + \mathbb{E}(CA)) \geq 0 \\ p_{ABC}(++-)+p_{ABC}(- - +)&= \frac{1}{4}(1 + \mathbb{E}(AB) - \mathbb{E}(BC) - \mathbb{E}(CA)) \geq 0 \\ p_{ABC}(+-+)+p_{ABC}(- + -)&= \frac{1}{4}(1 - \mathbb{E}(AB) - \mathbb{E}(BC) + \mathbb{E}(CA)) \geq 0 \\ p_{ABC}(+--)+p_{ABC}(- + +)&= \frac{1}{4}(1 - \mathbb{E}(AB) + \mathbb{E}(BC) - \mathbb{E}(CA)) \geq 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Kowariancje par przyjmują wartości w przedziale  $[-1, 1]$ . Zbiór możliwych kowariancji tworzy zatem sześcián  $[-1, 1]^3$ . Jego podzbiorem jest czworościan napięty przez punkty

$(1, 1, 1)$ ,  $(1, -1, -1)$ ,  $(-1, 1, -1)$  i  $(-1, -1, 1)$ . Punkty tego czworościanu odpowiadają korelacjom par zmiennych, dla których istnieje rozkład łączny  $p_{ABC}$  taki, że rozkłady par są jego rozkładami brzegowymi. Warunki te znane są jako twierdzenie Bassa [31], uogólnione potem przez Vorobeeva [32], [33]. Niezależnie zostało ono również odkryte w rozważaniach pewnych problemów ekonomicznych przez Schella [34]. Powyższy dowód pochodzi z pracy [30].

W mechanice kwantowej nierówności (1.9) zostały znalezione niezależnie przez J. Bella i zaprezentowane w pracy [2]. Rozważmy dwa układy spinowe, początkowo oddziałujące ze sobą, które następnie oddalają się od siebie. Gdy są daleko, trafiają do stacji pomiarowych, gdzie wykonywane są pomiary na obu z nich jednocześnie (lub w odstępach czasu na tyle małych, by informacja o wyniku jednego pomiaru nie mogła dotrzeć do miejsca drugiego pomiaru). Przyrządy pomiarowe w obu stacjach mierzą rzuty spinu na jeden z trzech kierunków  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$ , przy czym ustawienia przyrządów przeskakują losowo pomiędzy mierzonymi kierunkami. Wyniki pomiarów grupujemy ze względu na to, które kierunki były mierzone w obu podukładach i obliczamy korelacje:  $\mathbb{E}(\sigma_{\vec{a}}\sigma_{\vec{b}})$ ,  $\mathbb{E}(\sigma_{\vec{b}}\sigma_{\vec{c}})$  oraz  $\mathbb{E}(\sigma_{\vec{c}}\sigma_{\vec{a}})$ . Pomiar rzutu spinu na określony kierunek ma wartość średnią zero i może przyjmować wartości  $\pm 1$ . Zmienne losowe, którymi są wyniki pomiaru rzutu spinu na określony kierunek, spełniają więc założenia twierdzenia Bassa, jeżeli dodatkowo spełnione są trzy założenia:

1. Obie stacje posiadają “wolną wolę”, czyli wynik losowania kierunków w jednej ze stacji nie jest skorelowany z wynikiem losowania kierunku w drugiej ze stacji. Oba losowania są niezależne i nie są w żaden sposób determinowane przez jakiegokolwiek wspólne dla nich źródło informacji. Założenie to można zweryfikować doświadczalnie mierząc korelacje wyników losowania kierunków.
2. Żadna informacja w przyrodzie nie rozchodzi się szybciej od prędkości światła - jeżeli pomiary obu cząstek z pary w obu stacjach pomiarowych następują wystarczająco szybko po sobie, można być pewnym, że wynik pomiaru w jednej ze stacji nie wpływa na wynik drugiego.
3. Własności cząstek w momencie pomiaru ustalają się zanim przestaną one oddziaływać i są zdeterminowane przez pewien zestaw parametrów początkowych. Określona wartość parametru determinuje określone wyniki w obu stacjach pomiarowych. Konkretnym wynikiom pomiarów odpowiadają określone zakresy parametrów początkowych. Używa się wobec nich często określenia *parametry ukryte*.

Ostatnie założenie oznacza, że zmienne losowe określające wyniki pomiarów rzutu spinu na określony kierunek są określone na tej samej przestrzeni probabilistycznej (prze-strzeni parametrów ukrytych). Oznacza to, że muszą być spełnione nierówności (1.9). Biorąc różnicę dwóch z czterech nierówności (1.9) otrzymujemy 6 różnych nierówności, nazywanych nierównościami Bella:

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(\sigma_{\vec{b}}\sigma_{\vec{c}}) \pm \mathbb{E}(\sigma_{\vec{c}}\sigma_{\vec{a}})| &\leq 1 \pm \mathbb{E}(\sigma_{\vec{a}}\sigma_{\vec{b}}) \\ |\mathbb{E}(\sigma_{\vec{c}}\sigma_{\vec{a}}) \pm \mathbb{E}(\sigma_{\vec{a}}\sigma_{\vec{b}})| &\leq 1 \pm \mathbb{E}(\sigma_{\vec{b}}\sigma_{\vec{c}}) \\ |\mathbb{E}(\sigma_{\vec{a}}\sigma_{\vec{b}}) \pm \mathbb{E}(\sigma_{\vec{b}}\sigma_{\vec{c}})| &\leq 1 \pm \mathbb{E}(\sigma_{\vec{c}}\sigma_{\vec{a}}) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Każda z nich wycina obszar pomiędzy płaszczyznami przecinającymi się w jednej z sześciu krawędzi czworoscianu.

Rozważmy splątany stan układu:  $\Psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle)$ . Niech kierunki pomiaru spinu leżą w płaszczyźnie XZ i są wyznaczone przez kąt który tworzą z osią  $z$ . Obserwabela opisująca pomiar spinu w kierunku kąta  $\alpha$  w pierwszym podukładzie i w kierunku kąta  $\beta$  w drugim podukładzie ma postać iloczynu tensorowego:

$$\sigma_{\alpha,\beta} = \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}.$$

Funkcja kowariancji jest dla tego stanu dana prostym wyrażeniem trygonometrycznym:

$$E_{\alpha,\beta} = \langle \Psi_+ | \sigma_{\alpha,\beta} | \Psi_+ \rangle = \cos(\alpha - \beta).$$

Wstawiając wyrażenia na kowariancję do pierwszej nierówności z (1.10) wziętej z + otrzymamy nierówność trygonometryczną dla kątów:

$$|\cos(\beta - \gamma) + \cos(\gamma - \alpha)| \leq 1 - \cos(\alpha - \beta).$$

Łatwo można zauważyć, że dla kątów  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \pi/2$ ,  $\gamma = \pi/4$  lewa strona nierówności jest równa  $\sqrt{2}$ , a prawa jest równa 1. Łamanie nierówności Bella zostało potwierdzone eksperymentalnie na początku lat osiemdziesiątych przez zespół eksperymentatorów pod kierownictwem Aspecta [3]<sup>6</sup>. Oznacza to, że dla układu w stanie  $\Psi_+$  jedno z trzech założeń nierówności Bella jest niespełnione. Interpretacje tego zjawiska są różne. Najbardziej dziwną jest założenie o istnieniu ujemnych prawdopodobieństw (zauważmy, że twierdzenie Bassa opiera się na żądaniu dodatniości rozwiązań układu równań (1.8)). Fizycy chcący zachować założenie o ukrytej deterministycznej podstawie mechaniki kwantowej i traktujący funkcję falową jako obiekt fizyczny, nazywają łamanie nierówności Bella *kwantową nielokalnością*. Twierdzą oni, że stan drugiej cząstki zmienia się natychmiastowo w momencie pomiaru stanu cząstki pierwszej. Słabość tej interpretacji polega na tym, że łamie teorię względności wprowadzając bezwzględną jednoczesność zdarzeń. Najbardziej rozpowszechnioną interpretacją łamania nierówności Bella jest traktowanie funkcji falowej jako stanu maksymalnej dostępnej nam wiedzy o układzie. Nie zachodzi żadna fizyczna zmiana stanu drugiej cząstki w momencie mierzenia cząstki pierwszej. Zmienia się jedynie natychmiastowo stan dostępnej nam wiedzy o drugiej cząstce. Interpretacja ta traktuje mechanikę kwantową jako teorię opisującą dynamikę maksymalnej dostępnej obserwatorowi informacji o mikroświecie. Jest to myślenie o mechanice kwantowej w duchu interpretacji kopenhaskiej, która nie traktuje mechaniki kwantowej jako teorii opisującej istniejące byty, a jedynie opisującej w sposób statystyczny przewidywane wyniki eksperymentów.

Nie wszystkie stany łamią nierówności Bella. Wśród stanów czystych zbiorem stanów nie łamiących ich są stany separowalne. Oznacza to, że gdy układ jest w takim stanie, można wyjaśnić wyniki eksperymentu z pomiarami spinów na tym układzie za pomocą parametrów ukrytych. Dla stanów mieszanych podobna równoważność nie zachodzi. Istnieją stany splątane, dla których korelacje wyników pomiarów można opisać jako korelacje zmiennych losowych opisanych na tej samej przestrzeni probabilistycznej [37], [38].

<sup>6</sup>ten eksperyment uważa się za pierwszy przekonujący dowód eksperymentalny łamania nierówności Bella, choć pierwsze tego typu eksperymenty były podejmowane już na przełomie lat 60-tych [35] i 70-tych [36]

## 1.4 Splątanie jako zasób informacyjny

Stan splątany złożonego układu kwantowego zawiera w sobie pewien rodzaj korelacji między podukładami, których odpowiednika nie znajdziemy dla układów klasycznych. Stanu splątanego nie jesteśmy w stanie stworzyć manipulując lokalnie na podukładach będących w stanie separowalnym, nawet jeżeli operacje na jednym uzależnimy od wyniku pomiaru na drugim podukładzie, ponieważ kombinacja wypukła stanów separowalnych jest stanem separowalnym. By uzyskać splątanie trzeba zbliżyć do siebie podukłady i pozwolić im zbudować wzajemne splątanie poprzez oddziaływanie.

W momencie spojrzenia na przed chwilą rzuconą monetę, która z równym prawdopodobieństwem leży orłem lub reszką do góry, jej stan przechodzi w stan czysty. Podobnie w momencie pomiaru jakiejś obserwacji na układzie, gdy poznajemy wynik - wartość własną obserwacji  $\lambda_i$ , stan przechodzi w projektor na jednowymiarową podprzestrzeń napinaną przez odpowiadający tej wartości własnej wektor własny<sup>7</sup>. Cała informacja o tym co było przed pomiarem jest dana przez jedną liczbę, co nie pozwoli odtworzyć stanu kwantowego. Korzystając z reguły Bayessa na prawdopodobieństwo warunkowe i wiedząc, na który projektor przeszedł stan po pomiarze, można przypisać różnym stanom w przestrzeni stanów układu kwantowego różne prawdopodobieństwa tego, że układ był w danym stanie przed pomiarem. Im bliżej wynikowego projektora w przestrzeni stanów jest stan, tym większe prawdopodobieństwo, że układ był w nim przed pomiarem. Jest to rozkład różny od rozkładu równomiernego<sup>8</sup>. Licząc różnicę entropii Shannona dla rozkładu równomiernego i rozkładu po pomiarze możemy obliczyć zysk informacji, którą otrzymamy na skutek pomiaru. Wyniki obliczeń dla qubitu<sup>9</sup> można znaleźć w pracy [39], wyniki ogólne prezentuje praca [40].

Nie jest to jednak informacja pozwalająca zidentyfikować stan kwantowy. Np. dla qubitu by zidentyfikować stan układu potrzeba znać wartości średnie pomiarów spinu w trzech kierunkach. Po każdej skończonej liczbie pomiarów danej obserwacji znamy wartość oczekiwaną ze skończonym błędem. Nie jest to cecha świata kwantowego - z podobnym problemem spotykamy się próbując wyznaczyć po jednym rzucie rozkład prawdopodobieństwa wyniku rzutu fałszywej monety. Podobnie jak w przypadku kwantowym, rozkładu tego nigdy nie wyznaczymy dokładnie, a dokładność jego wyznaczenia rośnie z liczbą wykonanych rzutów.

Nie jest również możliwe sklonowanie stanu kwantowego, czyli powielenie stanu bez wcześniejszego poznania go, co zostało dowiedzione w pracy [41]. Jest ono możliwe jedynie z pewną dokładnością [42], którą można zwiększać jeżeli mamy pewność, że klonowany stan leży w jakimś podzbiórze zbioru stanów [43].

<sup>7</sup>Ścisłe rzecz biorąc jest tak jeżeli rozpatrujemy pomiary PVM (*projector valued measurement*). W przypadku ogólniejszego pomiaru POVM (*positive operator valued measurement*), jest możliwe by stan układu po pomiarze nie był stanem czystym. W przypadku klasycznym analogiem uogólnionej klasy pomiarów mogą być pomiary, w których wynik pomiaru obarczony jest błędem. Ważne jest tylko to, że stan kwantowy po układzie jest znany i różny od stanu przed pomiarem, a cała informacja o stanie przed pomiarem jest dane przez jedną liczbę rzeczywistą

<sup>8</sup>Wynik obliczeń zysku informacji zależy od tego, jaką miarę na zbiorze stanów uznamy za rozkład równomierny, odpowiadający całkowitemu brakowi informacji. Licząc zysk informacyjny całkowujemy entropię Shannona rozkładu wynikowego po tej mierze. Dla stanów czystych symetria wymusza, by za rozkład równomierny wziąć unormowaną miarę  $U(d)$  niezmienniczą ( $d$  - wymiar przestrzeni Hilberta układu)

<sup>9</sup>Stan kwantowy układu dwupoziomowego, niekomutatywne uogólnienie bitu



Dzięki zastosowaniu stanów splątanych jest jednak możliwa procedura pozwalająca przenieść stan układu na inny układ, nawet oddalony przestrzennie. Nie jest to klonowanie, bo by wykonać tę procedurę trzeba dokonać pomiaru na układzie wejściowym, czyli zniszczyć stan początkowy. Procedura ta nosi nazwę teleportacji stanu. Procedura kwantowej teleportacji wygląda następująco [10]:

Mamy dwupoziomowy układ w stanie  $\Psi = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$  oraz parę układów dwupoziomowych rozseparowanych przestrzennie w stanie splątanym  $\Psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ . Układ wejściowy zbliżamy do jednego ze splątanych układów i na obu wykonujemy pomiar w bazie

$$\begin{aligned}\Psi_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ \Psi_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \\ \Phi_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \\ \Phi_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)\end{aligned}\tag{1.11}$$

nazywanej bazą magiczną lub bazą Bella. Załóżmy że mierzymy obserwabłę która przy kolejnych wektorach własnych (1.11) ma wartości własne odpowiednio 1, 2, 3 i 4. Stan wszystkich trzech układów przed pomiarem jest następujący:

$$\Psi^{(3)} = \Psi \otimes \Psi_+$$

Po pomiarze trzy układy będą w stanie:

$$\begin{aligned}\Psi^{(3)} &= \Psi_+ \otimes (\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle) \quad \text{gdy wynikiem pomiaru jest 1} \\ \Psi^{(3)} &= \Psi_- \otimes (\alpha|00\rangle - \beta|11\rangle) \quad \text{gdy wynikiem pomiaru jest 2} \\ \Psi^{(3)} &= \Phi_+ \otimes (\beta|00\rangle + \alpha|11\rangle) \quad \text{gdy wynikiem pomiaru jest 3} \\ \Psi^{(3)} &= \Phi_- \otimes (\beta|00\rangle - \alpha|11\rangle) \quad \text{gdy wynikiem pomiaru jest 4}\end{aligned}\tag{1.12}$$

Teraz należy zadzwonić do dysponenta drugiego układu i poinformować go o wyniku pomiaru (przesłać dwa bity informacji klasycznym kanałem informacyjnym). Wtedy on w zależności od wyniku działa na swój podukład operacjami unitarnymi  $I$ ,  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  lub  $\sigma_y$  (odpowiednio gdy dowiaduje się że wynikiem pomiaru było 1, 2, 3, 4).

Klasycznie odpowiadałoby przeniesieniu po jednym eksperymencie rozkładu prawdopodobieństwa z jednej fałszywej monety na drugą przy użyciu dodatkowej monety skorelowanej z monetą wyjściową i jednej próby losowej. W świecie kwantowym taka procedura jest możliwa ponieważ mamy dostęp do wszystkich możliwych baz, nie tylko jednej ustalonej. Dla układu złożonego pozwala to wybrać bazę złożoną z wektorów splątanych, umożliwiającą teleportację.

W stanie układu dwupoziomowego (qubicie) można zapisać jeden bit informacji (wystarczy ustalić jedną bazę i układ staje się klasyczny). Teleportacja pozwala na przesłanie jednego bitu informacji klasycznej. Czy dzieje się to “natychmiastowo” (mniejsza o układ odniesienia)? Nie, dlatego że do przeprowadzenia teleportacji trzeba użyć klasycznego

kanału informacyjnego, którego szybkość jest ograniczona przez prędkość światła. Sama zmiana stanu trzeciego podukładu na skutek pomiaru (przejście do stanu mieszanego będącego mieszaniną wszystkich czterech stanów czystych z 1.12) nie jest w stanie dać informacji o stanie początkowym. Zbiór korelacji między podukładami dopuszczanych przez mechanikę kwantową, zawierający w sobie również te zabronione przez nierówności Bella, jest wciąż istotnym podzbiorem zbioru tzw. “korelacji niesygnalizujących” (*non-signaling*) [44].

Widzimy, że do przeniesienia na inny obiekt jednostki informacji kwantowej - qubit - potrzebne są dwa bity informacji klasycznej i jedna para splątanych qubitów - ebit. Splątanie jest niezbędnym zasobem w wielu protokołach kwantowej informacji, kwantowej kryptografii i obliczeń kwantowych (patrz [45], rozdziały XIX i XX i referencje tam zawarte).

**Destylowalność i splątanie związane** Z punktu widzenia zastosowań stajemy więc przed potrzebą stworzenia stanu maksymalnie splątanego przy użyciu lokalnych operacji i klasycznej komunikacji (SLOCC) w laboratoriach dysponentów podukładów z pewnej ilości posiadanych stanów splątanych. Operacja ta nazywa się *protokołem destylacji* i została opisana w [10]. Jeżeli stany którymi dysponowaliśmy przed destylacją były jednakowe, liczba uzyskanych stanów maksymalnie splątanych do liczby stanów wejściowych może być miarą splątania wejściowych stanów. Miarę tę nazywa się *entanglement of distillation* [10].

Podobnie, dla zadanego stanu splątanego można zapytać, ile potrzeba kopii stanu maksymalnie splątanego, by przy pomocy operacji SLOCC zbudować zadany stan splątany. Liczba zużytych kopii stanu maksymalnie splątanego do liczby uzyskanych kopii naszego stanu będzie inną jego miarą splątania, nazywaną *entanglement of formation* [10].

Dla stanów czystych, miary te są sobie równe <sup>10</sup>, co oznacza, że tyle samo stanów maksymalnie splątanych trzeba użyć do uzyskania zadanej liczby kopii danego stanu, ile można z takiej liczby kopii stanu z powrotem odzyskać. Dla stanów czystych splątanie jest zasobem, który można bezstratnie przenosić pomiędzy różnymi stanami nie tracąc go.

W przypadku stanów mieszanych już tak nie jest. Istnieją stany splątane, z których nie da się wydestylować stanów maksymalnie splątanych, ale ponieważ są one splątane, do ich stworzenia trzeba użyć pewną liczbę stanów maksymalnie mieszanych. Stany takie nazywamy *stanami ze splątaniem związanym* (eng. *bound entangled states*). Istnienie takich stanów dowodzi nieodwracalności operacji na splątaniu. Wykrywanie takiego splątania jest głównym tematem tej pracy.

Stan splątany dwóch podukładów, by mógł wykazywać splątanie związane, musi mieć rząd przynajmniej 4 [47], [48].

---

<sup>10</sup>Na stanach czystych istnieje dokładnie jedna miara splątania i jest ona równa entropii von Neumanna śladu częściowego stanu. Natomiast dla stanów mieszanych możliwych jest wiele funkcji spełniających aksjomaty miary splątania - patrz [46], rozdział 5.

## 1.5 Dekoherencja

Żaden układ fizyczny nie jest w pełni izolowany - oddziałuje on z otoczeniem. Stan czysty większego układu kwantowego złożonego z rozpatrywanego układu i otoczenia, ewoluuje unitarnie, kiedy przestajemy kontrolować układ i pozostawiamy go w stanie czystym. Można przyjąć, że otoczenie też startuje w stanie czystym. Stan dużego układu rozpatrywanego układu+otoczenie jest zatem na początku w stanie czystym separowalnym i ewoluuje pod działaniem pewnego hamiltonianu, który nie jest separowalny, zatem rozpatrywany układ splątuje się z otoczeniem, a ślad częściowy całości po otoczeniu staje się stanem mieszanym. Stan posiadanego przez nas układu staje się więc stanem mieszanym.

Za przebieg procesu dekoherencji odpowiada mechanizm oddziaływania wiążącego rozpatrywany układ kwantowy z jego otoczeniem [49], [50], w przypadku układów spinowych może to być oddziaływanie z drganiami zerowymi pola elektromagnetycznego. Dla nas ważny będzie tylko efekt dekoherencji, stan stacjonarny na który opada oddziałujący z rezerwuarem układ. Asymptotycznym stanem układu jest stan Gibbsa:

$$\rho_\infty = \exp(-H/kT)/\text{Tr}(\exp(-H/kT)).$$

Wektorami własnymi stanu  $\rho_\infty$  są wektory własne hamiltonianu. Jego spektrum natomiast jest tym bliższe spektrum unormowanej identyżności (stan maksymalnie mieszany) im wyższa jest temperatura.

Jeżeli układ, który podlega dekoherencji składa się z dwóch nieoddziałujących, odseparowanych przestrzennie podukładów (a z taką sytuacją się spotykamy w zastosowaniach splątania - protokołach informacji kwantowej), to jego hamiltonian jest hamiltonianem podukładów:  $H = H_1 \otimes I + I \otimes H_2$ , bez członu oddziaływania. Wektorami własnymi tego hamiltonianu są wszystkie iloczyny tensorowe wektorów własnych hamiltonianów lokalnych, a wartościami własnymi odpowiadające im wszystkie sumy wartości własnych hamiltonianów lokalnych:

$$H = \sum_{ij} (\lambda_i^{(1)} + \lambda_j^{(2)}) |\phi_i^{(1)} \otimes \phi_j^{(2)}\rangle \langle \phi_i^{(1)} \otimes \phi_j^{(2)}|, \quad \text{gdzie}$$

$$H_1 = \sum_i \lambda_i^{(1)} |\phi_i^{(1)}\rangle \langle \phi_i^{(1)}|, \quad H_2 = \sum_j \lambda_j^{(2)} |\phi_j^{(2)}\rangle \langle \phi_j^{(2)}|.$$

Te same wektory separowalne są wektorami własnymi stanu Gibbsa, czyli jest on kombinacją wypukłą projektorów na stany separowalne, tzn. jest on separowalny. Wszystkie jego wartości własne są ściśle dodatnie, zatem leży on we wnętrzu zbioru stanów separowalnych. Oznacza to, że w skończonym czasie każdy układ kwantowy przejdzie do stanu separowalnego na skutek oddziaływania z otoczeniem. Zjawisko polegające na zaniku splątania w skończonym czasie nosi nazwę *nagłej śmierci splątania* (ang. *sudden death*) [51], [52]. Im wyższa temperatura, tym spektrum stanu Gibbsa jest bliższe spektrum stanu maksymalnie zmieszanego, zatem tym dalej leży on od brzegu zbioru stanów separowalnych i szybciej na skutek dekoherencji stan układu staje się separowalny. Utrata splątania na skutek dekoherencji jest nieunikniona. Gdy używamy stanu splątanego w praktyce, ważne jest jak szybko ona następuje. By odpowiedzieć na to pytanie trzeba już bliżej poznać hamiltonian oddziaływania układu z otoczeniem. Z punktu widzenia zastosowań, ważne

jest ile operacji na układzie jesteśmy w stanie wykonać, zanim jego stan przestanie być splątany.

Dla przykładu, jedną z najbardziej obiecujących implementacji pary sprzężonych qubitów jest para centrum azot-luka - azot w diamencie [53], [54]. Dla tego układu czas dekoherencji wynosi 1 ms, natomiast możliwa jest zmiana stanu układu za pomocą dostrojonych modów pola elektromagnetycznego w czasie 1 ns. Oznacza to możliwość wykonania na parze splątanych qubitów  $10^6$  operacji [55].

Zupełnie inną rolę dekoherencja może pełnić w fazie, gdy oba podukłady są wciąż na etapie oddziaływania i budowania wzajemnego splątania. Wtedy stan Gibbsa ma splątane wektory własne i może być splątany. Oznacza to, że zostawiając oddziałujący układ samemu sobie, splątanie podukładów wytworzy się samoistnie [56]. Wtedy rozdzielamy przestrzennie podukłady i możemy ich pary używać jako zasobu korelacji nieklasycznych (splątania). Warunkiem powodzenia tej procedury jest splątany wektor własny przy energii stanu podstawowego i odpowiednia niska temperatura. W rozdziale 5 użyjemy ogólnych warunków na spektrum stanów separowalnych do obliczenia ograniczenia dolnego na temperaturę, przy której opisana wyżej procedura prowadzi do splątania podukładów.

# Rozdział 2

## Geometryczny obraz zbioru stanów kwantowych

### 2.1 Podstawowe pojęcia i fakty związane z wypukłością

Jeżeli układ kwantowy może być opisany z prawdopodobieństwem  $p$  przez stan  $\rho_1$  i z prawdopodobieństwem  $1 - p$  przez stan  $\rho_2$ , to jego stanem jest mieszanina statystyczna  $p\rho_1 + (1 - p)\rho_2$ . Dla ustalonych stanów  $\rho_1$  i  $\rho_2$  reprezentowanych przez macierze hermitowskie, możliwe kombinacje tworzą odcinek łączący punkty  $\rho_1$  i  $\rho_2$  w przestrzeni macierzy hermitowskich. Ponieważ mieszanina statystyczna jest również stanem, odcinek łączący dowolne dwa stany kwantowe powinien zawierać się w zbiorze stanów. Podzbiór przestrzeni liniowej (afiniczej) posiadający taką własność nazywamy zbiorem wypukłym.

**Definicja 2.1.** Podzbiór  $A \in V$  przestrzeni liniowej  $V$  nad  $\mathbb{R}$  nazywamy wypukłym, jeżeli odcinek łączący dwa dowolne punkty zbioru  $A$  zawiera się w zbiorze  $A$ . Równoważnie, zbiór  $A$  jest wypukły jeżeli dowolna kombinacja wypukła  $x$  dowolnej liczby jego punktów  $x_1, \dots, x_n$ :

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \wedge \sum_i \lambda_i = 1$$

należy do zbioru  $A$ .

Jeżeli zbiór  $A$  nie jest wypukły, istnieje najmniejszy zbiór wypukły, który go zawiera (istnieje, ponieważ przekrój dwóch zbiorów wypukłych jest wypukły). Zbiór ten nazywany *otoczką wypukłą* zbioru  $A$  i oznaczamy przez  $\text{conv}(A)$ . Konstruuje się go przez dodanie do zbioru  $A$  wszystkich kombinacji wypukłych jego punktów.

Dalej będą nas interesować wypukłe podzbiory skończenie wymiarowych rzeczywistych przestrzeni liniowych, które dodatkowo mają niepuste wnętrze i są zwarte. Zbiory takie nazywamy *ciałami wypukłymi*. O ciałach wypukłych można powiedzieć więcej niż ich nadklasie - zbiorach wypukłych.

W zbiorze wypukłym można wyodrębnić podzbiór elementów, oznaczany jako  $\text{ex}(A)$ , które nie mogą być otrzymane jako kombinacja wypukła innych punktów tego zbioru. Elementy te nazywają się *punktami ekstremalnymi*. Istnieją zbiory wypukłe, które nie

posiadają żadnego punktu ekstremalnego (przykładem może być kula otwarta w dowolnej metryce). Natomiast ciała wypukłe można charakteryzować przez ich zbiór punktów ekstremalnych:

**Twierdzenie 2.2** (Kreina-Milmana<sup>1</sup> [58]). *Jeżeli  $A$  jest ciałem wypukłym, to  $A = \text{conv}(\text{ex}(A))$*

Ciało wypukłe jest w pełni charakteryzowane przez jego zbiór punktów ekstremalnych.

Pojęcie punktu ekstremalnego uogólnia się na punkt rzędu  $k$ . Mówimy że punkt ma rząd wypukłości  $k$ , jeżeli można go przestawić jako kombinację wypukłą  $k$  punktów ekstremalnych, ale nie jako kombinację wypukłą  $k - 1$  punktów ekstremalnych. Rząd wypukłości elementu zbioru wypukłego jest ograniczony z góry. Mówi o tym:

**Twierdzenie 2.3** (Carathéodory'ego). *Rząd dowolnego punktu w podzbiorze wypukłym  $A$  przestrzeni liniowej  $V$  jest mniejszy lub równy  $n + 1$ , gdzie  $n$  oznacza wymiar przestrzeni  $V$ .*

**Przykład 2.4.** *Sześcian posiada osiem punktów ekstremalnych. Są nimi jego wierzchołki. Punkty o rzędzie 2 leżą na krawędziach, przekątnych sześcianu i na przekątnych ścian. Punkty rzędu 3 tworzą sieć dwuwymiarowych płaszczyzn w sześcianie, których krawędziami są krawędzie sześcianu, przekątne sześcianu i przekątne ścian sześcianu. Wszystkie inne punkty mają rząd 4.*

**Minimalizacja i maksymalizacja funkcji rzeczywistych określonych na ciałach wypukłych.** Dla funkcji rzeczywistych określonych na rzeczywistych przestrzeniach liniowych definiuje się pojęcia wypukłości i wklęsłości.

**Definicja 2.5.** *Funkcję  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , określoną na podzbiorze  $A$  rzeczywistej przestrzeni liniowej, nazywa się wypukłą, jeżeli dla dowolnych punktów  $x_1, \dots, x_n$  zachodzi nierówność:*

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \leq \sum_i \lambda_i f(x_i),$$

dla dowolnych liczb  $\lambda_i$  takich, że  $\sum_i \lambda_i = 1$ .

**Definicja 2.6.** *Funkcję  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , określoną na podzbiorze  $A$  rzeczywistej przestrzeni liniowej, nazywa się wklęsłą, jeżeli dla dowolnych punktów  $x_1, \dots, x_n$  zachodzi nierówność:*

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \geq \sum_i \lambda_i f(x_i),$$

dla dowolnych liczb  $\lambda_i$  takich, że  $\sum_i \lambda_i = 1$ .

Funkcja wypukła określona na ciele wypukłym  $A$  osiąga wartość maksymalną w pewnym punkcie ekstremalnym zbioru  $A$ . Podobnie, funkcja wklęsła określona na ciele wypukłym  $A$  osiąga minimum w pewnym punkcie ekstremalnym tego zbioru. Jedyną funkcją, która jest jednocześnie wypukła i wklęsła jest funkcja liniowa. Funkcja taka przyjmuje swoje minimum i maksimum w punktach ekstremalnych ciała wypukłego, na którym jest określona. W dalszej części pracy, spośród wszystkich funkcji określonych na zbiorach  $A$  interesować nas będą prawie wyłącznie funkcje liniowe.

<sup>1</sup>Twierdzenie to znane jest też pod nazwą twierdzenia Minkowskiego [57]

## 2.2 Stożki i pojęcie dualności

Zbiory będące w centrum naszego zainteresowania w dalszej części pracy będą - z geometrycznego punktu widzenia - stożkami właściwymi, lub ich zbiorami bazowymi. Definicję stożka właściwego przytaczamy za [59]

**Definicja 2.7.** Niech  $X$  będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad  $\mathbb{R}$ . Zbiór  $K \subset X$  nazywamy stożkiem właściwym, jeżeli posiada następujące własności:

- *Stożek wypukły:*  $\forall \zeta, \xi \geq 0 \Gamma_1, \Gamma_2 \in K \Rightarrow \zeta\Gamma_1 + \xi\Gamma_2 \in K$
- *Domkniętość:*  $K$  jest domknięty w topologii  $X$
- *Pełność:*  $K$  posiada wewnątrz w topologii  $X$ , równoważnie  $X = K - K$  (przez zapis  $K - K$  rozumiemy zbiór wektorów będących różnicami dwóch punktów ze stożka  $K$ ).
- *Punktowość:*  $x \in K \wedge -x \in K \Rightarrow x = 0$  (w stożku  $K$  nie zawiera się żadna prosta)

W szczególności, biorąc w pierwszym warunku  $\xi = 0$  dostajemy, że każdy punkt stożka należy do niego wraz z półprostą wychodzącą z zera, która go zawiera. Stożek jest sumą takich półprostych (zbiory spełniające tylko ten warunek nazywane są stożkami, stożki wypukłe stanowią podklasę właściwą klasy stożków). Półproste w przestrzeni  $X$  wychodzące z zera nazywane są *półpromieniami* [63].

Stożek właściwy w przestrzeni  $X$  zadaje w niej relację częściowego porządku:

$$x \leq_K y \iff y - x \in K$$

Jeżeli  $K \cup -K = X$ , wtedy częściowy porządek jest porządkiem. Poniżej prezentujemy kilka przykładów najbardziej znanych relacji porządku wraz z zadającymi je stożkami.

- Porządek w zbiorze liczb rzeczywistych. Zadaje go stożek  $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ .
- Porządek leksykograficzny w  $\mathbb{R}^N$ .  $(x_1, \dots, x_N) \leq (y_1, \dots, y_N) \Leftrightarrow \forall i x_i \leq y_i$ . Zadaje go stożek  $\mathbb{R}_+^N$ .
- Porządek w zbiorze form dwuliniowych określonych na przestrzeni rzeczywistej, lub półtoraliniowych <sup>2</sup> określonych na zespolonej przestrzeni liniowej.  $A \geq B \Leftrightarrow A - B$  jest półodatnio określony. Zadaje go stożek form półodatnio określonych.

**Zbiór bazowy stożka.** Stożek jest jednoznacznie wyznaczany przez zbiór wypukły nazywany *zbiorem bazowym stożka*.

**Definicja 2.8.** Zbiór bazowy stożka  $K$ , to zbiór wypukły  $K_0$  taki, że dla dowolnego punktu  $y \in K$  istnieje dokładnie jeden punkt  $x \in K_0$  i pewien dodatni skalar  $\lambda$ , że  $y = \lambda x$ .

<sup>2</sup>Forma  $\Phi(x, y)$  jest półtoraliniową, jeżeli jest liniowa w drugim argumencie i antyliniowa ( $\Phi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1^* \Phi(x_1, y) + \alpha_2^* \Phi(x_2, y)$ ) w pierwszym. Przykładem formy półtoraliniowej jest iloczyn skalarny w zespolonej przestrzeni liniowej, a także dualne do siebie dwuformy obserwabli i stanów w mechanice kwantowej.

Gdy mamy dany stożek  $K \subset V$ , wtedy budujemy zbiór bazowy biorąc dowolny funkcjonal  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ , taki że  $f(K) > 0$ . Zbiór punktów  $x \in K$ ,  $f(x) = 1$  tworzy wtedy zbiór bazowy stożka  $K$ . Zbiór bazowy jest przecięciem stożka pewną warstwą afiniczną.

Każdy punkt zbioru bazowego  $K_0$  odpowiada dokładnie jednemu półpromieniowi w stożku  $K$ . Półpromienie odpowiadające punktom ekstremalnym nazywane są półpromieniami ekstremalnymi.

**Dualność i polarność.** Dla stożka właściwego  $K \subset X$  definiujemy stożek  $K^* \subset X^*$  nazywany *stożkiem dualnym do  $K$* :

$$K^* = \{x \in X^* : \forall y \in K \langle x|y \rangle \geq 0\}. \quad (2.1)$$

Kwantyfikowany zbiór w definicji 2.1 można ograniczyć do punktów ekstremalnych stożka  $K$ .

Dalej rozważać będziemy tylko stożki w przestrzeniach liniowych z iloczynem skalarnym. Jeżeli przestrzeń  $X$  wyposażona jest w iloczyn skalarny, zadaje on izomorfizm między przestrzeniami  $X$  i  $X^*$  (mówi o tym tw. Riesz). W tej sytuacji można rozpatrywać stożki  $K$  i  $K^*$  jako elementy tej samej przestrzeni. Może zdarzyć się wtedy, że  $K = K^*$ . Taki stożek nazywamy samodualnym.

Zbiór  $\{y : \langle x|y \rangle \geq 0\}$  jest domkniętą półprzestrzenią leżącą po jednej stronie hiperpłaszczyzny prostopadłej do wektora  $x$ . Stożek dualny  $K^*$  jest przekrojem takich półprzestrzeni dla wszystkich wektorów ze stożka  $K$ , ale jest on równy przekrojowi półprzestrzeni odpowiadających punktom ekstremalnym.

**Fakt 2.9.** *Własności dualności ([64], s. 155)*

1.  $K^*$  jest stożkiem właściwym.
2.  $K \subset L \Rightarrow K^* \supset L^*$ .
3.  $(K \cap L)^* = \text{conv}(K^* \cup L^*)$ .
4.  $\text{conv}(K \cup L)^* = K^* \cap L^*$
5.  $(AK)^* = (A^T)^{-1}K^*$  <sup>3</sup>. W szczególności, jeżeli działamy operacją ortogonalną w  $(X, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ , stożek  $K$  i stożek  $K^*$  do niego dualny transformują się tak samo. Przez  $A^T$  rozumiemy operator sprzężony w sensie iloczynu skalarnego przestrzeni  $X$ .

Jeżeli w definicji stożka właściwego zrezygnujemy z własności punktowości, otrzymamy obiekt nazywany *klinem* <sup>4</sup>. Dowolny klin  $K$  może być zapisany jako produkt kartezjański podprzestrzeni liniowej i stożka właściwego w jej dopełnieniu ortogonalnym  $K = V \times L$ . Zbiorem  $K'$  dualnym do klina  $K$  jest stożek niepełny:  $\{0_V\} \times L'$ . Pełność i punktowość są własnościami wzajemnie dualnymi ([64], s. 155).

Mając dany funkcjonal liniowy  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  dodatni na stożku  $K$  definiujący zbiór bazowy stożka, można rozłożyć dowolny wektor  $x \in X$  na składową z jądra  $f$  i składową

<sup>3</sup>Jest to szczególny przypadek twierdzenia Kreina-Rutmana, patrz [64], s.156

<sup>4</sup>W literaturze angielskiej *wedge*, patrz np. [63], s. 2



do niej prostopadłą:  $x = x_0 + x_0^\perp$ . Jeżeli  $x$  jest elementem zbioru bazowego, to  $\langle f|x \rangle = 1$ , co oznacza, że  $x_0 = f/\|f\|^2$ . Iloczyn skalarny dwóch wektorów  $x, y \in X$  wynosi  $\langle y_0|x_0 \rangle + \langle y_0^\perp|x_0^\perp \rangle = \langle y_0|x_0 \rangle + 1/\|f\|^2$ . Relacja dualności dwóch stożków  $K$  i  $K^*$  przenosi się na relację pomiędzy ich zbiorami bazowymi określanymi przez funkcjonal  $f$ :

$$K_0^* = \left\{ y \in \ker f + \frac{f}{\|f\|^2} : \forall x \in K_0 \langle y_0|x_0 \rangle \geq -\frac{1}{\|f\|^2} \right\} \quad (2.2)$$

( $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ) oznacza iloczyn skalarny w podprzestrzeni  $V_0$ ). Zbiór tak zdefiniowany nazywa się *zbiorem polarnym*<sup>5</sup> do zbioru  $K_0$ .

Polarność ma podobne własności jak dualność:

**Fakt 2.10.** *Własności polarności:*

1.  $K_0^*$  jest zbiorem wypukłym.
2.  $K_0 \subset L_0 \rightarrow K_0^* \supset L_0^*$ .
3.  $(K_0 \cap L_0)^* = \text{conv}(K_0^* \cup L_0^*)$ .
4.  $\text{conv}(K_0 \cup L_0)^* = K_0^* \cap L_0^*$
5.  $(AK_0)^* = (A^T)^{-1}K^*$ . Przez  $A^T$  rozumiemy operator sprzężony w sensie iloczynu skalarnego przestrzeni  $V$ , indukowanego z przestrzeni  $X$ .

Korzystając z relacji dualności pomiędzy klinami i niepełnymi stożkami, można udowodnić następujące relacje. Niech  $L$  będzie stożkiem właściwym w podprzestrzeni  $W$ :

1.  $(L \times \{0_{W^\perp}\})^* = L^* \times W^\perp$ .
2.  $(L \times W^\perp)^* = L^* \times \{0_{W^\perp}\}$

Jeżeli zbiór wypukły jest polarny do samego siebie, nazywamy go samopolarnym. Zbiory samopolarne są zbiorami bazowymi samodualnych stożków.

**Ściany stożków i ciał wypukłych.** Stożek właściwy posiada hierarchię podzbiorów nazywanych *ścianami*.

**Definicja 2.11.** *Dla stożka właściwego  $K \subset X$  jego podzbiór  $F \subset K$  nazywamy ścianą stożka  $K$ , jeżeli spełniony jest warunek:*

$$\forall x \in K \forall y \in F \ x \leq_K y \Rightarrow x \in F$$

Zapisujemy to jako  $F \triangleleft K$ .

<sup>5</sup>Można spotkać również inną definicję polarności, z warunkiem  $\langle y|x \rangle \leq 1$ . Definicja taka [65] daje zbiór (2.2) odbity względem 0 w przestrzeni  $V_0$ . Poza tym, ponieważ prawa strona jest stale równa 1, definicja ta źle się transformuje przy zmianach funkcjonału dodatniego definiującego zbiór bazowy

Cały stożek  $K$  jest swoją ścianą. Jeżeli  $F$  ściana stożka różna jest od całego stożka, to jest ona stożkiem niewłaściwym żyjącym w pewnej podprzestrzeni przestrzeni  $X$ . Można więc również dla niej definiować jej ściany. Taką ścianę  $G$  takie nazywamy podścianą ściany  $F$  i zapisujemy to jako  $G \triangleleft F$ .

Zbiór ścian stożka  $K$  oznaczamy jako  $\mathcal{F}(K)$ . Można w tym zbiorze wprowadzić działania:

- $F \vee G =$  najmniejsza ściana zawierająca ściany  $F$  i  $G$ ,
- $F \wedge G = F \cap G$  (przekrój dwóch ścian jest ścianą).

Zbiór  $\mathcal{F}(K)$  wyposażony w takie działania jest kratą zupełną<sup>6</sup> [60]. Dla stożka stanów kwantowych w ustalonym wymiarze, który omówimy szczegółowo w następnych podrozdziałach, krata ta jest kratą podprzestrzeni przestrzeni Hilberta układu, która jest kratą zdarzeń dla logiki kwantowej<sup>7</sup> dla tego wymiaru.

Równoważnie ścianę można zdefiniować jako przekrój stożka i podprzestrzeni liniowej kowymiaru 1 do niego stycznej. Gdy tworzymy zbiór bazowy stożka  $K$ , przecinając go warstwą afiniczną  $V$ , przecięcie ściany  $F$  stożka z warstwą  $V$  jest ścianą  $F_0$  zbioru bazowego, odpowiadającą ścianie  $F$ . Ściana ta jest przekrojem ciała wypukłego ze styczną do niego hiperpłaszczyzną. Minimalną ścianą ciała wypukłego jest  $\emptyset$  i odpowiada ona minimalnej ścianie zbudowanego nad nim stożka, którą jest  $\{0\}$ . Struktura zbioru ścian stożka i jego stożka dualnego są ze sobą izomorficzne.

Jeżeli dwie ściany stożka zawierają element  $x$ , to ich przekrój będzie również ścianą stożka zawierającą element  $x$ . Uprawnia to nas do zdefiniowania minimalnej ściany zawierającej zadany element  $x$ :

**Definicja 2.12.** *Dla elementu  $x \in L$  przez  $F_L(x)$  rozumiemy najmniejszą ścianę stożka  $L$  zawierającą element  $x$ . Równoważnie, jest to zbiór punktów  $y$  stożka  $L$  takich, że*

$$\exists \alpha > 0 \quad \exists l \in L \quad y = \frac{x}{\alpha} - l.$$

Punkt  $y$  należy do ściany  $F_L(x)$ , jeżeli na prostej łączącej punkty  $y$  i  $x$  istnieją elementy stożka  $L$  po zewnętrznej stronie punktu  $x$ . Jest to przekrój stożka z podprzestrzenią liniową kowymiaru 1 styczną do stożka w punkcie  $x$ .

Analogiczną definicję wprowadza się dla ciał wypukłych.

<sup>6</sup>Kratą zupełną nazywamy zbiór  $A$  wyposażony w działania  $\vee$  oraz  $\wedge$ , które są przemienne, łączne, nilpotentne ( $x \wedge x = x$ ,  $x \vee x = x$ ) oraz związane relacjami  $(x \vee y) \wedge y = y$ ,  $(x \wedge y) \vee y = y$ . Przykładem kraty jest algebra Boola.

<sup>7</sup>Logika kwantowa jest logiką, której zbiorem zdarzeń jest krata podprzestrzeni przestrzeni Hilberta. Odpowiadające im projektory są obserwabłami przyjmującymi wartości 0 i 1 na stanie układu. Operacje koniunkcji i alternatywy dla projektorów nie spełniają wszystkich aksjomatów algebry Boola, natomiast mają te same własności jak w pewnych logikach rozmytych [61]. Wprowadzenie do logiki kwantowej można znaleźć w [62]

**Relacja komplementarności między ścianami.** Ścianie  $F \in \mathcal{F}(K)$  przypisujemy zbiór:

$$\Phi(F) = \{y \in K^* : \forall x \in F \langle y|x \rangle = 0\}. \quad (2.3)$$

Zbiór ten jest ścianą stożka dualnego nazywaną ścianą *komplementarną* do ściany  $F$ . Odwzorowanie  $\Phi$  odwzorowuje zatem  $\mathcal{F}(K)$  w  $\mathcal{F}(K^*)$ . Jest to bijekcja o własnościach:

**Fakt 2.13.** *Własności odwzorowania  $\Phi$*

1.  $F \triangleleft G \Rightarrow \Phi(G) \triangleleft \Phi(F)$ .
2.  $\phi(F \vee G) = \Phi(F) \wedge \Phi(G)$
3.  $\phi(F \wedge G) = \Phi(F) \vee \Phi(G)$

Podobnie definiujemy odwzorowanie  $\Phi_0$  pomiędzy ścianami zbioru wypukłego  $K$  i ścianami zbioru polarnego  $K^*$ . Ściana komplementarna do ściany  $F$  to przecięcie zbioru  $K^*$  z hiperpłaszczyzną dualną do punktu ze ściany  $F$ . Biorąc różne punkty ze ściany  $F$  dostaniemy różne hiperpłaszczyzny, ale ich przecięcie ze zbiorem  $K^*$  jest to samo.

Dwie klasy stożków właściwych zasługują na szczególną uwagę. Pierwszą z nich są stożki *rożkowe*<sup>8</sup>, zdefiniowane jako:

$$K_a = \{x \in V : \langle a|x \rangle \geq \|x\|\},$$

gdzie norma funkcjonału  $a \geq 1$ . Zbiorem bazowym takiego stożka jest przecięcie kuli o promieniu  $\sqrt{\|a\|^2 - 1}$  w  $V$  warstwą  $\{x : \langle a|x \rangle = 1\}$ . Ponieważ rozważamy przestrzenie z iloczynem skalarnym, sfery w nich nie zawierają odcinków. Punktami ekstremalnymi zbioru bazowego są jego wszystkie punkty brzegowe, zatem nie istnieją ściany wymiaru większego od 1. Ściana i ściana komplementarna mają wymiar 1.

Drugą klasą są stożki wielościanowe (*polyhedral cones*). Stożki takie są przekrojem skończonej liczby półprzestrzeni. Zbiorem bazowym takiego stożka jest wielościan, napinany przez skończoną liczbę punktów ekstremalnych (swoich wierzchołków). Wymiar ściany i ściany komplementarnej wiąże zależność:

$$\dim F + \dim \Phi(F) = n,$$

gdzie  $n$  oznacza wymiar przestrzeni, której podzbiorem jest stożek. Analogicznie, suma wymiaru ściany wielościanu wypukłego i ściany wielościanu polarnego komplementarnej do niej wynosi  $n - 1$  (każdy zbiór wypukły jest zbiorem bazowym pewnego stożka w przestrzeni wymiaru o jeden większego).

Niech  $a_k(W)$  oznacza liczbę  $k$ -wymiarowych ścian wielościanu  $W$  w  $n$ -wymiarowej przestrzeni. Liczby te dla wielościanu  $W$  i wielościanu do niego polarnego wiąże zależność:

$$a_k(W) = a_{n-1-k}(W^*) \quad (2.4)$$

<sup>8</sup>W literaturze anglojęzycznej funkcjonuje określenie *ice-cream cones*, poprzez ich podobieństwo do lodu rożka. Ponieważ lody mogą być różnych kształtów, tłumaczenie *stożki rożkowe* wydaje się precyzyjniejsze. W literaturze fizycznej spotyka się również termin *stożek Lorenza*, przez analogię do stożka świetlnego.

Wielościany spełniające tę zależność nazywa się *kombinatorycznie dualnymi* [65].

Stożki rozważane w tej pracy będą czymś pośrednim pomiędzy stożkami rożkowymi i wielościanowymi. Brzeg ich zbiorów bazowych będzie zawierał zarówno punkty osobliwe, jak w przypadku wielościanu, ale też obszary punktów regularnych nie będących hiperpłaszczyznami, jak w przypadku stożków rożkowych.

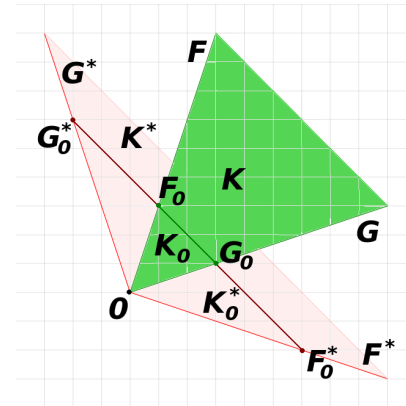
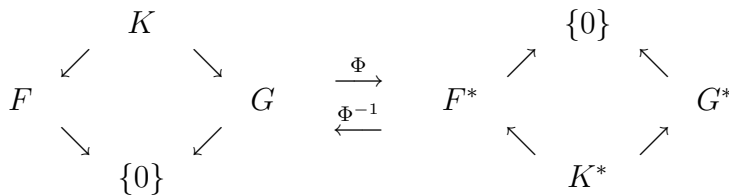
## 2.3 Ilustracja wprowadzonych pojęć - stożki w $\mathbb{R}^2$ , $\mathbb{R}^3$ i w $\mathbb{R}^4$

Wprowadzone w poprzednim podrozdziale pojęcia zostaną teraz zilustrowane w niskowymiarowych rzeczywistych przestrzeniach liniowych. Przestrzeń liniowa w której żyją stożki i przestrzeń do niej dualna, w której żyją stożki do niej dualne zostanie utożsamiona przy pomocy standardowego iloczynu skalarnego w  $\mathbb{R}^N$ . Pozwoli to rysować zbiory dualne(polarne) na tym samym rysunku.

**Stożki w  $\mathbb{R}^2$ .** W  $\mathbb{R}^2$  jedynymi stożkami są kąty, tzn obszary płaszczyzny ograniczone dwoma półprostymi o początku w punkcie 0. Jeżeli miarą kąta jest  $\alpha$ , to stożek dualny jest kątem o tej samej dwusiecznej i mierze  $\pi - \alpha$ . Stożek samodualny jest kątem o mierze  $\pi/2$ .

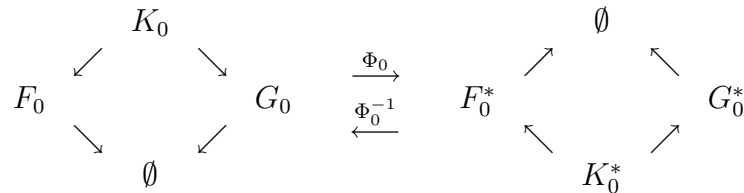
Zbiór bazowy stożka w  $\mathbb{R}^2$  jest podzbiorem  $\mathbb{R}^1$ . Jedynymi ciałami wypukłymi w  $\mathbb{R}^1$  są domknięte odcinki. Domknięty odcinek jest jednocześnie kulą i wielościanem w  $\mathbb{R}^1$ , zatem kąty są jednocześnie stożkami rożkowymi i wielościanowymi.

Hierarchie ścian stożka i stożka do niego dualnego wiąże bijekcja  $\Phi$ :



Rysunek 2.1: Stożek  $K$  i  $K^*$  do niego dualny. Ich zbiorami bazowymi są odpowiednio  $K_0$  i  $K_0^*$ .  $F$  i  $G$  są ścianami stożka  $K$ .  $F^*$  i  $G^*$  są komplementarnymi do nich ścianami stożka  $K$ .

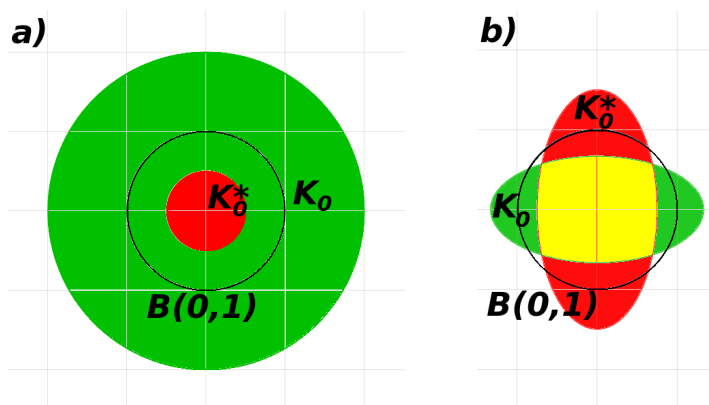
Te same hierarchie ścian posiadają zbiory bazowe stożków, które są domkniętymi odcinkami:



Strzałka  $K \rightarrow F$  oznacza tu relację  $K \triangleright F$  ( $K$  jest nadścianą  $F$ ). Ten prosty przykład (w tym wymiarze ogólny) pokazuje relacje dualności stożków, polarności ich zbiorów bazowych oraz relację komplementarności ścian zarówno dla stożków, jak i zbiorów bazowych.

**Stożki w  $\mathbb{R}^3$ .** Stożki w  $\mathbb{R}^3$  są charakteryzowane przez swoje zbiory bazowe w przestrzeni  $\mathbb{R}^2$ . Relacje między stożkiem a stożkiem dualnym obrazować będziemy poprzez relację polarności pomiędzy ich zbiorami bazowymi.

Pierwszym przykładem będzie kula. Zbiorem polarnym do kuli  $B(0, r)$  jest kula  $B(0, \frac{1}{r})$ . Kula jednostkowa jest zbiorem samopolarnym. Następnie można zastosować do kuli jednostkowej własność piątą relacji polarności (fakt 2.10) biorąc za odwzorowanie zbioru skalowanie przez  $a$  i  $b$  wzdłuż prostopadłych osi. Zbiór polarny skaluje się wtedy odpowiednio przez  $1/a$  i  $1/b$  wzdłuż tych samych osi. Elipsa o półosiach  $(a, b)$  przechodzi na elipsę o półosiach  $(1/a, 1/b)$ .



Rysunek 2.2: a) Kule wzajemnie polarne  $K_0 = B(0, 1/2)$  i  $K_0^* = B(0, 2)$ .  
b) Elipsy wzajemnie polarne  $K_0$  i  $K_0^*$  o półosiach odpowiednio  $(2/3, 4/3)$  i  $(3/2, 3/4)$ . Czarnym kolorem zaznaczona sfera jednostkowa.

By zobrazować trzecią i czwartą własność polarności (fakt 2.10):

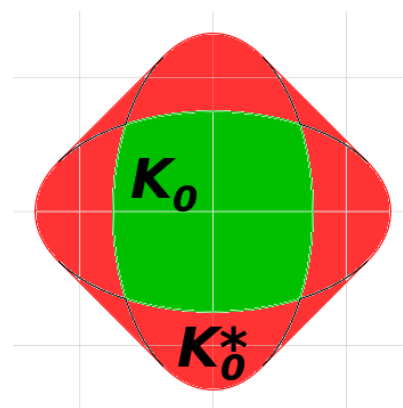
$$(K_0 \cap L_0)^* = \text{conv}(K_0^* \cup L_0^*)$$

$$\text{conv}(K_0 \cup L_0)^* = K_0^* \cap L_0^*$$

znajdziemy zbiór polarny do przekroju dwóch elips. Będzie nim otoczka wypukła sumy elips polarnych. Dla przejrzystości rysunku weźmiemy dwie elipsy do siebie polarne.

Każdy punkt brzegu zbioru  $K_0$  (przekrój dwóch elips) jest ścianą wymiaru 0. Natomiast brzeg zbioru  $K_0^*$  zawiera zarówno ściany 0-wymiarowe (zawierają się one w odcinkach elips), jak i 1-wymiarowe (cztery odcinki pochodzące od wypuklenia). Ściany jednowymiarowe w  $K_0^*$  są komplementarne do 0-wymiarowych ścian zbioru  $K_0$  tworzonych przez punkty osobliwe jego brzegu. Ściany 0-wymiarowe zbioru  $K_0^*$  są natomiast komplementarne do ścian 0-wymiarowych zbioru  $K_0$  tworzonych przez jego punkty regularne.

Suma wymiaru ściany i ściany komplementarnej dla tego zbioru może być równa 0 (jak dla zbioru bazowego stożka rożkowego) lub 1 (jak dla zbioru

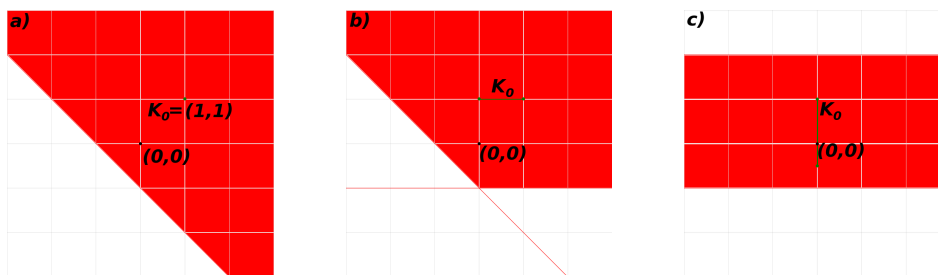


Rysunek 2.3: Zbiór polarny do przekroju dwóch wzajemnie polarnych elips.

bazowego stożka wielościanowego). Stożek bazujący na zbiorze  $K_0$  jest więc pośredni pomiędzy stożkiem rożkowym i stożkiem wielościanowym.

Drugą ważną klasą stożków właściwych są stożki wielościanowe. Ich zbiorami bazowymi są wielościany. Na kilku przykładach omówimy teraz polarność wielościanów. Na początek rozważmy zbiór polarny do pojedynczego punktu na płaszczyźnie. Będzie nim półpłaszczyzna ograniczona prostą prostopadłą do wektora wodzącego  $\vec{r}$  punktu, przebiegająca po drugiej stronie środka płaszczyzny w odległości  $1/r$  od środka. W szczególności zbiorem polarnym do punktu 0 jest cała płaszczyzna.

Korzystając z czwartej własności polarności  $\text{conv}(K_0 \cup L_0)^* = K_0^* \cap L_0^*$ , można znaleźć zbiór polarny do odcinka. W ogólności jest to kąt powstały z przecięcia półpłaszczyzn odpowiadających końcom odcinka. Jeżeli odcinek zawiera w sobie środek układu współrzędnych, kąt ten przechodzi w pas prostopadły do odcinka.



Rysunek 2.4: a) Zbiorem polarnym do punktu jest półpłaszczyzna.

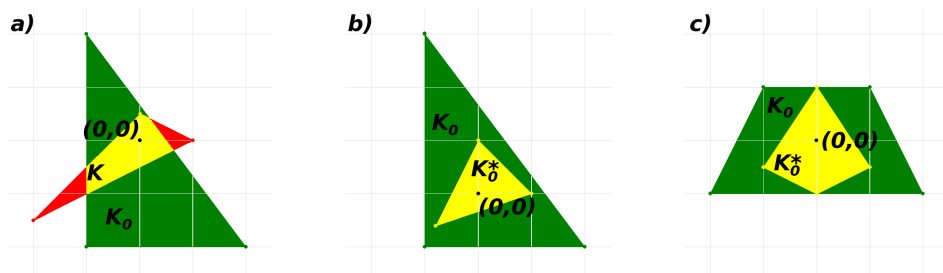
b) zbiorem polarnym do odcinka jest kąt.

c) Zbiorem polarnym do odcinka przechodzącego przez środek płaszczyzny jest pas.

Podobnie, czwarta własność polarności pozwala scharakteryzować zbiór polarny do wypukłego wielokąta. Wierzchołkami polarnego wielokąta  $K_0^*$  będą punkty polarne do półpłaszczyzn odcinanych przez proste, zawierające w sobie boki wielokąta  $K_0$ . Wierzchołkiem polarnym do boku łączącego wierzchołki  $\vec{r}_k = (x_k, y_k)$  i  $\vec{r}_{k+1} = (x_{k+1}, y_{k+1})$  wielokąta jest kąt o wierzchołku w punkcie:

$$\vec{r}_k^* = \frac{1}{|\vec{r}_k \times \vec{r}_{k+1}|^2} (-\Delta y, \Delta x)$$

(działanie tego wzoru można zobaczyć na rysunku 2.4 b). Jako przykład działania tego wzoru podajemy zbiory polarne do trójkąta pitagorejskiego i trapezu.



Rysunek 2.5: Zbiory polarne do trójkąta pitagorejskiego (a i b) i trapezu (c). Rysunek b pokazuje zmianę zbioru  $K_0^*$  po translacji zbioru  $K_0$  o wektor.

Wielokąty foremne o środku w 0 przechodzą w wielokąty foremne o środku w 0. Wielokąt o nieparzystej liczbie wierzchołków jest po tej operacji przeskalowaną kopią siebie, natomiast wielokąt o parzystej liczbie wierzchołków jest swoją kopią odbitą dodatkowo względem 0. Jeżeli skalujemy zbiór wypukły, jego zbiór polarny skaluje się o czynnik odwrotny. Dla każdego wielokąta foremnego o nieparzystej liczbie wierzchołków istnieje zatem taka długość boku, że wielokąt ten i wielokąt do niego polarny są sobie równe, jest on zatem zbiorem samopolarnym. Stożki oparte na takich zbiorach bazowych są samodualne.

**Stożki w  $\mathbb{R}^4$ .** Stożki w  $\mathbb{R}^4$  zaprezentujemy za pomocą ich zbiorów bazowych w  $\mathbb{R}^3$ . Zbiorami bazowymi stożków rożkowych są trójwymiarowe kule, a zbiorami bazowymi stożków wielościanowych wielościany.

Analogicznie do przypadku dwuwymiarowych zbiorów bazowych, zbiorem polarnym do punktu w  $\mathbb{R}^3$  jest domknięta półprzestrzeń. Dla odcinka będzie to klin równy produktowi prostej prostopadłej do podprzestrzeni w której leży odcinek i kąta polarnego do odcinka w tej podprzestrzeni.

Zbiorem polarnym do trójkąta jest kąt bryłowy ograniczony trzema płaszczyznami, polarnymi do wierzchołków trójkąta. Wierzchołek kąta leży na prostej prostopadłej do płaszczyzny trójkąta przechodzącej przez 0. Jeżeli płaszczyzna ta leży w odległości  $r$  od 0, to punkt polarny do odcinanej przez nią półprzestrzeni leży w odległości  $1/r$  od 0.

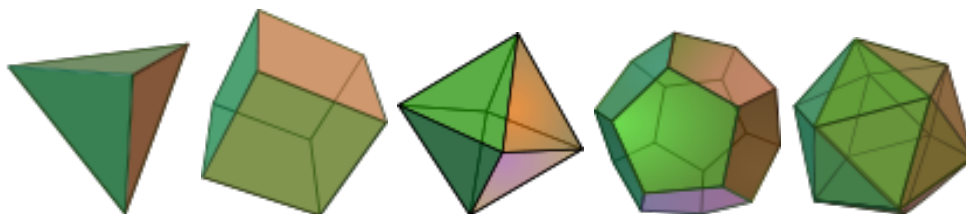
Podobnie, zbiorem polarnym do dwuwymiarowego  $n$ -boku będzie kąt bryłowy ograniczony  $n$  ścianami przecinającymi się w jednym punkcie. Ścianą komplementarną do wierzchołka wielościanu będzie dwuwymiarowa ściana wielościanu polarnego. Ścianą komplementarną do krawędzi wielościanu komplementarnego będzie krawędź wielościanu polarnego. Ścianą komplementarną do 2-wymiarowej ściany wielościanu będzie wierzchołek wielościanu polarnego (Wymiary ścian komplementarnych wielościanu wiąże wzór (2.4)).

Komplementarność ustala bijekcję pomiędzy zbiorem ścian pewnego zbioru wypukłego i zbioru do niego polarnego, która zachowuje inkluzje pomiędzy ścianami. Jeżeli dla pewnych ścian  $F$  i  $G$  zachodzi  $F \triangleleft G$ , to  $\Phi(G) \triangleleft \Phi(F)$ . Dla wielościanów w  $\mathbb{R}^3$  oznacza to, że:

- Wielościany  $W$  i  $W^*$  mają po tyle samo krawędzi.
- Krawędzie wielościanu  $W^*$ , komplementarne do krawędzi będących bokami tej samej ściany 2-wymiarowej wielościanu  $W$ , spotykają się w wierzchołku wielościanu  $W^*$ , odpowiadającym tej ścianie.

- Krawędzie wielościanu  $W$ , komplementarne do krawędzi wielościanu  $W$  spotykających się w jednym wierzchołku, są bokami tej samej ściany wielościanu  $W^*$ .

Zaprezentujemy te własności dla jedynych wielościanów foremnych w  $\mathbb{R}^3$ , czyli brył platońskich.

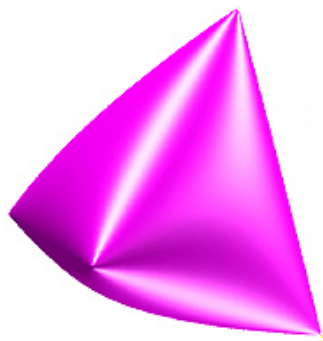


Rysunek 2.6: Pięć ciał platońskich. Od lewej kolejno czworościan (tetrahedron), sześcian (hexahedron), ośmiościan (octahedron), dwunastościan (dodecahedron), dwudziestościan (icosahedron). Rysunki z zasobów Wikimedia Commons.

Zachodzą między nimi następujące relacje polarności:

- Czworościan jest samopolarny (dla odpowiednio dobranej długości krawędzi). Liczby ścian kolejnych wymiarów wynoszą dla niego odpowiednio 4, 6, 4, 1 (4 wierzchołki, 6 krawędzi, 4 ściany 2-wymiarowe i jedna ściana 3-wymiarowa, będąca całym czworościanem).
- Sześcian jest polarny do ośmiościanu. Liczby ścian kolejnych wymiarów dla sześcianu wynoszą odpowiednio 8, 12, 6, 1, a dla ośmiościanu 6, 12, 8, 1.
- Dwunastościan jest polarny do dwudziestościanu. Liczby ścian kolejnych wymiarów dla dwunastościanu wynoszą odpowiednio 20, 30, 12, 1, a dla dwudziestościanu 12, 30, 20, 1.

Kepler utożsamiał czworościan z żywiołem ognia, sześcian z żywiołem ziemi, ośmiościan z żywiołem powietrza, dwudziestościan z żywiołem wody, natomiast dwunastościan z eterem lub pierwiastkiem boskim. Przy takim utożsamieniu relacja polarności ustala dualności pomiędzy parami żywiołów.



Rysunek 2.7: Eliptop  $\mathcal{E}^3$ . Rysunek z książki [66].

Na koniec podrozdziału podamy przykład zbioru wypukłego w  $\mathbb{R}^3$ , który nie jest wielościanem, ale posiada ściany niezerowego wymiaru. Zbiorem tym jest eliptop  $\mathcal{E}^3$  składający się z punktów, dla których macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & z \\ y & z & 1 \end{bmatrix}$$

jest półdefinitnie określona. Zbiór ten wygląda jak napomniany sympleks (rysunek 2.7). Z punktu widzenia struktury zbioru ścian, jest on trójwymiarowym odpowiednikiem zbioru zaprezentowanego na rysunku 2.3.

Eliptop można otrzymać np. przecinając zbiór stanów kwantowych układu trójpoziomowego podprzestrzenią afiniczną macierzy rzeczywistych o ustalonej przekątnej [67].



## 2.4 Stożek macierzy półdodatnio określonych

Przestrzeń liniową form półtoraliniowych działających w  $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d$  będziemy oznaczać przez  $\mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$ . Jest to przestrzeń liniowa nad  $\mathbb{C}$ , wyposażona w półtoraliniowy iloczyn skalarny  $\langle A|B \rangle = \text{Tr}(A^\dagger B)$  nazywany iloczynem Hilberta-Schmidta. Iloczyn ten wprowadza normę Hilberta-Schmidta<sup>9</sup>, definiowaną jako  $\|A\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(A^\dagger A)}$ .

Podzbiór form hermitowskich w tej przestrzeni, oznaczany przez  $\mathcal{B}_H(\mathbb{C}^d)$ , jest rzeczywistą przestrzenią liniową. Iloczyn Hilberta-Schmidta obcięty do zbioru form hermitowskich jest rzeczywistym, dwuliniowym iloczynem skalarnym.

W przestrzeni form hermitowskich istnieje wyróżniony podzbiór form półdodatnio określonych. Zbiór ten jest stożkiem właściwym oznaczanym jako  $\mathcal{B}_+(\mathbb{C}^d)$ . Jego półpromieniami ekstremalnymi są formy o macierzach rzędu 1.

Dwuforma  $A$  jest półdodatnio określona, jeżeli dla dowolnego wektora  $\Psi$  zachodzi  $\langle \Psi|A|\Psi \rangle \geq 0$ . Warunek ten można zapisać przy pomocy iloczynu  $HS$  jako  $\forall \Psi \text{Tr}(|\Psi\rangle\langle\Psi|A) \geq 0$ . Ponieważ macierze  $|\Psi\rangle\langle\Psi|$  generują półpromienie ekstremalne zbioru form półdodatnio określonych, warunek ten oznacza, że  $A \in \mathcal{B}_+(\mathbb{C}^d)$ . Oznacza to, że  $\mathcal{B}_+(\mathbb{C}^d) = \mathcal{B}_+(\mathbb{C}^d)$ , czyli że stożek macierzy dodatnich jest samodualny. Dalej opisywać będziemy dwuformy hermitowskie poprzez ich macierze w pewnej ustalonej bazie

By zdefiniować zbiór bazowy, za funkcjonal dodatni na stożku wybieramy ślad:  $\rho \rightarrow \text{Tr}\rho$ . Tak określony zbiór bazowy jest zbiorem macierzy dodatnich o śladzie równym 1, czyli macierzy gęstości. Oznaczamy go przez  $\mathcal{S}_+(\mathbb{C}^d)$ . Jako zbiór bazowy stożka samodualnego, jest to zbiór samopolarny. Unormowanie śladu wynika z żądania sumowania się prawdopodobieństw wszystkich możliwych pomiarów danej obserwacji do jedynki. Jest to warunek fizyczny i tak wybrany zbiór bazowy stożka macierzy półdodatnio określonych jest bardziej fizyczny niż sam stożek.

Norma śladu wynosi  $1/\sqrt{d}$ . Gdy tak wybierzemy funkcjonal dodatni, definicja polarności (2.2) przyjmie postać:

$$K_0^* = \left\{ x \in \mathcal{B}_0(\mathbb{C}^d) + \frac{I}{d} : \forall y \in K_0 \langle x_0|y_0 \rangle \geq -\frac{1}{d} \right\} \quad (2.5)$$

$\mathcal{B}_0(\mathbb{C}^d)$  oznacza przestrzeń bezśladowych macierzy hermitowskich.

**Hierarchia ścian stożka macierzy dodatnich.** Zgodnie z definicją 2.12, najmniejszą ścianą stożka macierzy dodatnich zawierającą stan  $\rho$  będzie zbiór:

$$F(\rho) = \left\{ \sigma : \exists \alpha > 0 \exists \eta \in \mathcal{B}_+(\mathbb{C}^d) \sigma = \frac{\rho}{\alpha} - \eta \right\}.$$

Ściany stożka charakteryzuje następujący fakt [59]:

**Fakt 2.14.** *Ścianą generowaną przez  $\rho$  jest zbiór macierzy półdodatnio określonych o obrazie zawartym w obrazie macierzy  $\rho$ .*

**Dowód:** Należy pokazać, że dla dowolnej macierzy  $\sigma$  o obrazie zawartym w obrazie macierzy  $\rho$ , można dobrać takie  $\alpha$ , że macierz  $\eta = \rho/\alpha - \sigma$  jest półdodatnio określona. W

<sup>9</sup>Nazywaną również normą Frobeniusa

tym celu za  $\alpha$  należy wziąć iloraz minimalnej dodatniej wartości własnej  $\rho$  (oznaczymy ją przez  $\lambda_{min}$ ) i maksymalnej wartości własnej macierzy  $\sigma$  (oznaczymy ją przez  $\lambda_{max}$ ). Wtedy dla dowolnego wektora  $\psi \in \text{Im}\rho$  mamy

$$\langle \psi | (\rho/\alpha - \sigma) | \psi \rangle = \langle \psi | \rho | \psi \rangle / \alpha - \langle \psi | \sigma | \psi \rangle \geq \langle \psi | \lambda_{min} | \psi \rangle / \alpha - \langle \psi | \lambda_{max} | \psi \rangle = 0$$

Dla wektora  $\psi$  z dopełnienia ortogonalnego  $\text{Im}\rho$  mamy  $\eta\psi = 0$ . Dowolny wektor z  $\mathbb{C}^d$  można rozłożyć na składową z  $\text{Im}\rho$  i składową do niej prostopadłą. Wartość formy  $\eta$  na tym wektorze będzie równa jej wartości na składowej tego wektora z  $\text{Im}\rho$ , więc będzie nieujemna.  $\square$

Zbiór ścian jest izomorficzny z kratą podprzestrzeni przestrzeni Hilberta układu. Wymiar podprzestrzeni macierzy hermitowskich o obrazie  $V$  wynosi  $(\dim V)^2$ . Wśród nich zbiór macierzy dodatnich stanowi podzbiór o niepustym wnętrzu, więc ściana form półdodatnio określonych o obrazie  $V$  ma wymiar  $(\dim V)^2$ .

**Wniosek 2.15.** *Wymiarami ścian stożka  $\mathcal{B}_+(\mathbb{C}^d)$  są kwadraty liczb naturalnych mniejszych lub równych  $d$ .*

Ponieważ stożek  $\mathcal{B}_+(\mathbb{C}^d)$  jest samodualny, relacja komplementarności zadaje bijekcję w zbiorze jego ścian. W myśl definicji 2.3, ścianą komplementarną do ściany  $F_V$  jest ściana:

$$\Phi(F_F) = \{y \in \mathcal{B}_+(\mathbb{C}^d) : \forall x \in F_V \langle x | y \rangle = 0\}.$$

Ponieważ  $x$  i  $y$  są macierzami dodatnimi, warunek  $\langle x | y \rangle = 0$  jest równoważny warunkowi  $\text{Im}x \cap \text{Im}y = \emptyset$ . Zbiorem macierzy  $y$  spełniających ten warunek dla wszystkich  $x \in F_V$  jest zbiór form kwadratowych o obrazie  $V^\perp$ , czyli jest to ściana  $F_{V^\perp}$ .

Stożek  $\mathcal{B}_+(\mathbb{C}^d)$  posiada ściany wymiaru większego od 1, ale suma wymiaru ściany i ściany do niej komplementarnej nie jest równa  $d^2$ , czyli lokuje się on pomiędzy klasą stożków rożkowych a klasą stożków wielościanowych.

## 2.5 Zbiór stanów kwantowych jako rozmaitość z brzegiem

Zgodnie z podstawowym założeniem mechaniki kwantowej, zbiór stanów  $d$ -wymiarowego układu kwantowego  $\mathcal{S}_+(\mathbb{C}^d)$  to zbiór półdodatnio określonych macierzy hermitowskich o śladzie równym jeden. Jest to zbiór bazowy stożka  $\mathcal{B}_+(\mathbb{C}^d)$  macierzy półdodatnio określonych powstały z przecięcia tego stożka warstwą afiniczną macierzy o śladzie równym jeden. Cięcie to odpowiada unormowaniu sumy prawdopodobieństw wyników pomiaru obserwabli do jedynki.

Za domyślną normę w przestrzeni macierzy hermitowskich rozumiemy normę HS indukowaną przez iloczyn skalarny w przestrzeni macierzy hermitowskich. Norma ta jest niezmiennicza ze względu na działanie grupy unitarnej:  $\rho \mapsto U^\dagger \rho U$ , jest więc stała na orbitach tego działania. Pozwala to zdefiniować normę HS przez wartości własne macierzy:

**Fakt 2.16.** *Norma HS macierzy hermitowskiej jest równa pierwiastkowi z sumy kwadratów jego wartości własnych:*

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda^2}. \quad (2.6)$$

Wiele z własności geometrycznych zbioru stanów wyraża się w języku rozkładu spektralnego, ponieważ działanie grupy unitarnej:  $\rho \rightarrow U^\dagger \rho U$  nie zmienia dodatniości stanu.

Wzór (2.6) pozwala na łatwe wyprowadzenie nierówności zachodzącej pomiędzy normą  $HS$ , a drugą ważną normą w przestrzeni macierzy - normą  $sup$ , która dla macierzy hermitowskich jest równa maksymalnej wartości własnej.

**Wniosek 2.17.** *Norma  $HS$  macierzy jest większa lub równa od jej normy  $sup$ . Dla dowolnej macierzy hermitowskiej  $A$  zachodzi zatem oszacowanie:*

$$|\langle \Psi | A | \Psi \rangle| \leq \|A\|_{sup} \|\Psi\|^2 \leq \|A\| \|\Psi\|^2.$$

Macierz hermitowski jest półdodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej wartości własne są nieujemne. Można w prosty sposób scharakteryzować brzeg tego zbioru:

**Fakt 2.18.** *Brzeg zbioru macierzy półdodatnio określonych tworzą macierze, które posiadają przynajmniej jedną wartość własną równą 0.*

**Dowód:** Weźmy dowolny stan kwantowy  $\rho$ , którego wszystkie wartości własne są większe od zera. Niech najmniejsza z nich będzie równa  $\lambda_{min}$ . Rozważmy teraz stan  $\rho + \eta$ , gdzie  $\eta$  jest dowolną bezśladową macierzą hermitowską o normie mniejszej równej  $\lambda_{min}$ . Dla stanu tego zachodzi:

$$\langle \Psi | \rho + \eta | \Psi \rangle \geq \lambda_{min} \|\Psi\|^2 - \langle \Psi | \eta | \Psi \rangle \geq 0,$$

czyli jest on półdodatnio określony. Bezśladowe macierze  $\eta$  tworzą zbiór możliwych przesunięć w warstwie macierzy o śladzie równym 1. Oznacza to, że kula  $B(\rho, \lambda_{min})$  zawiera tylko macierze dodatnio określone, czyli stan  $\rho$  leży we wnętrzu zbioru stanów.  $\square$

Co więcej, kula  $B(\rho, \lambda_{min})$  posiada punkty wspólne z brzegiem. Punktami tymi są macierze postaci  $\lambda_{min} |\Psi_{min}\rangle \langle \Psi_{min}|$ , gdzie  $\Psi_{min}$  jest wektorem własnym przy wartości własnej  $\lambda_{min}$ . Oznacza to, że odległość stanu od brzegu zbioru stanów jest równa jego minimalnej wartości własnej.

Brzeg zbioru stanów budują zatem macierze półdodatnio określone o rzędzie mniejszym od maksymalnego. Spełniają one równanie:

$$\det \rho = 0.$$

Wyznacznik jest wielomianem  $n$ -tego stopnia w wyrazach macierzy gęstości  $\rho$ . Brzeg zbioru stanów jest zatem podzbiorem rozmaitości algebraicznej generowanej przez ten wielomian. Rozmaitość ta ma wiele samoprzecięć. Spójne obszary jej punktów regularnych tworzą zbiory macierzy hermitowskich o tej samej sygnaturze i rzędzie o jeden mniejszym od maksymalnego. Obszary te łączą się ze sobą w punktach osobliwych tej rozmaitości. Są nimi macierze o więcej niż jednej wartości własnej zerowej. Nas dalej interesować będzie jedna składowa spójności punktów regularnych tej rozmaitości, zawierająca macierze półdodatnio określone. Ona wraz ze swoim domknięciem, do którego należą macierze półdodatnio określone o rzędzie mniejszym od  $d - 1$ , tworzy brzeg zbioru  $\mathcal{S}_+(\mathbb{C}^d)$ .

**Stany czyste.** Zbiór wypukły  $A$  jest jednoznacznie wyznaczany przez zbiór swoich punktów osobliwych  $\text{ex}(A)$ . Dla zbioru  $\mathcal{S}_+(\mathbb{C}^d)$  jest to zbiór projektorów na wektory stanu. Zbiorem tym jest  $(d-1)$ -wymiarowa zespolona przestrzeń rzutowa:

**Definicja 2.19** (Zespolona przestrzeń rzutowa). *Zbiór jednowymiarowych podprzestrzeni  $\mathbb{C}^{d+1}$  nazywamy  $d$ -wymiarową zespoloną przestrzenią rzutową, którą oznaczamy jako  $\mathbb{C}P^d$ . Dwa punkty w  $\mathbb{C}^{d+1} \setminus \{0\}$  reprezentują ten sam punkt  $\mathbb{C}P^d$ , jeżeli różnią się o zespolony skalar:*

$$\mathbb{C}P^d = \mathbb{C}^{d+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}$$

(dzielimy  $\mathbb{C}^{d+1} \setminus \{0\}$  przez relację różnienia się o zespolony skalar). Analogicznie, dwa punkty sfery  $2d+1$  wymiarowej w  $\mathbb{C}^{d+1}$  reprezentują ten sam punkt  $\mathbb{C}P^d$ , jeżeli różnią się czynnikiem fazowym:  $\mathbb{C}P^d = S^{2d+1}/S^1$ .

Jednowymiarowa (nad  $\mathbb{C}$ ) przestrzeń rzutowa  $S^3/S^1$  jest sferą  $S^2$ . Rzutowanie polega na pozbyciu się fazy wektora poprzez rozważanie zamiast zbioru unormowanych wektorów zbioru jednowymiarowych projektorów. Rzutowanie  $S^3 \xrightarrow{S^1} S^2$  przypisujące unormowanemu wektorowi projektor na niego nazywa się *rozwałóknieniem Hopfa* [68], [69]. Jego bazą jest sfera  $S^2$  nazywana sferą Blocha.

Norma  $HS$  projektora na jednowymiarową podprzestrzeń jest równa 1. Jego ślad jest również równy 1. Oznacza to, że  $(d-1)$ -wymiarowa zespolona przestrzeń rzutowa jest podzbiorem przecięcia sfery jednostkowej w przestrzeni macierzy hermitowskich i warstwy afinicznej macierzy o rzędzie 1 w tej przestrzeni. Przecięcie to oznaczać będziemy przez  $S_{HS}$

Norma  $HS$  dowolnej kombinacji wypukłej różnych projektorów będzie mniejsza lub równa 1. Zbiór  $S_{HS}$  jest więc  $d^2-2$  wymiarową sferą, w którą wpisany jest zbiór  $\mathcal{S}_+(\mathbb{C}^d)$  stanów kwantowych  $d$ -poziomowego układu kwantowego. Zbiorem punktów styczności jest  $\mathbb{C}P^{d-1}$ . Jak przekonamy się w następnych rozdziałach, wszystkie interesujące nas zbiory będą podzbiarami  $\text{conv}(S_{HS}(\mathbb{C}^d))$ , albo stożka, którego zbiór ten jest zbiorem bazowym.

Opis własności zbioru stanów mieszanych układu dwupoziomowego zaczniemy od przypadków szczególnych - zbiorów stanów układów 2 i 3 poziomowego.

**Zbiór stanów qubitów.** Zbiór stanów czystych qubitów jest jednowymiarową zespoloną przestrzenią rzutową. Jak wspomnieliśmy w poprzednim paragrafie, jest to sfera  $S^2$  powstała z podzielenia sfery  $S^3$  przez relację różnienia się o czynnik fazowy. Utożsamienia tego dokonujemy przechodząc do zbioru jednowymiarowych projektorów

Dowolny projektor rzutujący na jednowymiarową podprzestrzeń przestrzeni  $\mathbb{C}^2$  jest postaci:

$$|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \beta\alpha^* & |\beta|^2 \end{bmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Na diagonalu mamy dwie liczby dodatnie sumujące się do 1. Sparametryzujemy je więc jedną liczbą rzeczywistą  $z$ :

$$|\alpha|^2 = \frac{1+z}{2}, \quad |\beta|^2 = \frac{1-z}{2}$$

Oprócz modułów współrzędnych wektora, na który rzutuje projektor, do zdefiniowania go potrzebna jest jeszcze informacja o względnej fazie liczb  $\alpha$  i  $\beta$ . Zapiszmy liczbę  $\alpha\beta^*$  jako  $\frac{x+iy}{2}$ . W takiej parametryzacji macierz projektora wygląda następująco:

$$|\Psi\rangle\langle\Psi| = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+z & x+iy \\ x-iy & 1-z \end{bmatrix}$$

Liczby  $x, y, z$  związane są warunkiem:

$$|x+iy|^2 = x^2 + y^2 = 1 - z^2,$$

czyli zbiór projektorów na jednowymiarowe podprzestrzenie  $\mathbb{C}^2$  (przestrzeń rzutowa  $\mathbb{C}P^1$ ) jest sferą. Nazywa się ją *sferą Blocha*. Ponieważ dowolna macierz hermitowska o rzędzie 2 jest kombinacją wypukłą projektorów na jednowymiarowe podprzestrzenie, w tej reprezentacji są one punktami we wnętrzu kuli. Kulę stanów kwantowych qubitów nazywa się kulą Blocha.

**Interpretacja geometryczna rozkładu spektralnego.** Dowolny punkt  $\rho$  we wnętrzu kuli Blocha można przedstawić na wiele sposobów jako kombinację wypukłą dwóch projektorów. W tym celu prowadzimy przez punkt  $\rho$  dowolną prostą, a jej punkty przecięcia z brzegiem kuli będą szukaną parą projektorów. Wśród nieskończonej liczby takich rozkładów wyróżnioną rolę pełni rozkład (jedyny dla punktów różnych od środka kuli), dla którego prosta go definiująca przechodzi przez środek kuli. Łączy ona punkty antypodyczne na sferze Blocha. Antypodyczne projektory rzutują na wektory prostopadłe do siebie. Otrzymany rozkład jest rozkładem spektralnym stanu  $\rho$ .

Odległość od środka kuli Blocha determinuje typ spektralny macierzy gęstości. Każda sfera współśrodkowa ze sferą Blocha zawarta w kuli Blocha jest orbitą działania grupy unitarnej. Orbita stanu maksymalnie mieszanego (środek kuli Blocha) jest jednopunktowa.

Dla ogólnego ciała wypukłego w przestrzeni trójwymiarowej twierdzenie Caratheodory'ego mówi, że dowolny jego punkt można reprezentować jako kombinację wypukłą najwyżej czterech punktów ekstremalnych. Dla kuli wszystkie punkty brzegu są punktami ekstremalnymi, więc dowolny punkt kuli ma rząd wypukłości co najwyżej 2 i ograniczenie wynikające z twierdzenia Caratheodory'ego nie jest osiągalne. Podobnie dla  $d$ -wymiarowego układu kwantowego, rząd wypukłości dowolnego stanu nie jest większy od  $d$ , ponieważ za definiującą go kombinację wypukłą można wziąć rozkład spektralny, mimo że twierdzenie Caratheodory'ego ogranicza go z góry przez  $d^2$ .

**Zbiór stanów qutritu.** Qutritem nazywamy trójpoziomowy układ kwantowy.

Dla qubitów przedstawiliśmy macierz gęstości jako iloczyn unormowanej identyfikacji i pewnej kombinacji liniowej hermitowskich macierzy bezśladowych (macierzy Pauliego), co gwarantowało spełnienie warunku unormowania śladu. Współczynniki kombinacji tworzyły wektor Blocha, na który nałożony był tylko warunek dodatniości.

Teraz chcielibyśmy postąpić tak samo. Bazą ortonormalną hermitowskich macierzy bezśladowych, o własnościach podobnych do własności bazy macierzy Pauliego, są macierze Gell-Manna [70], [71]. Współrzędne rozkładu stanu w bazie tych macierzy tworzą

wektor, który musi spełniać pewne warunki by macierz gęstości była półdefinitnie określona. Warunki te nie są już tak proste jak jeden warunek dla qubitu. Brzeg zbioru stanów nie jest już sferą. Przyjrzyjmy się dalej strukturze brzegu zbioru  $\mathcal{S}_+(\mathbb{C}^3)$ .

W podrozdziale 2.4 scharakteryzowaliśmy zbiór ścian stożka macierzy półdefinitnie określonych, udowadniając bijekcję z kratą przestrzeni Hilberta układu. Ścianą jest zbiór macierzy gęstości o tym samym obrazie, a ścianą komplementarną do niej jest ściana macierzy gęstości o ortogonalnym obrazie. W wymiarze 3 dowolna para ścian komplementarnych jest parą tworzoną przez promień ekstremalny generowany przez jednowymiarową podprzestrzeń napinaną przez projektor rzutujący na wektor  $\Psi$  i ścianę macierzy gęstości, których obrazem jest dwuwymiarowa podprzestrzeń  $\{\Psi\}^\perp$ <sup>10</sup>.

Przecinając stożek  $\mathcal{B}_+(\mathbb{C}^3)$  warstwą macierzy o jednostkowym śladzie, pary ścian komplementarnych stożka przejdą na odpowiadające im pary ścian komplementarnych jego zbioru bazowego  $\mathcal{S}_+(\mathbb{C}^3)$ . Parę taką tworzy punkt ekstremalny - projektor na wektor  $\Psi$  oraz kula Blocha macierzy gęstości o obrazie  $\{\Psi\}^\perp$ .

Geometrycznie patrząc, ściana komplementarna do punktu ekstremalnego zbioru  $\mathcal{S}_+(\mathbb{C}^3)$  jest przecięciem tego zbioru z brzegiem półprzestrzeni polarnej do tego punktu ekstremalnego. Idąc od projektora na wektor  $\Psi$  (dla wygody tak obrócimy bazę, by  $\Psi = [1, 0, 0]^T$ ) po prostej przechodzącej przez stan maksymalnie zmieszany, osiągamy go przechodząc odcinek długości

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\|_{HS} = \left\| \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\|_{HS} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

mijamy go i pokonując odległość

$$\left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\|_{HS} = \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \right\|_{HS} = \sqrt{\frac{1}{6}},$$

docieramy do brzegu zbioru  $\mathcal{S}_+(\mathbb{C}^3)$  trafiając w środek kuli Blocha macierzy o obrazie  $\{\Psi\}^\perp$ . W otoczeniu punktu przecięcia brzeg zbioru jest iloczynem kartezjańskim  $\mathbb{C}P^2 \times \mathcal{S}_+(\mathbb{C}^2)$ . Omówioną sytuację obrazuje w ogólnym wymiarze rysunek 2.8.

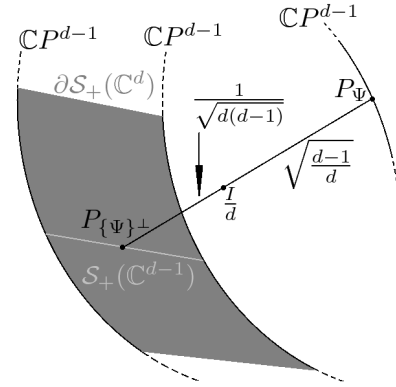
Wiele innych ciekawych obserwacji na temat zbioru stanów układu trójpoziomowego, jak również dwupoziomowego, znajdziemy w pracy [67].

**Struktura brzegu zbioru  $\mathcal{S}_+(\mathbb{C}^d)$ .** Stan  $d$ -wymiarowego układu kwantowego przedstawiamy w bazie uogólnionych macierzy Gell-Manna [71]. Zbiór wektorów rozkładu jest podzbiorem kuli  $\text{conv}(S_{HS}(\mathbb{C}^d))$  i styka się z jej brzegiem w zbiorze  $d$ -wymiarowych stanów czystych.

<sup>10</sup>możliwa jest jeszcze jedna para złożona ze ściany minimalnej  $\{0\}$  i ściany maksymalnej równej całemu zbiorowi  $\mathcal{S}_+(\mathbb{C}^3)$

By opisać strukturę brzegu tego zbioru powtórzmy konstrukcję, którą zastosowaliśmy w opisie brzegu zbioru  $\mathcal{S}_+(\mathbb{C}^d)$ . Wychodząc z punktu ekstremalnego - projektora na pewien wektor  $\Psi$ , poruszamy się w kierunku wnętrza zbioru stanów po prostej przechodzącej przez stan maksymalnie mieszany  $I/d$  i osiągamy go przechodząc odcinek  $\sqrt{(d-1)/d}$ . Mijamy stan maksymalnie mieszany i przechodząc odcinek długości  $\sqrt{1/d(d-1)}$  osiągamy brzeg stanu w unormowanym projektorze na podprzestrzeń  $\{\Psi\}^\perp$ , będącym środkiem ściany  $\mathcal{S}_+(\{\Psi\}^\perp)$  tworzonej przez macierze gęstości o obrazie  $\{\Psi\}^\perp$ . Zbiorem punktów regularnych brzegu zbioru  $\mathcal{S}_+(\mathbb{C}^d)$  jest iloczyn kartezjański  $\mathbb{C}P^{d-1} \times \mathcal{S}_+(\mathbb{C}^{d-1})$ . Domykamy go dodając zbiór punktów osobliwych brzegu, którym jest  $\mathbb{C}P^d$ .

Bardziej szczegółowy opis przedstawionych faktów można odnaleźć w pracach [72], [73]. Również prace [74], [75] przedstawiają szczegółowiej powyższe zagadnienia przy dyskusji geometrii zbioru stanów mieszanych układu  $d$ -poziomowego w języku rozmaitości wyposażonych w struktury metryczne i symplektyczne.



Rysunek 2.8: Struktura brzegu zbioru  $\mathcal{S}_+(\mathbb{C}^d)$ . Objaśnienia w tekście.

# Rozdział 3

## Kryteria separowalności

Jak zostało pokazane w poprzednim rozdziale, kluczowa z punktu widzenia zastosowań jest umiejętność rozstrzygnięcia, czy dany stan jest splątany, czy jeszcze lepiej - mierzenia splątania stanu za pomocą procedury doświadczalnej. W ten sposób dowiemy się, na ile przydatny do protokołów kwantowej informacji jest posiadany stan kwantowy rozseparowanych przestrzennie podukładów. Niestety, na obecnym etapie wiedzy nie jesteśmy w stanie rozstrzygnąć o separowalności stanu, nawet mając go zapisanego jako macierz gęstości o znanych elementach macierzowych. Mamy pewien zbiór kryteriów, które dla większości<sup>1</sup> stanów okazują się skuteczne. Niestety, zbiór tych kryteriów nie jest wystarczający do pełnej charakteryzacji zbioru stanów splątanych zadanego złożonego układu kwantowego. Niniejszy rozdział prezentuje najważniejsze kryteria separowalności.

### 3.1 Separowalność, $k$ -separowalność, podstawowe pojęcia i definicje

Wektory w iloczynie tensorowym dwóch skończone wymiarowych przestrzeni Hilberta  $\mathbb{C}^{d_1}$  i  $\mathbb{C}^{d_2}$  możemy utożsamiać z macierzami rozmiaru  $d_1 \times d_2$  za pomocą izomorfizmu:

$$\mathfrak{A} : \mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2} \rightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(d_1 \times d_2) \quad (3.1)$$

zadawanego przez bazy obu przestrzeni. Dla ustalonych baz izomorfizm ten definiuje wzór:

$$[\mathfrak{A}(\Psi)]_{ij} = \langle \Psi | i \otimes j \rangle \quad (3.2)$$

**Definicja 3.1** (Macierz współrzędnych wektora z przestrzeni iloczynu tensorowego). *Macierz prostokątną  $\mathfrak{A}(\Psi) \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(d_1 \times d_2)$  nazywać będziemy macierzą współrzędnych wektora  $\Psi$ .*

**Definicja 3.2** (Rząd Schmidta wektora). *Rzędem Schmidta wektora  $\Psi \in \mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$  nazywamy rząd macierzy współrzędnych tego wektora.*

*Wektor o rzędzie Schmidta równym  $k$  nazywać będziemy również wektorem  $k$ -separowalnym.*

*Wektory 1-separowalne nazywamy krótko separowalnymi lub produktowymi.*

---

<sup>1</sup>w sensie miary Lebesgue'a w przestrzeni  $\mathbb{R}^{d_1 d_2 - 1}$ , w której zanurzony jest zbiór stanów mieszanych



Zakładamy od teraz, że  $d_1 \leq d_2$  (Zawsze można to osiągnąć przenumerowując podukłady).

W przestrzeni  $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$  mamy wstępujący ciąg długości  $d_1$  domknięć orbit działania grupy  $GL(d_1) \times GL(d_2)$ :

$$\mathcal{S}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{S}_{d_1} = \mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}.$$

Elementami zbioru  $\mathcal{S}_k$  są wektory o rzędzie Schmidta mniejszym lub równym  $k$ .

Zdefiniujemy odwzorowanie  $\mathfrak{P} : \mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2} \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$  określone wzorem:

$$|\Psi\rangle \rightarrow \frac{|\Psi\rangle\langle\Psi|}{\langle\Psi|\Psi\rangle}.$$

przypisujące wektorowi  $\Psi \in \mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$  projektor na jednowymiarową podprzestrzeń napiętą przez ten wektor.

Z jego pomocą otrzymujemy ciąg wstępujących podzbiorów zbioru projektorów na jednowymiarowe podprzestrzenie:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{S}_1 & \subsetneq & \dots & \subsetneq & \mathcal{S}_{d_1} & = & \mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2} \\ \downarrow \mathfrak{P} & & & & \downarrow \mathfrak{P} & & \downarrow \mathfrak{P} \\ \mathbb{C}P^{d_1-1} \times \mathbb{C}P^{d_2-1} & \cong & \mathfrak{P}(\mathcal{S}_1) & \subsetneq & \dots & \subsetneq & \mathfrak{P}(\mathcal{S}_{d_1}) = \mathbb{C}P^{d_1 \times d_2} \end{array}$$

Izomorfizm w powyższym ciągu ustala zanurzenie Segre'a <sup>2</sup>

**Definicja 3.3** ( $k$ -separowalność). Stan  $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$  nazywamy  $k$ -separowalnym, jeżeli:

$$\rho \in \text{conv}(\mathfrak{P}(\mathcal{S}_k))$$

- Stany 1-separowalne nazywamy krótko separowalnymi
- Stany  $k$ -separowalne nazywają się również stanami rzędu Schmidta  $k$  [77]
- Stany które nie są  $k$ -separowalne (ich rząd Schmidta jest większy od  $k$ ), nazywamy  $k$ -splątany. W szczególności stany, które nie są separowalne, są splątane.

Z fizycznego punktu widzenia, najważniejszą klasą stanów jest klasa stanów separowalnych. Rozszerzamy tą definicję na stany mieszane definiując za Wernerem [37], że stan mieszany jest separowalny, gdy jest statystyczną mieszaniną stanów czystych separowalnych. Koncepcja stanów o rzędzie Schmidta  $k$  [77] w sposób naturalny uogólnia tę definicję.

Jeżeli zrezygnujemy z warunku unormowania śladu, dostaniemy stożek właściwy nieunormowanych stanów (macierzy półdefinitnie określonych) wraz ze wstępującym podzbiorem stożków właściwych nieunormowanych stanów  $k$ -separowalnych.

<sup>2</sup>Zanurzenie Segre'a jest kanonicznym zanurzeniem iloczynu kartezjańskiego dwóch przestrzeni rzutowych  $\mathbb{C}P^n$  i  $\mathbb{C}P^m$  w przestrzeń rzutową  $\mathbb{C}P^{(n+1)(m+1)-1}$ . Patrz [76].

## 3.2 Świadcowie $k$ -splątania

Mieszane stany  $k$ -separowalne definiujemy jako elementy uwypuklenia zbioru  $\mathfrak{P}(\mathcal{S}_k)$  projektorów na stany czyste  $k$ -separowalne. Zbiór mieszanych stanów separowalnych jest więc zbiorem wypukłym. Ponieważ jego zbiór punktów ekstremalnych jest domknięty, on sam także jest domknięty.

Weźmy teraz singleton pewnego stanu mieszanego, który jest  $k$ -splątany. Jest on również zbiorem domkniętym i wypukłym, rozłącznym ze zbiorem stanów  $k$ -separowalnych.

Gdy mamy dwa zbiory domknięte, wypukłe i niepuste, twierdzenie Banacha o oddzieleniu gwarantuje istnienie funkcjonału liniowego  $f$  określonego na przestrzeni macierzy hermitowskich rozdzielającego oba zbiory, tzn. przyjmującego wartości większe od pewnej wartości  $\alpha$  na jednym ze zbiorów, i mniejsze od  $\alpha$  na drugim. Ponieważ w zbiorze macierzy gęstości istnieje funkcjonał liniowy  $\text{Tr}$  (śląd) przyjmujący zawsze wartość jeden, można zawsze poprzez podstawienie  $f \rightarrow f - \alpha \text{Tr}$  uczynić  $\alpha = 0$ .

Funkcjonał, przyjmujący wartości dodatnie dla wszystkich stanów  $k$ -separowalnych i wartość ujemną dla pewnego stanu splątanego, nazywamy świadkiem  $k$ -splątania. Funkcjonał jest liniowy, więc dodatniość na zbiorze  $\text{conv}(\mathfrak{P}(\mathcal{S}_k))$  jest równoważna dodatniości na zbiorze  $\mathfrak{P}(\mathcal{S}_k)$ . Prowadzi to do poniższej definicji:

**Definicja 3.4.** *Obserwabłą  $W$  nazwiemy świadkiem  $k$ -splątania ( $k$ -Schmidt witness), jeżeli:*

- *Nie jest półdodatnio określona*
- *Jej wartość oczekiwana dla wszystkich wektorów  $k$ -separowalnych jest nieujemna.*

*Świadców 1-splątania nazywamy po prostu świadkami splątania.*

Zbiór świadków  $k$ -splątania o dziedzinie  $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$  (wraz z macierzami dodatnimi) tworzy stożek właściwy. Oznaczamy go jako  $\mathcal{W}_k(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$ . W myśl definicji 2.1 jest on stożkiem dualnym do stożka nieunormowanych stanów  $k$ -separowalnych. Na mocy pierwszej własności dualności 2.9, stożki te tworzą zstępujący ciąg względem  $k$ , którego wyrazy dla  $k \geq d_1$  są zbiorami pustymi.

Dla optymalizacji procesu wykrywania splątania, bardzo dobrze byłoby znać strukturę ścian stożków świadków  $k$ -splątania i nieunormowanych stanów  $k$ -separowalnych. Niestety wiemy o niej jedynie tyle, że stożek  $\mathcal{W}_k$  nie jest wielościanowy [80], a kratę jego ścian znamy jedynie dla wymiarów podukładów  $(2, 2)$  [81].

Stany  $k$ -splątane, na których świadek  $k$ -splątania przyjmuje wartości ujemne nazywamy stanami wykrywanymi przez świadka.

Zauważmy, że jeden świadek  $k$ -splątania może wykrywać  $k$ -splątanie wielu stanów, jeden stan  $k$ -splątany może być wykrywany przez wielu świadków.

Świadek  $\lambda W$  dla dowolnego  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  wykrywa te same stany co świadek  $W$ . Dlatego o świadku należy myśleć jako o półprostej w zbiorze obserwabli hermitowskich składającej się z punktów różniących się od siebie o dodatni skalar. Podobnie można zrezygnować z normowania stanów i patrzeć na nie w ten sam sposób (co dla wygody często będziemy czynić w dalszej części pracy), jednak w przypadku stanów normowanie śladu do

jedności, wybierając reprezentanta ma konkretne znaczenie fizyczne - normujemy prawdopodobieństwo do jedynki. W przypadku świadka, który jest obserwabłą, żaden taki wyróżniony reprezentant nie istnieje.

### 3.3 Optymalność świadków $k$ -splątania

Dla świadka  $k$ -splątania  $W$  definiujemy zbiór  $\mathcal{D}(W)$  stanów przez niego wykrywanych (na których świadek ma wartość ujemną). Świadka  $W_1$  nazwiemy *doskonalszym* (*finer*) od świadka  $W_2$ , jeżeli wykrywa on więcej stanów, czyli jeżeli  $\mathcal{D}(W_1) \supset \mathcal{D}(W_2)$ . Bycie doskonalszym jest relacją częściowego porządku w zbiorze świadków. Oznaczać ją będziemy przez  $\geq_f$ .

**Twierdzenie 3.5.**  $W_1 \geq_f W_2 \iff \exists \lambda : \lambda W_1 \leq W_2$  <sup>3</sup>.

**Dowód:** " $\Leftarrow$ ": Załóżmy, że  $\lambda W_1 \leq W_2$ . Oznacza to, że  $\lambda W_1 = W_2 - A$  dla pewnej półdodatnio określonej obserwabli  $A$ . Oznacza to, że jeżeli tylko dla pewnego wektora  $\phi$  zachodzi nierówność  $\langle \phi | W_2 | \phi \rangle < 0$ , to zachodzi również  $\langle \phi | W_1 | \phi \rangle < 0$ , czyli  $D_{W_2} \subset D_{W_1}$ , a więc  $W_1 \geq_f W_2$ .

" $\Rightarrow$ ": W drugą stronę, załóżmy że  $W_1 \geq_f W_2$ , czyli że  $\mathcal{D}(W_1) \supset \mathcal{D}(W_2)$ . Udowodnimy, że macierz  $P = \lambda W_2 - W_1$  jest półdodatnio określona, gdzie parametr

$$\lambda = \inf_{\rho \in \mathcal{D}(W_2)} \left| \frac{\text{Tr}(W_1 \rho)}{\text{Tr}(W_2 \rho)} \right|. \quad (3.3)$$

Pozostaje zatem tylko wykazać, że dla dowolnego półdodatnio określonego  $\rho$  zachodzi

$$\lambda \text{Tr}(\rho W_2) \geq \text{Tr}(\rho W_1) \quad (3.4)$$

Dowód dodatniości macierzy  $P$  przeprowadzimy w trzech krokach:

1.  $\text{Tr}(\rho W_2) = 0 \Rightarrow \text{Tr}(\rho W_1) \leq 0$ .

Założmy że dla pewnego  $\rho$  mamy  $\text{Tr}(\rho W_2) = 0 \wedge \text{Tr}(\rho W_1) > 0$ . Istnieje wtedy taki  $\epsilon$  że dla wszystkich stanów  $\rho' \in B(\rho, \epsilon) \cap \mathcal{B}_+(\mathbb{C}^d)$   $\text{Tr}(\rho' W_1) > 0$ , ale kula taka zawiera stany w których wartość średnia  $W_2$  jest ujemna, co przeczyłoby relacji  $W_1 \geq_f W_2$ .

2.  $\text{Tr}(\rho W_2) < 0 \Rightarrow \text{Tr}(\rho W_1) \leq \text{Tr}(\rho W_2)$ .

Konstruujemy nieunormowaną macierz gęstości  $\rho_1 = \rho + \text{Tr}(\rho W_2) \tilde{I}$ , gdzie przez  $\tilde{I}$  oznaczymy dowolną macierz dodatnią przyjmującą wartość średnią 1 na macierzach  $W_1$  i  $W_2$ . Macierz  $\rho_1$  spełnia założenie pierwszego kroku, zatem zachodzi dla niej nierówność:  $\text{Tr}(\rho_1 W_1) - \text{Tr}(\rho_1 W_2) \leq 0$ , co dowodzi postulowanej nierówności.

Wiemy teraz, że funkcjonal  $\text{Tr}(W_1 \cdot)$  przyjmuje na zbiorze  $\mathcal{D}(W_2)$  wartość ujemną i że w definicji (3.3) można opuścić moduł. Zachodzi zatem:

$$\text{Tr}(\rho W_2) < 0 \Rightarrow \frac{\text{Tr}(W_1 \rho)}{\text{Tr}(W_2 \rho)} \geq \lambda \Rightarrow \text{Tr}(W_1 \rho) \leq \lambda \text{Tr}(W_2 \rho)$$

<sup>3</sup>Standardowy porządek w zbiorze form kwadratowych przestrzeni Hilberta jest zadawany przez stożek macierzy półdodatnio określonych:  $A \geq B \iff A - B \geq 0$ .

3.  $\text{Tr}(\rho W_2) > 0 \Rightarrow \lambda \text{Tr}(\rho W_2) \geq \text{Tr}(\rho W_1)$

Weźmy dowolny stan  $\rho_1 \in \mathcal{D}(W_2)$ . Zdefiniujmy nieunormowaną macierz gęstości  $\rho_2 = \text{Tr}(\rho W_2)\rho_1 - \text{Tr}(\rho_1 W_2)\rho$ . Zachodzi dla niej  $\text{Tr}(\rho_2 W_2) = 0$ , więc można zastosować do niej wynik kroku pierwszego. Otrzymujemy w wyniku  $\text{Tr}(\rho W_2)\text{Tr}(\rho_1 W_1) - \text{Tr}(\rho_1 W_2)\text{Tr}(\rho W_1) \leq 0$ . Dostajemy teraz nierówność:

$$\text{Tr}(\rho W_2)\text{Tr}(\rho_1 W_1) \leq \text{Tr}(\rho_1 W_2)\text{Tr}(\rho W_1)$$

Dzieląc obie strony przez ujemną liczbę  $\text{Tr}(\rho_1 W_2)\text{Tr}(\rho W_2)$ , dostajemy nierówność:

$$\frac{\text{Tr}(\rho_1 W_1)}{\text{Tr}(\rho_1 W_2)} \geq \frac{\text{Tr}(\rho W_1)}{\text{Tr}(\rho W_2)}$$

Nierówność powyższa zachodzi dla dowolnego  $\rho_1 \in \mathcal{D}(W_2)$ , dlatego zachodzi również dla infimum prawej strony po zbiorze  $\mathcal{D}(W_2)$ . Infimum to definiuje wielkość  $\lambda$ . Mnożąc obie strony tak otrzymanej nierówności przez  $\text{Tr}(\rho W_1)$  otrzymujemy tezę.

Pokazaliśmy w ten sposób, że niezależnie od znaku lewej strony nierówności (3.4) jest ona spełniona.  $\square$

Dowód drugiej części twierdzenia jest zmodyfikowaną wersją dowodu z [79].

**Definicja 3.6.** Świadek  $k$ -splątania nazywamy optymalnym, jeżeli nie istnieje świadek od niego doskonalszy.

Na mocy twierdzenia 3.5 możemy podać bardziej operacyjną definicję optymalności świadka:

**Wniosek 3.7.** Świadek jest optymalny wtedy i tylko wtedy, gdy odjęcie od niego dowolnej macierzy dodatniej wyprowadza poza zbiór świadków.

Przy stwierdzaniu optymalności świadka  $k$ -splątania  $W$ , kluczową rolę odgrywa zbiór wektorów  $k$ -separowalnych, na których wartość własna świadka  $W$  jest równa zero. Oznaczamy go jako  $\mathcal{P}^k(W)$ . Znając ten zbiór, można zawęzić zbiór macierzy dodatnich, które mogą być odjęte od świadka splątania, poprzez warunek na jądro takiej macierzy dodatniej  $P$ :

$$\ker P \supset \text{span}\mathcal{P}^k(W)$$

Jeżeli warunek ten nie zachodzi, to istnieje wektor  $k$ -separowalny  $\Psi$  w zbiorze  $\mathcal{P}^k(W)$ , na którym wartość średnia macierzy  $P$  jest większa od zera. Oznacza to, że obserwacja  $W - P$  nie jest świadkiem  $k$ -splątania, ponieważ istnieją stany  $k$ -separowalne, na których przyjmuje ona ujemną wartość średnią.

Widzimy, że im więcej liniowo niezależnych wektorów jest w zbiorze  $\mathcal{P}^k(W)$ , tym ostrzejsze warunki musi spełniać macierz dodatnia, którą możemy odjąć od  $W$  nie wychodząc poza zbiór świadków  $k$ -splątania. Najkorzystniejsza sytuacja ma miejsce, gdy zbiór  $\mathcal{P}^k(W)$  napina całą przestrzeń Hilberta układu. Wtedy odjęcie dowolnej macierzy dodatniej od świadka  $W$  wyprowadza poza zbiór świadków  $k$ -splątania i mamy pewność że świadek jest optymalny. Dostajemy tym samym następujący warunek:

**Twierdzenie 3.8** (Warunek wystarczający optymalności). *Jeżeli dla świadka  $k$ -splątania  $W$  zachodzi równość:  $\text{span}\mathcal{P}^k(W) = \mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$ , to świadek ten jest optymalny*

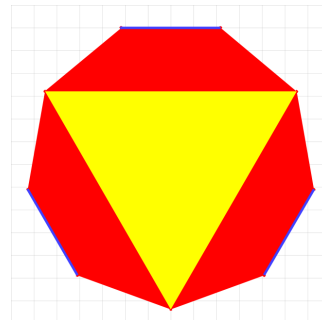
Charakteryzacja optymalności za pomocą zbioru  $\mathcal{P}^k(W)$  i powyższe twierdzenie pochodzą z pracy [79].

### Związek optymalności z ekstremalnością.

**Fakt 3.9.** *Jeżeli świadek jest punktem ekstremalnym zbioru  $\mathcal{W}_k(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$ , to jest on optymalny.*

**Dowód:** W istocie, jeżeli jest on punktem ekstremalnym tego zbioru, to nie można od niego odjąć żadnej macierzy półdefinitnie określonej na wektorach produktowych nie wychodząc poza ten zbiór, w szczególności zaś żadnej macierzy półdefinitnie określonej.  $\square$ .

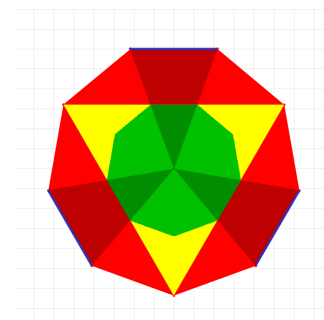
W drugą stronę inkluzja nie zachodzi. Obrazuje to rysunek 3.1, na którym zbiór świadków obrazuje czerwony dziewięciokąt, a zbiór stanów żółty trójkąt. Świadców optymalni reprezentowani są przez niebieskie punkty.



Rysunek 3.1: Relacja pomiędzy optymalnością a ekstremalnością

**Hipoteza o strukturalnej aproksymacji.** Przez strukturalną aproksymację unormowanego świadka splątania rozumiemy jego mieszaninę (kombinację wypukłą) z unormowaną identycznością [82], [83]. Zwiększając udział identyczności strukturalna aproksymacja świadka stanie się w pewnym momencie stanem (unormowana identyczność leży wewnątrz zbioru stanów). Hipoteza o strukturalnej aproksymacji [84] mówi, że jeżeli przy zwiększaniu udziału identyczności w strukturalnej aproksymacji świadka optymalnego staje się ona stanem, to jest ona stanem separowalnym.

Jeżeli pomyślimy o unormowanej identyczności jako o punktowym źródle światła, to z geometrycznego punktu widzenia hipoteza o strukturalnej aproksymacji oznacza, że świadkowie optymalni leżą w cieniu punktów styczności brzości zbioru stanów separowalnych ze zbiorem stanów. Obrazuje to rysunek 3.2. Podobnie jak na rysunku 3.1, czerwony dziewięciokąt oznacza zbiór unormowanych świadków, żółty trójkąt zbiór stanów, świadkowie optymalni zaznaczeni są na niebiesko, natomiast zielony dziewięciokąt oznacza zbiór stanów separowalnych. Hipoteza ta jest udowodniona dla wielu klas świadków splątania, dla których jesteśmy w stanie rozstrzygnąć o separowalności ich strukturalnych aproksymacji [84].



Rysunek 3.2: Geometryczne znaczenie hipotezy o strukturalnej aproksymacji

## 3.4 Ogólna teoria wykrywania i optymalności

Pojęcia i wyniki z dwóch poprzednich podrozdziałów można ująć w szerszym kontekście, zastępując stożek  $\mathcal{W}_k(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$  i stożek macierzy półdefinitnie określonych parą dowolnych stożków właściwych  $L \supset K$  w pewnej skończonej wymiarowej przestrzeni liniowej  $X$  nad  $\mathbb{R}$ . Do otrzymania wyników nie będziemy korzystać z izomorfizmu pomiędzy  $X$  i  $X^*$ , traktujemy więc, stożek i stożek do niego dualny jako elementy różnych przestrzeni.

Pozwoli to korzystać z tych wyników również w sytuacjach, gdy z jakichś względów na stożkach dokonuje się operacji, które nie są unitarne (nie zachowują iloczynu skalarnego w przestrzeni  $X$ ). Jedno z czego będziemy korzystać, to refleksywność  $X$ , która obowiązuje dla każdego skończonego wymiarowej przestrzeni liniowej.

Na początek zdefiniujemy relację wykrywania zachodzącą pomiędzy elementem  $w \in L \setminus K \subset X$  i elementem  $\rho \in K^* \setminus L^* \subset X^*$ .

**Definicja 3.10** (Wykrywanie elementu z  $K^* \setminus L^*$  przez element z  $L \setminus K$ ). *Mówimy, że element  $w \in L \setminus K$  wykrywa element  $\rho \in K^* \setminus L^*$ , jeżeli  $\rho(w) < 0$ . Dla elementu  $w \in L \setminus K$  przez  $\mathcal{D}_{L|K}(w)$  oznaczamy zbiór wszystkich stanów w  $K^* \setminus L^*$  wykrywanych przez  $w$ .*

Twierdzenie Banacha o oddzielaniu upewnia nas, że dla każdego elementu w  $K^* \setminus L^*$  istnieje element  $L \setminus K$ , który go wykrywa, oraz że zachodzi fakt dualny, tj. każdy element stożka  $K^* \setminus L^*$  wykrywa pewien element stożka  $L \setminus K$ .

**Dwa porządki w zbiorze  $L \setminus K$  i równoważność między nimi.** Pomiedzy elementami zbioru  $L \setminus K$  można wprowadzić relację *bycia doskonalszym*, która jest częściowym porządkiem w stożku  $L$ . Mówimy, że element  $w_1 \succcurlyeq_{L|K} w_2$  ( $w_1$  jest doskonalszy od  $w_2$ ), jeżeli  $\mathcal{D}_{L|K}(w_1) \supset \mathcal{D}_{L|K}(w_2)$ , czyli jeżeli element  $w_1$  wykrywa więcej elementów z  $K^* \setminus L^*$  niż element  $w_2$  (w sensie inkluzji zbiorów). Elementy maksymalne w sensie tego porządku będziemy nazywać *najlepiej wykrywającymi w  $L \setminus K$* .

Dla wygody przedłużymy ten porządek na cały zbiór  $L$ . Elementy  $K$  nie wykrywają wtedy żadnych elementów zbioru  $K^* \setminus L^*$ . Dla elementów  $k \in K$  zbiór  $\mathcal{D}_{L|K}(k)$  jest pusty i każdy element stożka  $L$  jest doskonalszy od elementu stożka  $K$ .

W zbiorze  $L$  definiujemy też drugą definicję porządku, którą zadaje stożek  $K$ <sup>4</sup> Zbiór elementów maksymalnych w sensie tego porządku oznaczać będziemy jako  $\text{opt}(L|K)$  i nazywać będziemy *elementami optymalnymi w  $L$  ze względu na  $K$* .

$$x \in \text{opt}(L|K) \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} \forall k \in K \forall l \in L \forall \alpha, \beta \geq 0 \quad x = \alpha k + \beta l \Rightarrow \alpha = 0.$$

Wprost z definicji wynika, że elementy zbioru  $K$  nie mogą być optymalne.

Możemy teraz sformułować ogólną wersję twierdzenia 3.5:

**Twierdzenie 3.11.**  $w_1 \succcurlyeq_{L|K} w_2 \Leftrightarrow \lambda w_2 - w_1 \in k$ .

**Dowód:** - Dodatek B

i wniosek z niego:

**Wniosek 3.12.** *Element  $w \in \text{opt}(L|K)$ , wtedy i tylko wtedy gdy jest on elementem najlepiej wykrywającym w  $L \setminus K$ .*

<sup>4</sup>Definicja porządku zadawanego przez stożek właściwy znajduje się na początku podrozdziału 2.2.

**Własności optymalności  $L|K$ .** Następnym krokiem będzie opisanie własności zbioru  $\text{opt}(L|K)$ .

**Fakt 3.13.** *Jeżeli element  $w \in \text{opt}(L|K)$ , to  $F_L(w) \subset \text{opt}(L|K)$ <sup>5</sup> (dowolny element zbioru  $\text{opt}(L|K)$  zawiera się w nim wraz z minimalną ścianą  $L$ , która go zawiera).*

**Dowód:** - Dodatek B

**Fakt 3.14.** *Ściana  $F \subset \text{opt}(L|K)$  wtedy i tylko wtedy gdy  $F \cap K = \emptyset$ .*

**Dowód:** - Dodatek B

Ponieważ stożek  $K$  jest właściwy, pozwala to udowodnić następujący:

**Fakt 3.15.** *Przekrój stożka  $K$  ze ścianą stożka  $L$  jest ścianą stożka  $K$ .*

**Dowód:** - Dodatek B

Trzy powyższe fakty pozwalają na charakteryzację zbioru  $\text{opt}(L|K)$ :

**Wniosek 3.16.** *Zbiór  $\text{opt}(L|K)$  jest sumą ścian stożka  $L$  nie zawierających ściany stożka  $K$ .*

Wniosek ten dobrze ilustruje rysunek 3.1. Ściany oznaczone kolorem niebieskim są ścianami punktów optymalnych. Jednocześnie są to jedyne ściany dziewięciokąta, które nie mają punktów wspólnych z żółtym trójkątem.

Również fakt 3.9 ustalający inkluzję pomiędzy zbiorem punktów ekstremalnych i optymalnych ma swój ogólny odpowiednik:

**Fakt 3.17.**  $\text{ex}(L) \setminus \text{ex}(K) \subset \text{opt}(L|K)$ .

**Dowód:** - Analogiczny jak dowód faktu 3.9.

Optymalność elementu  $w$  można w pełni scharakteryzować przez własność ściany komplementarnej do  $F_L(w)$ :

**Lemat 3.18.** *Element  $w$  jest optymalny, wtedy i tylko wtedy, gdy  $\Phi[F_L(w)] \cap \text{Int}K^* \neq \emptyset$ .*

**Dowód:** - Dodatek B

Korzystając z faktu, że

**Fakt 3.19.** *Ściana  $\Phi[F_L(w)]$  jest napinana przez półpromienie ekstremalne stożka  $L^*$  na których element  $w$  przyjmuje wartość 0. Zbiór tych półpromieni oznaczamy przez  $\mathcal{P}^L(w)$ ,*

**Dowód:** Dodatek B

można zapisać lemat 3.18 jako

**Wniosek 3.20.** *Element  $w$  jest optymalny, wtedy i tylko wtedy, gdy  $\text{conv}(\mathcal{P}^L(w)) \cap \text{Int}K^* \neq \emptyset$ .*

<sup>5</sup> $F_L(w)$  oznacza minimalną ścianę stożka  $L$  zawierającą element  $w$ . Patrz definicja 2.12

**Działanie teorii dla świadków  $k$ -splątania.** W przypadku, gdy zbiorem  $L \setminus K$  jest zbiór świadków  $k$ -splątania, zbiorem  $\mathcal{P}^L(W)$  dla świadka  $W$  jest zbiór jednowymiarowych projektorów rzutujących na wektory rzędu Schmidta  $k$ , na których świadek  $W$  się zeruje. W myśl wniosku 3.20, świadek  $W$  jest optymalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje kombinacja wypukła tych projektorów rzędu maksymalnego. To z kolei jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy wśród wektorów z  $\mathcal{P}^L(W)$  można wybrać bazę całej przestrzeni. Otrzymujemy w ten sposób warunek konieczny i wystarczający na optymalność, co jest wzmocnieniem twierdzenia 3.8, które mówi, że jest to warunek wystarczający.

### 3.5 Kryterium odwzorowań dodatnich

**Definicja 3.21.** *Zachowujące hermitowskość odwzorowanie  $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$  nazywamy dodatnim, jeżeli:  $\rho > 0 \Rightarrow \Phi(\rho) > 0$ .*

Zauważmy, że zarówno suma dwóch odwzorowań dodatnich, jak i iloczyn odwzorowania dodatniego przez dodatni skalar daje odwzorowanie dodatnie. Oznacza to, że odwzorowania dodatnie tworzą stożek wypukły. Można udowodnić więcej, mianowicie że jest to stożek właściwy.

Rozważmy odwzorowanie dodatnie  $\Phi : \mathcal{B}_+(\mathbb{C}^{d_1}) \rightarrow \mathcal{B}_+(\mathbb{C}^{d_2})$ . Podziałajmy teraz jego *amplifikację*  $I_{d_1} \otimes \Phi$  na dowolny stan czysty 1-separowalny  $|e_1 \otimes f_1\rangle\langle e_1 \otimes f_1| = |e_1\rangle\langle e_1| \otimes |f_1\rangle\langle f_1|$ . Otrzymamy w wyniku pewną macierz  $|e_1\rangle\langle e_1| \otimes \Phi(|f_1\rangle\langle f_1|)$ . Na mocy dodatniości  $\Phi$  jest to macierz dodatnia. Każdy mieszany stan 1-separowalny jest kombinacją wypukłą pewnej rodziny 1-separowalnych stanów czystych  $\{\sigma_i\}$ . Ponieważ kombinacja wypukła macierzy dodatnich jest dodatnia, mamy:

$$(I_{d_1} \otimes \Phi)\left(\sum_i \sigma_i\right) = \sum_i (I_{d_1} \otimes \Phi)\sigma_i \geq 0$$

Dostajemy w ten sposób:

**Fakt 3.22.** *Każdy stan 1-separowalny zachowuje dodatniość po podziałaniu na jeden z jego podukładów odwzorowaniem dodatnim.*

**Definicja 3.23.** *Zachowujące hermitowskość odwzorowanie  $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$  nazywamy  $k$ -dodatnim, jeżeli jego *amplifikacja*  $\text{Id}_{\mathbb{C}^k} \otimes \Phi : \mathcal{B}(\mathbb{C}^k \otimes \mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C}^k \otimes \mathcal{H}_B)$  jest odwzorowaniem dodatnim.*

Rozważmy projektor na wektor  $e_1 \otimes e_2 + f_1 \otimes f_2 \in \mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$  o rzędzie Schmidta 2:

$$|e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2\rangle\langle e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2|$$

Wektor ten należy do przestrzeni  $\text{span}\{e_1, e_2\} \otimes \mathbb{C}^{d_2} \cong \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{d_2}$ . Działając na rzutujący na niego projektor dowolnym odwzorowaniem dwudodatnim otrzymamy pewną macierz dodatnią. Znowu korzystając z liniowości i faktu że kombinacja liniowa macierzy dodatnich jest macierzą dodatnią, dostajemy:

**Fakt 3.24.** *Każdy stan 2-separowalny zachowuje dodatniość po podziałaniu na jeden z jego podukładów odwzorowaniem 2-dodatnim.*



Analogicznie dowodzimy dla wyższych  $k$ :

**Fakt 3.25.** *Każdy stan  $k$ -separowalny zachowuje dodatniość po podziałaniu na jeden z jego podukładów odwzorowaniem  $k$ -dodatnim.*

Każdy wektor w iloczynie tensorowym  $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$  ma rząd Schmidta mniejszy lub równy  $d_1$  (cały czas obowiązuje założenie, że  $d_1 \leq d_2$ ). Mamy zatem następujący:

**Fakt 3.26.** *Odwzorowania które są  $d_1$ -dodatnie działając na jeden z podukładów przestrzeni Hilberta  $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$  zachowują dodatniość każdego stanu na przestrzeni Hilberta  $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$ .*

Zdefiniujemy kolejną klasę odwzorowań działających pomiędzy algebraami macierzowymi:

**Definicja 3.27.** *Zachowujące hermitowskość odwzorowanie  $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$  nazywamy kompletnie dodatnim, jeżeli jest ono  $k$ -dodatnie dla każdego  $k \in \mathbb{N}$*

Pokazaliśmy, że  $d_1$ -dodatniość implikuje już kompletną dodatniość. Interesujące dla nas do wykrywania splątania są zatem tylko odwzorowania, które są  $k$ -dodatnie ( $k < d_1$ ), ale nie  $d_1$ -dodatnie. Odwzorowania takie pozwalają oddzielać od siebie stany o różnej separowalności. Jeżeli podziałamy takim odwzorowaniem na jeden z podukładów i nie otrzymamy w wyniku macierzy półdodatnio określonej, oznacza to, że stan nie jest  $k$ -separowalny.

Poniżej prezentujemy listę najważniejszych znanych odwzorowań dodatnich, które nie są kompletnie dodatnie:

**Transpozycja.** Najważniejszym odwzorowaniem dodatnim jest transpozycja:

$$\rho \rightarrow \rho^T$$

W oczywisty sposób jest ono dodatnie. To, że nie jest ono dwudodatnie pokazuje przykład:

Rozważmy  $\rho = |\phi_+\rangle\langle\phi_+|$  (projektor na wektor maksymalnie splątany) i podziałajmy na niego amplifikacją transpozycji:

$$(I \otimes T) \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Wartościami własnymi otrzymanej macierzy są:  $1/2$  (trzykrotnie zdegenerowana) oraz  $-1/2$ .

W przestrzeni stanów qubitu transpozycja działa jak odbicie sfery Blocha względem płaszczyzny  $XY$ . W wymiarach  $2 \times 2$  i  $2 \times 3$  jedyne odwzorowaniami dodatnimi, które nie są kompletnie dodatnie są odwzorowania rozkładalne <sup>6</sup> :

$$\rho \rightarrow \Phi_1(\rho) + \Phi_2(\rho^T),$$

<sup>6</sup>Rozkładalność będzie omówiona szczegółowo w podrozdziale 3.10

gdzie  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$  są odwzorowaniami kompletnie dodatnimi. Spośród wszystkich odwzorowań rozkładalnych, żadne nie wykrywa więcej niż transpozycja [85]. Jak pokażemy później, każdy stan splątany jest wykrywany przez pewne odwzorowanie dodatnie, które nie jest kompletnie dodatnie. Asher Peres, który odkrył kryterium częściowej transpozycji [86], założył, że jest ono warunkiem koniecznym i wystarczającym separowalności. Dopiero Horodeccy [85] doprecyzowali, że separowalność jest równoważna zachowaniu dodatniości pod działaniem na podukład wszystkich odwzorowań dodatnich działających pomiędzy przestrzeniami podukładów i że kryterium częściowej transpozycji jest warunkiem wystarczającym separowalności tylko w wymiarach  $2 \times 2$  i  $2 \times 3$ , natomiast w wyższych wymiarach kryterium dodatniości stanu po zadziałaniu częściowej transpozycji (PPT) jest tylko warunkiem koniecznym.

Transpozycja nie zmienia elementów diagonalnych macierzy, zachowuje więc ślad. Polega ona tylko na zamianie miejscami pozadiagonalnych elementów macierzy, co pozwala myśleć o niej jako o inwersji względem podprzestrzeni macierzy symetrycznych. Transpozycja jest więc izometrią dla normy  $HS$ . Analogiczne własności ma jej amplifikacja  $(I \otimes T)$ .

**Stany PPT** Stany zachowujące dodatniość po częściowej transpozycji nazywa się stanami PPT. Zbiór stanów PPT dla wymiarów podukładów  $2 \times 2$  i  $2 \times 3$  pokrywa się ze zbiorem stanów separowalnych. Dla wyższych wymiarów podukładów tak nie jest i do zbioru stanów PPT należą również stany splątane. Udowadnia się, że jeżeli stan splątany jest PPT, to jest on stanem ze splątaniem związanym [87]. Pomimo wielu starań, problem istnienia stanów o ujemnej częściowej transpozycji ze splątaniem związanym wciąż pozostaje otwarty [88], dlatego w tej pracy określenie stan PPT i stan ze splątaniem związanym traktować będziemy jako sformułowania równoważne.

**Odwzorowanie redukujące.** Dodatniość transpozycji jest oczywista. Innym odwzorowaniem, którego dodatniość jest łatwa do zauważenia jest odwzorowanie redukujące:

$$R(\rho) = \text{Tr}(\rho)I - \rho$$

By pokazać, że nie jest ono kompletnie dodatnie, zastosujemy je znowu do projektora na wektor maksymalnie splątany:

$$(I \otimes R) \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wartościami własnymi otrzymanej macierzy są:  $1/2$  (trzykrotnie zdegenerowana) oraz  $-1/2$ .

Na stany qubitu odwzorowanie  $R$  działa jak antypodyczność w sferze Blocha [57] i wyraża się jako  $R(\cdot) = \sigma_y T(\cdot) \sigma_y$  [89], dlatego w wymiarze  $2 \times 2$  dodatniość  $I \otimes R$  jest równoważna dodatniości  $I \otimes T$ . W wyższych wymiarach implikacja zachodzi tylko w jedną stronę i  $I \otimes T$  wykrywa więcej stanów niż  $I \otimes R$ .

Obcięcie odwzorowania  $R$  do warstwy macierzy o jednostkowym śladzie i unormowanie go prowadzi do odwzorowania

$$R|_{\mathcal{S}_+} = \frac{1}{d-1}(I - \rho)$$

(czynnik  $1/(d-1)$  pochodzi z normowania). Przeprowadza ono punkt ekstremalny  $\mathcal{S}_+(\mathbb{C}^d)$  w środek ściany do niego dualnej. Odbija ono zbiór stanów względem stanu maksymalnie mieszanego i skaluje względem stanu maksymalnie mieszanego o czynnik  $d-1$ . Odwzorowanie to jest kontrakcją w normie  $HS$  o stałą  $d-1$ .

**Odwzorowanie Choi.** Pierwszym przykładem odwzorowania, którego amplifikacja wykrywa stany nie wykrywane przez amplifikację transpozycji jest odwzorowanie Choi [90], [91]:

$$Ch : \mathcal{B}(\mathbb{C}^3) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C}^3)$$

zadane w bazie macierzy  $3 \times 3$ <sup>7</sup> wzorami:

$$\begin{aligned} Ch(e_{11}) &= e_{11} + e_{22} & Ch(e_{22}) &= e_{22} + e_{33} \\ Ch(e_{33}) &= e_{33} + e_{11} & Ch(e_{ij}) &= -e_{ij} \quad \text{gdy } i \neq j \end{aligned}$$

Żeby odwzorowanie Choi zachowywało ślad, należy je podzielić przez 2. Tak zmodyfikowane odwzorowanie jest kontrakcją w normie  $HS$ . By to pokazać, oznaczmy przez  $a_{11}, \dots, a_{33}$  wyrazy macierzy  $A$  i podziałajmy na nią unormowanym odwzorowaniem Choi, a następnie obliczmy normę  $HS$  wyniku:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2} Ch(A) \right\|_{HS}^2 &= \frac{(a_{11} + a_{33})^2}{4} + \frac{(a_{22} + a_{11})^2}{4} + \frac{(a_{33} + a_{11})^2}{4} + \frac{1}{4} \sum_{i \neq j} |a_{ij}|^2 \\ &\leq a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + \sum_{i \neq j} |a_{ij}|^2 = \|A\|_{HS}^2. \end{aligned}$$

Podobnie jak odwzorowanie redukujące w tym wymiarze, odwzorowanie Choi przeprowadza punkty ekstremalne  $\mathcal{S}_+(\mathbb{C}^3)$  w środku komplementarnych do nich kul Blocha.

Dowód dodatniości odwzorowania Choi znajduje się w pracy [90]. By udowodnić, że jego amplifikacja już nie jest dodatnia, rozważmy jej działanie na stan z dwuparametrowej rodziny:

$$\rho_{ab} = \frac{1}{3(1+a+b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & b & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & a & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

w której  $b \in (0, 1)$  natomiast  $a \geq 1/b$ . Po podziałaniu na stan  $\rho_{ab}$  odwzorowaniem  $I \otimes Ch$  dostajemy macierz:

<sup>7</sup>Kanoniczna baza macierzy składająca się z macierzy, które mają same zera z wyjątkiem jedynki na miejscu  $ij$ . Jest to baza ortonormalna w iloczynie HS

$$(I \otimes Ch)\rho_{ab} = \frac{1}{3(1+a+b)} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1+b & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b+a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & b+a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1+b & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b+a & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1+b \end{bmatrix},$$

która jak łatwo zauważyć nie jest dodatnia na wektorze maksymalnie splątany (ponieważ założyliśmy  $b < 1$ ). Sprawdzając dodatniość macierzy (3.6) po częściowej transpozycji dostajemy warunek:

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix} \geq 0,$$

którego spełnienie gwarantuje ograniczenie  $a \geq 1/b$ . Mamy zatem pierwszy przykład stanu, którego splątanie nie jest wykrywane przez częściową transpozycję. Pierwszy przykład stanu splątanego PPT wykrywanego przez odwzorowanie Choi pochodzi z pracy [92].

Udowodniono [93], [94], że odwzorowanie Choi generuje półpromień ekstremalny w stożku odwzorowań dodatnich. Istnieją uogólnienia odwzorowania Choi na całą klasę odwzorowań wykrywających stany niewykrywane przez transpozycję [95].

**Odwzorowanie Halla-Breuera.** Odwzorowanie Halla-Breuera [98], [97] buduje się wychodząc z odwzorowania redukującego. W działaniu na projektor  $P_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  odwzorowanie  $R$  daje projektor  $P_{\Psi^\perp}$  na dopełnienie ortogonalne  $\Psi$ . Hall i Breuer zauważyli, że odjęcie od odwzorowania redukującego  $R$  pewnego odwzorowania  $S$ , które przeprowadza projektor na dowolny wektor  $\phi$  na projektor na pewien wektor do niego prostopadły, zmniejszy tylko o jeden rząd projektora  $R(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$ , nie niszcząc jego dodatniości. Odwzorowanie  $S$  o takich własnościach wyraża się wzorem  $S(\sigma) = U^\dagger \sigma^T U$ , gdzie  $U$  jest antysymetrycznym operatorem unitarnym [98]. Odwzorowanie Halla-Breuera ma postać:

$$R_E(\rho) = (\text{Tr}\rho)I - \rho - U^\dagger \rho^T U, \quad (3.7)$$

Antysymetryczne operatory unitarne istnieją tylko w parzystowymiarowych przestrzeniach i tylko w takich przestrzeniach działa odwzorowanie Halla-Breuera.

Dla szczególnego wyboru antysymetrycznej operacji unitarnej  $U$  we wzorze 3.7 dostaniemy znane wcześniej odwzorowanie Robertsona [99], [100], [101] o którym wiadomo, że generuje półpromień ekstremalny stożka odwzorowań dodatnich [101]. Odwzorowanie Halla-Breuera jest uogólnione w [102].

Pozostałe znane odwzorowanie dodatnie prezentują prace [103], [104]. Dalecy jednak wciąż jesteśmy od ich pełnej klasyfikacji czy rozpoznania struktury ich zbioru (z wyjątkiem

wymiarów  $2 \times 2$  i  $2 \times 3$ , gdzie jedynymi odwzorowaniami są odwzorowania rozkładalne). Odwzorowania dodatnie tworzą pewną klasę tak zwanych *prezerwerów liniowych* [105] - odwzorowań liniowych przeprowadzających pewien podzbiór swojej dziedziny w odpowiadający mu podzbiór przeciwdziedziny. W tym przypadku odwzorowanymi zbiorami są algebry macierzowe, a przeprowadzanymi strukturami stożki macierzy półdodatnio określonych. Co ciekawe można zadać ogólniejsze pytanie pytając o charakteryzację zbioru odwzorowań pomiędzy algebraami macierzowymi zachowujących podzbiór macierzy o pewnej sygnaturze  $(p, q)$ . Dla wielu sygnatur takie klasy odwzorowań są jawnie scharakteryzowane. Niestety nie dotyczy to podzbioru macierzy dodatnich - ta konkretna sygnatura, tak pożądana z punktu widzenia mechaniki kwantowej, ucieka charakteryzacji.

### Związek kryterium odwzorowań $k$ -dodatnich z klasami świadków $k$ -splątania.

Warunek dodatniości macierzy  $(I \otimes \Phi)\rho$  można zapisać jako:

$$\forall A \geq 0 \quad \langle (I \otimes \Phi)\rho | A \rangle_{HS} \geq 0 \quad (3.8)$$

Teraz, weźmy sprzężenie odwzorowania  $(I \otimes \Phi)$  w sensie iloczynu HS. Mamy:

$$\forall A \geq 0 \quad \langle \rho | (I \otimes \Phi)^\# A \rangle_{HS} \geq 0 \quad (3.9)$$

Zakładamy, że odwzorowanie  $(I \otimes \Phi)$  nie jest dodatnie (w przeciwnym razie nie dawałoby ono żadnego kryterium). Oznacza to, że dla pewnych  $A \geq 0$  dostajemy obserwabla  $(I \otimes \Phi)^\# A$ , które nie są półdodatnio określone, ale są dodatnio określone na wszystkich wektorach  $k$ -separowalnych, co zapewnia  $k$ -dodatniość  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} \forall \Psi \in \mathcal{S}_k \quad (I \otimes \Phi)|\Psi\rangle\langle\Psi| \geq 0 \quad \Rightarrow \\ \text{Tr}(A(I \otimes \Phi)|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \text{Tr}((I \otimes \Phi)^\# A|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \langle\Psi|(I \otimes \Phi)^\# A|\Psi\rangle \geq 0 \end{aligned}$$

Obserwabla  $(I \otimes \Phi)^\# A$  jest więc świadkiem  $k$ -splątania. Kryterium zachowania dodatniości po podziałaniu odwzorowaniem  $\Phi$  na podukład odpowiada całej rodzinie świadków - obrazowi zbioru macierzy półdodatnio określonych w odwzorowaniu  $\Phi$ :

$$W_\Phi(A) = (I \otimes \Phi)^\# A$$

Możemy rozszerzyć tę rodzinę domieszkując świadka  $W_\Phi(A)$  pewną obserwabłą dodatnią  $B$ :

$$W_\Phi(A, B) = (I \otimes \Phi)^\# A + B \quad (3.10)$$

W rzeczywistości wykrywając splątanie wystarczy rozważać jedynie świadków, dla których  $B = 0$ , ponieważ świadkowie z  $B \neq 0$  nie są optymalni i nie wykrywają więcej niż ci sami świadkowie z  $B = 0$ .

Obserwabla postaci 3.10 są elementami zbioru  $\text{conv}((I \otimes \Phi)^\# \mathcal{B}_+ \cup \mathcal{B}_+)$ , gdzie  $\mathcal{B}_+$  oznacza stożek macierzy półdodatnio określonych. Wykorzystując czwartą i piątą własność dualności (fakt 2.9) oraz samodualność stożka  $\mathcal{B}_+$ , znajdujemy stożek dualny:

$$\text{conv}((I \otimes \Phi)^\# \mathcal{B}_+(\mathbb{C}^d) \cup \mathcal{B}_+(\mathbb{C}^d))^* \stackrel{(4)}{=} [(I \otimes \Phi)^\# \mathcal{B}_+(\mathbb{C}^d)]^* \cap \mathcal{B}_+(\mathbb{C}^d) \stackrel{(5)}{=} (I \otimes \Phi) \mathcal{B}_+ \cap \mathcal{B}_+(\mathbb{C}^d),$$

który jest stożkiem nieunormowanych stanów zachowujących dodatniość po podziałaniu na nie odwzorowaniem  $\Phi$ .

Dla zaprezentowanych w tym podrozdziale przykładów odwzorowań pokazaliśmy, że są one kontrakcjami w normie  $HS$ . Oznacza to, że dla takiego odwzorowania  $\Phi$  zbiór  $\Phi(\mathcal{S}_+(\mathbb{C}^d))$  jest podzbiorem kuli  $\text{conv}(S_{HS})$ <sup>8</sup>, a więc również zbiór  $\text{conv}((I \otimes \Phi)^\# \mathcal{S}_+(\mathbb{C}^d) \cup \mathcal{S}_+(\mathbb{C}^d))$  będzie podzbiorem kuli  $\text{conv}(S_{HS})$ . Oznacza to, że unormowani świadkowie w rodzinie 3.10 dla dowolnej kontrakcji w normie  $HS$  leżą wewnątrz kuli jednostkowej w normie  $HS$ , co prowadzi do warunku

$$\text{Tr}(W^2) \leq 1. \quad (3.11)$$

W podrozdziale 5.1 przekonamy się, że zależność ta musi zachodzić dla dowolnego odwzorowania dodatniego  $\Phi$ .

W podrozdziale 3.9 pokażemy, że każdy świadek  $k$ -splątania powstaje z pewnego odwzorowania  $k$ -dodatniego, które nie jest kompletnie dodatnie. Co więcej zbiory świadków  $k$ -splątania i odwzorowań  $k$ -dodatnich, które nie są kompletnie dodatnie są ze sobą izomorficzne. Przenosząc przez ten izomorfizm rodzinę  $\{(I \otimes \Phi)^\# A : A \geq 0\}$  z powrotem do przestrzeni odwzorowań, dostaniemy rodzinę odwzorowań  $k$ -dodatnich, które są niejako wtórne wobec pierwotnego odwzorowania i nie wykrywają nic więcej.

### 3.6 Konstrukcja świadka splątania wykrywającego zadany stan splątany

Załóżmy, że mamy dany stan  $\rho$ , którego  $k$ -splątanie wykryliśmy za pomocą odwzorowania  $k$ -dodatniego  $\Phi$ . Chcemy znać świadka  $k$ -splątania, który wykrywa ten stan. Wiemy już, że będzie on elementem podklasy świadków  $W_\Phi(A, B)$  definiowanej wzorem (3.10). Za  $B$  można przyjąć zero. Interesuje nas obserwabla dodatnia  $A$  którą powinniśmy wybrać, by świadek  $W_\Phi(A, 0)$  wykrywał zadany stan  $\rho$ .

Macierz hermitowska  $(I \otimes \Phi)\rho$  nie jest półdodatnio określona. Niech  $\Psi$  będzie wektorem własnym przy ujemnej wartości własnej tej macierzy. Dla tego wektora mamy:

$$\langle \Psi | (I \otimes \Phi)\rho | \Psi \rangle < 0 \quad \Rightarrow \quad \langle (I \otimes \Phi)\rho(|\Psi\rangle\langle\Psi|) \rangle_{HS} = \langle \rho | (I \otimes \Phi)^\#(|\Psi\rangle\langle\Psi|) \rangle_{HS} < 0 \quad (3.12)$$

Obserwabla  $(I \otimes \Phi)^\#(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$  jest szukanym świadkiem splątania wykrywającym stan  $\rho$ .

Poniżej zaprezentujemy przykłady świadków dla stanów z tego rozdziału, wykrywanych przez trzy z czterech zaprezentowanych tam odwzorowań dodatnich.

**Transpozycja.** Przykładem stanu wykrywanego przez amplifikację transpozycji jest stan (3.5):

$$\rho = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

<sup>8</sup>oznaczenie  $S_{HS}$  zostało wprowadzone w podrozdziale 2.5 dla przecięcia warstwy macierzy o jednostkowym śladzie ze sferą jednostkową w normie  $HS$ .

Po podziałaniem transpozycją na drugi podukład przechodzi on na

$$\rho^\Gamma = (I \otimes T)\rho = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Rozkład spektralny tej macierzy wygląda następująco:

$$\rho = \frac{1}{2}|e_1 \otimes e_1\rangle\langle e_1 \otimes e_1| + \frac{1}{2}\left|\frac{e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1}{\sqrt{2}}\right\rangle\left\langle\frac{e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1}{\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{2}\left|\frac{e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1}{\sqrt{2}}\right\rangle\left\langle\frac{e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1}{\sqrt{2}}\right| + \frac{1}{2}|e_1 \otimes e_1\rangle\langle e_1 \otimes e_1|$$

Na wektor stojący przy ujemnej wartości własnej podziałamy odwzorowaniem  $(I \otimes T)^\#$  (sprzężeniem częściowej transpozycji w iloczynie HS). Jednakże transpozycja jest samo-sprężona w sensie iloczynu HS, poszukiwanym świadkiem splątania jest więc:

$$W_\Gamma = \left|\frac{e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1}{\sqrt{2}}\right\rangle\left\langle\frac{e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1}{\sqrt{2}}\right|^\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Na tak skonstruowanym świadku pokażemy działanie kryterium optymalności (twierdzenie 3.8). W tym celu należy scharakteryzować zbiór  $\mathcal{P}(W_\Gamma)$ , czyli zbiór wektorów produktowych, na których wartość oczekiwana świadka się zeruje. W tym poszukujemy wektorów  $x, y \in \mathbb{C}^2$  spełniających równanie  $\langle x \otimes y | W_\Gamma | x \otimes y \rangle = 0$ . Rozpisując te równanie we współrzędnych, dostaniemy warunek:

$$\langle x \otimes y | W_\Gamma | x \otimes y \rangle = -x_1^* y_1^* x_2 y_2 - x_2^* y_2^* x_1 y_1 + |x_1|^2 |y_2|^2 + |x_2|^2 |y_1|^2 = |x_1^* y_2 - x_2^* y_1|^2 = 0,$$

który jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy  $x^* \times y = 0$ . Cztery takie wektory:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

rozpinają całą przestrzeń  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ , zatem świadek  $W_\Gamma$  jest optymalny.

**Odwzorowanie redukujące.** Jako przykład stanu, który jest wykrywany przez odwzorowanie redukujące posłużymy nam ten sam stan (3.5) ( $\rho = |\phi_+\rangle\langle\phi_+|$ , projektor na stan maksymalnie splątany), którego splątanie wykrywała częściowa transpozycja. Pod działaniem odwzorowania redukującego na drugi podukład przechodzi on w macierz hermitowską, która nie jest półdefinitnie określona:

$$(I \otimes R)\rho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jej rozkład spektralny wygląda tak:

$$\rho = \frac{1}{2} \left| \frac{e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2}{2} \right\rangle \left\langle \frac{e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2}{2} \right| + \frac{1}{2} |e_1 \otimes e_2\rangle \langle e_1 \otimes e_2| \\ + \frac{1}{2} |e_2 \otimes e_1\rangle \langle e_2 \otimes e_1| - \frac{1}{2} \left| \frac{e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2}{2} \right\rangle \left\langle \frac{e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2}{2} \right|$$

Odwzorowanie redukujące jest samosprężone w iloczynie HS. Na projektor na wektor własny odpowiadający ujemnej wartości własnej działamy więc amplifikacją odwzorowania redukującego i dostajemy szukanego świadka splątania:

$$W_R = I - \left| \frac{e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2}{2} \right\rangle \left\langle \frac{e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2}{2} \right| = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

**Odwzorowanie Choi.** Odwzorowanie Choi jest przykładem odwzorowania, które nie jest samosprężone w iloczynie HS (macierz odwzorowania zapisana w standardowej bazie macierzowej  $e_{ij}$  nie jest hermitowska). Sprzężeniem tego odwzorowania jest odwzorowanie:

$$\begin{aligned} Ch^\#(e_{11}) &= e_{11} + e_{33} & Ch^\#(e_{22}) &= e_{22} + e_{11} \\ Ch^\#(e_{33}) &= e_{33} + e_{22} & Ch^\#(e_{ij}) &= -e_{ij} \quad \text{gdy } i \neq j \end{aligned}$$

Podziałajmy amplifikacją tego odwzorowania na stan (3.6):

$$\rho_{ab} = \frac{1}{3(1+a+b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Działając na ten stan amplifikacją odwzorowania Choi otrzymujemy w wyniku macierz hermitowską (3.7), która nie jest półododatnio określona. Przyjmuje on ujemną wartość oczekiwaną na wektorze maksymalnie splątany  $\Phi_+$ . Świadkiem splątania wykrywającym rodzinę stanów  $\rho_{ab}$  będzie zatem obserwabla  $(I \otimes Ch^\#)|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+|$ , która w bazie standardowej macierzy  $3 \times 3$  opisana jest macierzą:

$$W_{Ch} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$



### 3.7 Kryterium obrazu

Założmy, że mamy dany stan separowalny  $\rho$ . Z definicji oznacza to, że da się on przestawić w postaci rozkładu:

$$\rho = \sum_i |\psi_i \otimes \phi_i\rangle \langle \psi_i \otimes \phi_i|$$

jego częściowa transpozycja będzie równa

$$\rho^\Gamma = \sum_i |\psi_i \otimes \phi_i^*\rangle \langle \psi_i \otimes \phi_i^*|$$

Prowadzi to do następującego kryterium separowalności [107]:

**Twierdzenie 3.28** (Kryterium obrazu). *Jeżeli macierz stanu  $\rho$  jest separowalna, to istnieje zbiór wektorów  $\{\psi_i \otimes \phi_i\}$  rozpinających  $\text{Im}\rho$ , taki że zbiór  $\{\psi_i \otimes \phi_i^*\}$  rozpinają  $\text{Im}\rho^\Gamma$*

Wśród stanów łamiących to kryterium wyróżniamy *stany narożnikowe (edge states)* [106], [79], [108]. Są to stany, które maksymalnie łamią kryterium obrazu, to znaczy że nie istnieje taki wektor produktowy  $\psi \otimes \phi$  w obrazie macierzy stanu, żeby wektor  $\psi \otimes \phi^*$  należał do obrazu macierzy częściowej transpozycji tego stanu. Dowodzi się [106], [79], że dowolny stan PPT jest kombinacją wypukłą stanu separowalnego i stanu narożnikowego. Nie potrafimy jednak wśród stanów narożnikowych rozstrzygnąć, które z nich są ekstremalne. Odwrotnie niż w przypadku zbioru stanów separowalnych, łatwo jest stwierdzić czy stan jest stanem PPT, ale trudno scharakteryzować zbiór tych stanów (np. identyfikując jego punkty ekstremalne). Strukturze zbioru stanów PPT poświęcona jest praca [109].

Przykładem stanu wykrywanego przez kryterium obrazu jest jednoparametrowa rodzina stanów PPT z pracy [107]:

$$\rho_b = \frac{1}{7b+1} \left[ \begin{array}{cccc|cccc} b & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+b}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{1-b^2}}{2} \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & \frac{\sqrt{1-b^2}}{2} & 0 & 0 & \frac{1+b}{2} \end{array} \right]. \quad (3.17)$$

Parametr  $b$  przyjmuje wartości z przedziału  $[0, 1]$ . Dla wszystkich wartości we wnętrzu tego przedziału, stany są splątane.

Pod nazwą kryterium obrazu funkcjonuje też inne kryterium, klasyfikujące orbity operacji LOCC używając obrazów macierzy śladów częściowych dla układów wielu cząstek [110].

### 3.8 Kryterium realignmentu

Rozważmy liniowe odwzorowanie przestrzeni stanów badanego układu kwantowego w dowolną inną przestrzeń liniową macierzy wyposażoną w pewną normę  $\Lambda : \mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}) \rightarrow$

$(L, [\cdot])$  <sup>9</sup>. Od normy tej wymagamy, by dla każdego projektora na stan separowalny zachodził warunek:

$$[\Lambda(|\phi \otimes \psi\rangle\langle\phi \otimes \psi|)] \leq 1$$

Ten sam warunek będzie wówczas zachodził dla wszystkich stanów separowalnych, ponieważ każda norma jest odwzorowaniem wypukłym (gwarantuje to nierówność trójkąta). Stany, które w odwzorowaniu  $\Lambda$  przechodzą na wektory o normie większej niż jeden są na pewno splątane.

Kula jednostkowa w przestrzeni  $(L, [\cdot])$  zawiera w sobie teraz wszystkie stany separowalne. Jesteśmy teraz zainteresowani, by było w niej jak najmniej stanów splątanych (jak najmniejszy obszar stanów splątanych niewykrywanych przez kryterium).

Idąc tym tokiem rozumowania zaproponowano w [111], [112] oraz w [113] jako odwzorowanie  $\Lambda$  następującą permutację indeksów:

$$[\rho^R]_{ij,kl} = \rho_{ik,lj},$$

a jako normę  $[\cdot]$  normę śladową.

**Definicja 3.29** (Norma śladowa). *Odwzorowanie  $\|\cdot\|_1 : L \rightarrow \mathbb{R}$  przypisujące dowolnej macierzy prostokątnej sumę jej wartości singularnych spełnia własności normy i nazywane jest normą śladową* <sup>10</sup>.

Łatwo widać, że odwzorowanie  $\cdot^R$  przekształca separowalny projektor  $|\phi \otimes \psi\rangle\langle\phi \otimes \psi|$  w macierz  $|\phi \otimes \phi^*\rangle\langle\psi \otimes \psi^*|$ . Jej rząd jest równy jeden, więc jeżeli wektory  $\phi$  i  $\psi$  były unormowane, posiada on dokładnie jedną niezerową wartość singularną równą jeden, więc jego norma śladowa wynosi jeden.

Dostajemy w konsekwencji:

**Twierdzenie 3.30** (Kryterium realignmentu). *Jeżeli stan  $\rho$  jest separowalny, to zachodzi dla niego  $\|\rho^R\|_1 \leq 1$ .*

Odwzorowanie  $(\cdot)^R$  przekształca macierz hermitowską  $\rho \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(d_1 \times d_2, d_1 \times d_2)$  w macierz  $\rho^R \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(d_1^2, d_2^2)$ , która w ogólności jest niehermitowska i prostokątna (jeżeli wymiary czynników w iloczynie tensorowym nie są równe). Macierz tą nazywać będziemy *macierzą realignmentu stanu  $\rho$* , natomiast wartość jej normy śladowej nazywać będziemy *realignmentem stanu  $\rho$* .

Wiersze macierzy  $\rho^R$  składają się z elementów bloków  $d_2 \times d_2$ . W wierszu leżą po sobie kolejne kolumny bloku. Wierszy jest tyle ile jest bloków, czyli  $d_1 \times d_1$ . W kolumnach zapisane są kolejne  $d_2 \times d_2$  bloki (bloki ze względu na pierwszy podukład) <sup>11</sup> zapisane pionowo wiersz po wierszu. Macierz  $\rho^R \rho^{R\dagger}$  (której pierwiastków wartości własnych poszukujemy) jest macierzą Gramma w iloczynie HS zbioru bloków  $d_1 \times d_1$ . Odpowiednio, macierz  $\rho^{R\dagger} \rho^R$  (o tych samych wartościach własnych) jest macierzą Gramma w iloczynie HS dla układu bloków  $d_1 \times d_2$  (ze względu na pierwszy podukład).

<sup>9</sup>symbol  $[\cdot]$  został użyty jako symbol pewnej ogólnej normy, tak by nie sugerować że jest to norma HS czy *sup* w przestrzeni  $L$

<sup>10</sup>Normę tą nazywa się czasem również normą Ky Fan. W ogólności  $k$ -ta norma Ky Fan macierzy jest to suma jej  $k$  pierwszych wartości singularnych. Dla  $k = 1$  otrzymujemy normę *sup*, dla maksymalnego  $k$  normę śladową. Patrz [114], s. 92

<sup>11</sup>Blok ze względu na pierwszy podukład grupuje wyrazy macierzy  $\rho^R$  o ustalonych indeksach macierzowych w drugim czynniku iloczynie tensorowego.  $ij$ -ty blok jest macierzą złożoną z  $ij$ tych elementów bloków  $d_2 \times d_2$  (bloków ze względu na drugi podukład).

**Zbiór stanów wykrywanych - obserwacje geometryczne** Wyrażenie  $R(\rho) = \sqrt{\lambda_1} + \dots + \sqrt{\lambda_{d_1^2}}$  definiujące realignment poprzez wartości własne macierzy  $\rho^R \rho^{R\dagger}$  osiąga swą maksymalną wartość, gdy te wartości własne są sobie równe. Wtedy każda z nich jest równa  $\text{Tr}(\rho^R \rho^{R\dagger})/d_1^2$  i prowadzi to następującego ograniczenia na realignment:

$$R(\rho) \leq d_1 \sqrt{\text{Tr}(\rho^R \rho^{R\dagger})} = d_1 \sqrt{\text{Tr} \rho^2}$$

Oznacza to, że jeżeli tylko  $\text{Tr} \rho^2 \leq 1/d_1^2$  (stan będzie odpowiednio mocno zmieszany <sup>12</sup>), wtedy realignment tego stanu będzie napewno mniejszy od 1. W podrozdziale 5.1 przekonamy się, że istnieją stany splątane dla których  $\text{Tr} \rho^2$  jest dowolnie bliskie wartości  $1/(d_1 d_2 - 1)$ . Jeżeli tylko wymiary podukładów nie są sobie równe (czyli gdy  $d_1 < d_2$ ), mamy nierówność  $1/d_1^2 \leq 1/(d_1 d_2 - 1)$ , co oznacza istnienie stanów nie wykrywanych przez realignment. Dysproporcja ta staje się coraz większa wraz z różnicą wymiarów podukładów. Należy się spodziewać gorszych efektów działania kryterium realignmentu, gdy wymiary podukładów się istotnie różnią. We własnych eksperymentach numerycznych nie znalazłem np. stanów PPT wykrywanych przez realignment dla wymiarów podukładów  $2 \times 4$ .

**Konstrukcja świadka splątania dla stanu wykrywanego przez kryterium realignmentu.** Konstrukcję świadka splątania dla stanu wykrywanego przez kryterium realignmentu podaje praca [115]. Podano w niej następujący przepis na świadka splątania wykrywającego stan  $\rho$ , którego realignment jest większy od 1:

**Twierdzenie 3.31.** *Stan  $\rho$ , którego realignment jest większy od 1, jest wykrywany przez świadka splątania:*

$$W = I - (UD_{d_1, d_2} V)^{-R},$$

gdzie macierze  $U \in SU(d_1^2)$  oraz  $V \in SU(d_2^2)$  są macierzami sprowadzającymi macierz realignmentu  $\rho^R$  do jej postaci Schmidta, natomiast macierz  $D_{d_1, d_2} \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(d_1^2, d_2^2)$  zdefiniowana jest jako:

$$D_{d_1, d_2} = \left[ \begin{array}{c|c} I_{d_1^2} & 0 \end{array} \right]$$

Do dowodu powyższego twierdzenia potrzebny jest następujący

**Lemat 3.32.** *Jeżeli macierz  $\rho \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$  jest hermitowska i rozkładem singularnym jej macierzy realignmentu jest  $\rho^R = U \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_{d_1}\} D_{d_1, d_2} V$ , to macierz  $(UD_{d_1, d_2} V)^{-R}$  jest również hermitowska.*

Dysponując lematem, można udowodnić twierdzenie.

**Dowód:** Stan  $\rho$  jest wykrywany przez kryterium realignmentu. Załóżmy, że rozkład singularny macierzy realignmentu stanu  $\rho$  zadany jest jako  $\rho^R = U \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_{d_1}\} D_{d_1, d_2} V^\dagger$ . Realignment macierzy  $\rho$  jest sumą wartości singularnych macierzy  $\rho^R$ , znając jej rozkład singularny można zapisać go jako:

$$R(\rho) = \text{Tr}(U^\dagger \rho^R V D_{d_1, d_2}^\dagger)$$

<sup>12</sup>Liczbę  $\text{Tr} \rho^2$  dla stanu  $\rho$  nazywa się *czystością* stanu  $\rho$ . Przyjmuje ona wartość 1 dla stanów czystych i maleje wraz ze zbliżaniem się do środka zbioru stanów. Czystość jest kwadratem normy *HS* macierzy gęstości.

Cykliczność śladu pozwala przepisać powyższy wzór jako

$$R(\rho) = \text{Tr}(VD_{d_1 d_2}^\dagger U^\dagger \rho^R) \quad (3.18)$$

Jeżeli stan (w ogólności nieunormowany) jest wykrywany przez realignment, to zachodzi:

$$R(\rho) > \text{Tr}\rho$$

Wykorzystując wzór (3.18), warunek ten przyjmie postać:

$$\text{Tr}(VD_{d_1 d_2}^\dagger U^\dagger \rho^R) < \text{Tr}(I\rho)$$

Można go teraz zapisać za pomocą iloczynu HS jako:

$$\langle UD_{d_1, d_2} V^\dagger, \rho^R \rangle_{HS} > \langle I, \rho \rangle_{HS}$$

Lewy czynnik iloczynu skalarnego po lewej stronie nierówności można zapisać jako  $((UD_{d_1, d_2} V^\dagger)^{-R})^R$ . Realignment po obu stronach iloczynu skalarnego permutuje tylko wyrazy w definiującej go sumie iloczynów odpowiadających sobie elementom macierzowych. Można więc go opuścić w obu czynnikach i po przeniesieniu wszystkiego na prawą stronę nierówności otrzymać:

$$0 > \langle I - (UD_{d_1, d_2} V^\dagger)^{-R}, \rho \rangle_{HS}$$

Obserwabla  $W = I - (UD_{d_1, d_2} V^\dagger)^{-R}$  jest na mocy lematu hermitowska. Z konstrukcji wynika, że na zadanym stanie splątany przyjmuje ona ujemną wartość średnią. By wykazać, że jest to szukany świadek splątania, pozostaje pokazać, że na dowolnym czystym stanie separowalnym przyjmuje on nieujemną wartość średnią. Obliczmy zatem wartość średnią obserwabli  $W$  na projektorze na wektor separowalny  $\psi \otimes \phi$ :

$$\begin{aligned} \langle \psi \otimes \phi | W | \psi \otimes \phi \rangle &= \|\psi\|^2 \|\phi\|^2 - \langle UD_{d_1, d_2} V^\dagger, (\mathfrak{P}(\psi) \otimes \mathfrak{P}(\phi))^R \rangle_{HS} \\ &= \|\psi\|^2 \|\phi\|^2 - \text{Tr}(VD_{d_1, d_2}^\dagger U^\dagger |\psi \otimes \psi^*\rangle \langle \phi \otimes \phi^*|) \end{aligned}$$

(na mocy podobnych argumentów jak powyżej, przetrzuciliśmy działanie realignmentu do drugiego czynnika iloczynu HS). Teraz na mocy cykliczności śladu można przenieść  $V$  na koniec wyrażenia pod śladem. Macierze unitarne obróćą wektory odpowiednio  $\psi \otimes \psi^*$  oraz  $\phi \otimes \phi^*$  do pewnych innych wektorów, niekoniecznie już produktowych, nie zmieniając ich długości. Norma supremum macierzy  $D_{d_1, d_2}$  wynosi 1, drugi składnik prawej strony można zatem oszacować z góry przez  $\|\psi\|^2 \|\phi\|^2$ , udowadniamy więc, że wartość średnia obserwabli  $W$  na dowolnym stanie czystym jest nieujemna.  $\square$ .

**Przykład działania kryterium realignmentu i konstrukcja świadka dla wykrywanych stanów.** Obserwacje numeryczne pokazują, że nie istnieją stany PPT w  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^4$  wykrywane przez kryterium realignmentu, jest więc ono w tym wymiarze słabsze niż częściowa transpozycja. Najniżej wymiarową przestrzeń, w której kryterium realignmentu wykrywa stany PPT jest zatem  $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ . Jako przykład podamy konstrukcję świadka splątania dla rodziny  $\rho_{ab}$  stanów splątanych PPT w tej przestrzeni zadanego wzorem (3.6) wykrywanego przez realignment i odwzorowanie Choi.

Macierz realignmentu dla macierzy  $\rho$  wygląda następująco:

$$\rho_{ab}^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jej rozkład singularny wygląda tak:

$$\rho_{ab}^R = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+a+b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

gdzie w celu zaoszczędzenia miejsca przez  $x$  oznaczyliśmy wartość singularną równą  $\sqrt{1-a-b-ab+a^2+b^2}$ . Ponieważ wymiary są równe, macierz  $D_{d_1, d_2}$  jest macierzą idyntywnościową. Wykrywanie stanu  $\rho$  jest równoważne zachodzeniu nierówności:

$$1+a+b+2\sqrt{1-a-b-ab+a^2+b^2}+6 > 3(1+a+b),$$

którą można przekształcić do postaci:

$$a+b-2ab > 3. \quad (3.19)$$

Przypomnijmy teraz, że zakresem parametrów było  $b \in (0, 1)$ ,  $a \geq 1/b$ . Stany w tej rodzinie wykrywane przez realignment, czyli spełniające nierówność (3.19) stanowią jej podzbiór właściwy. Realignment nie jest w stanie wykryć wszystkich stanów wykrywanych przez odwzorowanie Choi.

Żeby otrzymać świadka wykrywającego stan splątany  $\rho_{ab}$  mnożymy przez siebie macierze unitarne  $U$  i  $V^\dagger$  z rozkładu singularnego, stosujemy do tak otrzymanej macierzy odwrotność realignmentu oraz odejmujemy tak otrzymaną macierz hermitowską od idyntityczności. Dostajemy w wyniku:

$$W_{real} = I - \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}^{-R} =$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right]. \quad (3.20)$$

Świadek ten przypomina świadka splątania (3.16) wykrywającego stany  $\rho_{ab}$  skonstruowanego za pomocą odwzorowania Choi. Różni się od niego jedynie wartościami na głównej przekątnej.

**Wzmocnione wersje kryterium realignmentu.** Praca [116] podaje mocniejszą wersję kryterium realignmentu korzystającą z informacji o śladach częściowych macierzy gęstości. Dla stanów separowalnych zachodzi:

$$R(\rho - \rho_A \otimes \rho_B) \leq \sqrt{(1 - \text{Tr}\rho_A^2)(1 - \text{Tr}\rho_B^2)}, \quad (3.21)$$

zachodzi również podobna nierówność dla częściowej transpozycji macierzy  $\rho - \rho_A \otimes \rho_B$ :

$$R((\rho - \rho_A \otimes \rho_B)^\Gamma) \leq 2\sqrt{(1 - \text{Tr}\rho_A^2)(1 - \text{Tr}\rho_B^2)}, \quad (3.22)$$

Wzór (3.21) został uogólniony do postaci

$$\forall \phi \quad R(\rho - \cos(\phi)\rho_A \otimes \rho_B) \leq \sqrt{(1 - \cos(\phi)\text{Tr}\rho_A^2)(1 - \cos(\phi)\text{Tr}\rho_B^2)}$$

w pracy [117], jako wniosek ze znacznie ogólniejszej, ale mniej praktycznej wersji kryterium realignmentu.

Inną drogą uogólnienia kryterium realignmentu jest użycie wyższych wielomianów symetrycznych w wartościach singularnych (standartowe kryterium realignmentu używa wielomianu symetrycznego pierwszego stopnia), co zostało zaproponowane w pracy [118].

Własności stanu takie jak separowalność czy dodatniość po częściowej transpozycji mają cechę niezmienniczości pod działaniem operacji SLOCC (patrz podrozdział 1.2) reprezentowanych przez lokalne operacje liniowe. W odróżnieniu od tych własności stanu, po podziałaniu nieosobliwą lokalną operacją liniową na stan wykrywany przez realignment, może on przestać być wykrywany. Ponieważ lokalne operacje liniowe tworzą grupę, możliwa jest też sytuacja odwrotna. Dla układów  $2 \times N$ , gdzie  $N \geq 4$ , każda orbita operacji liniowych zawiera stan niewykrywany przez realignment (stan separowalny, lub niewykrywany stan splątany). Dotyczy to również orbit stanów splątanych wykrywanych przez realignment. Stany splątane z takich orbit, które nie są wykrywane, mogą być wykryte po podziałaniu na stan lokalną operacją liniową. Zwiększa to zakres stosowalności kryterium realignmentu. Dowód tego faktu znajduje się w Dodatku A.

**Związek kryterium realignmentu z kryterium PPT.** Kryterium PPT można przeformułować w taki sposób by przypominało kryterium realignmentu. Wartościami własnymi macierzy hermitowskiej są wartości bezwzględne jej wartości własnych. Jeżeli stan  $\rho$  jest separowalny, to wszystkie wartości własne macierzy  $\rho^\Gamma$  są dodatnie. Ich wartości bezwzględne sumują się zatem do śladu macierzy  $\rho$  (ponieważ częściowa transpozycja zachowuje ślad) i  $\|\rho^\Gamma\|_1 = \text{Tr}\rho$ . Jeżeli natomiast przynajmniej jedna z wartości własnych  $\rho^\Gamma$  jest ujemna, to suma ich wartości bezwzględnych jest ostro większa od śladu  $\rho$ . Wniosujemy stąd, że:

$$\rho^\Gamma > 0 \quad \iff \quad \|\rho^\Gamma\|_1 = \text{Tr}\rho$$

Co więcej, odwzorowania  $(\cdot)^\Gamma$  i  $(\cdot)^R$  polegają tylko na permutacji indeksów macierzowych. Można sformułować kryterium uogólniające oba te kryteria, mocniejsze od obydwu z nich:

**Twierdzenie 3.33.** *Jeżeli stan  $\rho = \sum_{ijkl} \rho_{ijkl} |e_i \otimes f_j\rangle \langle e_k \otimes f_l$  jest separowalny, to dla dowolnej permutacji indeksów  $\sigma$  norma śladowa macierzy  $\rho_{\sigma\{ijkl\}}$  jest mniejsza od 1.*

**Dowód:** Twierdzenia tego dowodzimy podobnie jak dowodziliśmy prawdziwości kryterium realignmentu. Macierz projektora na wektor separowalny jest iloczynem tensorowym czterech wektorów i po permutacji indeksów zmieni się tylko kolejność czynników. Rozkład Schmidta macierzy po permutacji ma tylko jedną niezerową wartość singularną równą 1, więc jej norma śladowa jest równa 1. Z wypukłości normy śladowej mamy, że kombinacja wypukła dowolnej liczby projektorów na wektory separowalne nie będzie miała normy większej niż 1.  $\square$

Twierdzenie to ma bezpośrednie uogólnienie na większą liczbę podukładów. Łatwo pokazać, że dowolną permutację indeksów dla dwóch podukładów generują częściowe transpozycje w podukładach, przenumerowanie podukładów i realignment. Stąd realignment i częściowa transpozycja są wszystkimi kryteriami permutacyjnymi dla dwóch podukładów. Po szczegóły dotyczące kryteriów permutacyjnych odsyłam do prac [119], [120].

### 3.9 Izomorfizm Jamiołkowskiego

Zbiór obserwabli na układzie złożonym jest izomorficzny ze zbiorem odwzorowań liniowych pomiędzy układami zachowujących hermitowskość [121]:

$$\mathfrak{J} : \mathcal{L}(\mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_1}), \mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_2})) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$$

Izomorfizm ten przypisuje obserwabłę  $A$  odwzorowaniu  $\Phi$  wzorem:

$$A := \mathfrak{J}(\Phi) = (I \otimes \Phi)|\phi_+\rangle\langle\phi_+| \quad (3.23)$$

gdzie  $|\phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d_1}} \sum_{i=1}^{d_1} |i\rangle \otimes |i\rangle$  jest wektorem maksymalnie splątanym w przestrzeni  $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_1}$  (cały czas obowiązuje założenie, że  $d_1 \leq d_2$ ).

Izomorfizm odwrotny wyraża się zaś wzorem (za [122]):

$$(\mathfrak{J}^{-1}(H))(\rho) = d_1 \text{Tr}_1(H(\rho^T \otimes I)). \quad (3.24)$$

**Fakt 3.34.** *Odwzorowanie  $\Phi$  jest  $k$ -dodatnie  $\iff$  odwzorowanie  $\Phi^\#$  jest  $k$ -dodatnie. Odwzorowanie  $(\cdot)^\# : \Phi \rightarrow \Phi^\#$  jest liniowym izomorfizmem.*

W podrozdziale 3.5 zaobserwowaliśmy, że każdemu odwzorowaniu  $k$ -dodatniemu  $\Phi$  można przypisać całą rodzinę świadków  $k$ -splątania (3.10). Zauważmy, że odwzorowanie  $\Phi \rightarrow \Phi^\# \rightarrow W_{\Phi^\#}(|\phi_+\rangle\langle\phi_+|, 0)$  przypisuje odwzorowaniu  $\Phi$  świadka związanego z odwzorowaniem  $\Phi$  izomorfizmem  $\mathfrak{J}$ . Odwrotnie, każdy świadek  $k$ -splątania jest przeprowadzany w odwzorowanie  $k$ -dodatnie, które nie jest kompletnie dodatnie, poprzez izomorfizm (3.24). Własność  $k$ -dodatniości odpowiada w izomorfizmie  $\mathfrak{J}$  przyjmowania nieujemnej wartości średniej przez obserwabłę będącą obrazem odwzorowania w izomorfizmie  $\mathfrak{J}$  na dowolnych kombinacjach  $k$  wektorów separowalnych. Mamy zatem następujący:

**Fakt 3.35.** *Izomorfizm  $\mathfrak{J}$  ustala jednoznaczność odpowiedniość pomiędzy świadkami  $k$ -splątania a odwzorowaniami  $k$ -dodatnimi, które nie są kompletnie dodatnie.*

**Postać Kraus-Choi odwzorowania kompletnie dodatniego.** Każde odwzorowanie kompletnie dodatnie  $\Phi_{CP} : \mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_1}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_2})$  daje się zapisać [123] w postaci:

$$\Phi_{CP}(\rho) = \sum_i A_i^\dagger \rho A_i, \quad (3.25)$$

gdzie macierze  $A_i$  są macierzami dowolnych przekształceń liniowych działających z  $\mathbb{C}^{d_1}$  do  $\mathbb{C}^{d_2}$ . Łatwo zauważyć też, że każde odwzorowanie takiej postaci jest odwzorowaniem kompletnie dodatnim. Otrzymujemy w ten sposób pełną charakteryzację zbioru odwzorowań kompletnie dodatnich. Postać (3.25) odwzorowania kompletnie dodatniego nazywamy postacią Kraus-Choi ([124]). Stosując do odwzorowania zapisanego w postaci 3.25 izomorfizm  $\mathfrak{J}$  znajdujemy odpowiadającą mu obserwabłę na przestrzeni  $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$ :



$$\mathfrak{J}(\Phi_{CP}) = \sum_i |\mathfrak{A}^{-1}(A_i)\rangle\langle\mathfrak{A}^{-1}(A_i)| \quad (3.26)$$

Przedstawieniu w postaci Kraus-Choi odpowiada więc rozkład obserwabli półdodatnio określonej na kombinację projektorów o dodatnich współczynnikach. W szczególności będzie to rozkład własny. Dla tego tego rozkładu wektory na które rzutują projektory są do siebie prostopadłe. W izomorfizmie  $\mathfrak{J}^{-1}$  ten fakt tłumaczy się na prostopadłość parami macierzy  $A_i$  w iloczyźnie Hilberta-Schmidta. Mamy wtedy własność:

$$\langle A_i | A_j \rangle_{HS} = \lambda_i \delta_{ij}$$

Każda obserwabla hermitowska jest różnicą dwóch obserwabli dodatnio określonych. Każde odwzorowanie zachowujące hermitowskość będzie więc różnicą dwóch odwzorowań kompletnie dodatnich. Każde odwzorowanie  $k$ -dodatnie, które nie jest kompletnie dodatnie da się zapisać w postaci:

$$\Phi(\rho) = \sum_i A_i^\dagger \rho A_i - \sum_i B_i^\dagger \rho B_i.$$

Interesujące nas klasy macierzy hermitowskich odpowiadają w izomorfizmie  $\mathfrak{J}^{-1}$  następującym klasom odwzorowań dodatnich:

Macierze w $\mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$	Odwzorowania w $\mathcal{L}(\mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_1}), \mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_2}))$
Świadczenie splątania	Odwzorowania dodatnie, które nie są kompletnie dodatnie
Świadczenie $k$ -splątania	Odwzorowania $k$ -dodatnie, które nie są kompletnie dodatnie
Macierze półdodatnio określone (nieunormowane stany kwantowe)	Odwzorowania kompletnie dodatnie (kanały kwantowe)
Stany $k$ -separowalne	Kanały łamiące $k$ -splątanie <sup>13</sup>
Stany separowalne	Kanały łamiące splątanie <sup>14</sup>

Izomorfizm  $\mathfrak{J}^{-1}$  tłumaczy struktury w  $\mathcal{L}(\mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_1}), \mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_2}))$  na następujące struktury w  $\mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$ :

<sup>13</sup>Kanał łamiący  $k$ -splątanie to kanał, którego przeciwdziedzina zawiera się w zbiorze stanów  $k$ -separowalnych. Dowolny stan po przejściu przez ten kanał będzie  $k$ -separowalny, czyli straci  $k$ -splątanie. Szczegóły patrz [127]

<sup>14</sup>Kanały łamiące splątanie (1-splątanie) są szczególnym przypadkiem kanałów z linijki wyżej. Zostały one opisane wcześniej niż przypadek ogólny w pracach [125], [126]

Struktura w $\mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$	struktura w $\mathcal{L}(\mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_1}), \mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_2}))$
Iloczyn skalarny w $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$	Iloczyn HS w $\mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_1}, \mathbb{C}^{d_2})$
Półdodatnia określoność	Kompletna dodatniość odwzorowania
Półdodatnia określoność na wektorach $k$ -separowalnych	$k$ -dodatniość odwzorowania
Półdodatnia określoność na wektorach separowalnych	Dodatniość odwzorowania
Rząd macierzy	Liczba niezależnych liniowo macierzy w reprezentacji Kraus-choi
Sygnatura macierzy	(Liczba niezależnych liniowo macierzy w części dodatniej reprezentacji Kraus-choi, Liczba niezależnych liniowo macierzy w części ujemnej reprezentacji Kraus-choi)

### 3.10 Rozkładalność odwzorowań i świadków

Na końcu podrozdziału 3.5 określiliśmy klasę świadków  $k$ -splątania odpowiadających danemu odwzorowaniu  $k$ -dodatniemu  $\Phi$ , które nie jest kompletnie dodatnie. Rodzina ta, określona wzorem (3.10), jest parametryzowana dwiema macierzami półdodatnio określonymi. Jeżeli w tym wzorze za odwzorowanie  $\Phi$  weźmiemy transpozycję, to dostaniemy ogólną postać pochodzącego od niej świadka splątania:

$$W = A^\Gamma + B. \quad (3.27)$$

Świadków takich nazywamy *świadkami rozkładalnymi*. Ponieważ częściowa transpozycja jest izometrią w normie  $HS$ , wszystkie punkty ekstremalne tego zbioru leżą na sferze jednostkowej. Zbiór świadków rozkładalnych jest wpisany w tę sferę.

Przenieśmy klasę (3.10) świadków zbudowanych z pewnego odwzorowania  $k$ -dodatniego  $\Phi$  poprzez izomorfizm (3.24). Dostaniemy w wyniku klasę odwzorowań  $k$ -dodatnich:

$$\Phi(A, B) = \mathfrak{J}^{-1}(A) \circ \Phi + \mathfrak{J}^{-1}(B)$$

Stosując ten wzór do transpozycji, dostajemy rodzinę odwzorowań dodatnich, które w ogólności nie są kompletnie dodatnie:

$$\Phi(\rho) = \sum_i A_i^\dagger \rho^T A_i - \sum_i B_i^\dagger \rho B_i \quad (3.28)$$

Odwzorowania te nazywamy odwzorowaniami rozkładalnymi. Nie wykrywają one nic więcej, niż częściowa transpozycja [85]. Odwzorowania rozkładalne i odpowiadający im świadkowie rozkładalni są więc mało interesujący. Zbiór odwzorowań rozkładalnych pokrywa się ze zbiorem wszystkich odwzorowań dodatnich w wymiarach  $2 \times 2$  [128] i  $2 \times 3$  [129].

Z punktu widzenia kwantowej teorii informacji interesujące są nowe klasy świadków i odwzorowań nierozkładalnych. Przykładami takich odwzorowań są zaprezentowane w rozdziale 3.5 odwzorowanie Choi i odwzorowanie Halla-Breuera.

Mając dane odwzorowanie  $k$ -dodatnie które nie jest kompletnie dodatnie, albo świadka  $k$  splątania, chcemy wiedzieć czy jest on rozkładalny, czy nie. Kryteria badania rozkładalności odwzorowania znajdziemy w pracach [98], [130].

**Nierozkładalna optymalność.** W ogólnej teorii wykrywania i optymalności opisanej w podrozdziale 3.4, wybierzmy za stożek  $L$  stożek  $\mathcal{W}_k(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$ , natomiast za stożek  $K$  stożek obserwabli postaci (3.27), który tworzą obserwable półdodatnio określone i świadkowie rozkładalni. Zbiór  $L \setminus K$  jest zbiorem świadków nierozkładalnych. Wykrywa on elementy zbioru  $K^* \setminus L^*$ , czyli stany splątane PPT.

Zbiór  $\text{opt}(L|K)$  jest teraz zbiorem optymalnych świadków nierozkładalnych. Z definicji, elementem zbioru  $\text{opt}(L|K)$  jest świadek splątania taki, że żaden inny świadek nie wykrywa więcej stanów PPT niż on. Nierozkładalnej optymalności<sup>15</sup> poświęcona są prace [107], [79].

Wykorzystując wniosek 3.20 dostajemy, że świadek  $W$  jest nierozkładalnie optymalny, wtedy i tylko wtedy jeżeli istnieje kombinacja wypukła elementów zbioru  $\mathcal{P}^1(W)$  należąca do wnętrza stożka nieunormowanych stanów PPT. Ponieważ stożek ten zawiera się w stożku macierzy dodatnich, warunkiem koniecznym nierozkładalnej optymalności jest zwykła optymalność świadka  $W$ .

W przypadku nierozkładalnej optymalności zarówno stożek  $L$  jak i stożek  $K$  są niezmiennicze względem częściowej transpozycji. Jeżeli ściana  $F(w)$  stożka  $L$  nie ma punktów wspólnych ze stożkiem  $K$ , to również ściana  $F^\Gamma(w)$  nie będzie miała punktów wspólnych ze stożkiem  $K^\Gamma = K$ . Jeżeli  $w \in L$  jest  $L|K$  optymalny, to  $w^\Gamma$  będzie również  $L|K$  optymalny. Nierozkładalna optymalność jest zachowywana przez częściową transpozycję.

W przypadku zwykłej optymalności już tak nie jest, ponieważ w tym przypadku stożek  $K$  nie jest niezmienniczy względem częściowej transpozycji. Przykładem świadka optymalnego, który przestaje być optymalny po częściowej transpozycji, jest częściowa transpozycja dowolnego projektora na wektor splątany.

Jeżeli zarówno element  $w \in L$  jak i jego częściowa transpozycja  $w^\Gamma$  są optymalne ze względu na  $\mathcal{B}_+(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$ , to element  $w$  jest jednocześnie optymalny ze względu na stożki  $\mathcal{B}_+(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$  i  $\mathcal{B}_+^\Gamma(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$ , zatem jest optymalny ze względu na stożek  $\text{conv}[\mathcal{B}_+(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}) \cup \mathcal{B}_+^\Gamma(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})]$ , czyli jest nd-optymalny. Dowód tego faktu nie odwołujący się do ogólnej teorii optymalności znajdziemy w [79].

**Związek  $k$ -separowalności z nierozkładalnością.** Mając dane odwzorowanie  $k$ -dodatnie, ale nie  $k+1$ -dodatnie, jego  $k$ -ta amplifikacja  $I_k \otimes \Lambda_k$  jest odwzorowaniem nierozkładalnym [131].

W pracy [130] M. Lewenstein i współautorzy proponują następującą hipotezę wiążącą  $k$ -separowalność z rozkładalnością:

**Hipoteza 3.36.** *Dowolny stan PPT w przestrzeni  $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$  ma rząd Schmidta mniejszy lub równy 2*

Na podstawie obserwacji własnych D. Chruściński i A. Kossakowski wzmacniają tę hipotezę, postulując ją dla wszystkich wymiarów podukładów.

<sup>15</sup>Funkcjonuje również termin ND-optymalność, pochodzący od skrótu angielskiego słowa *non-decomposable*

### 3.11 Nierozszerzalne bazy produktowe

Całkowicie niezależną metodą znajdowania stanów ze splątaniem PPT (oraz nierozkładalnych świadków splątania i odwzorowań dodatnich) jest ich konstrukcja za pomocą *nierozszerzalnych baz produktowych* - UPB (*Unextendible Product Basis*). Ta metoda konstrukcji splątanych stanów PPT została zaproponowana w pracach [133] i [132]. Konstrukcję świadka splątania bazującego na tym stanie i dowód jego nierozkładalności znajdziemy w pracy [134].

**Definicja 3.37.** *Nierozszerzalna baza produktowa to taki ortonormalny układ wektorów produktowych (o rzędzie Schmidta 1), którego dopełnienie ortogonalne nie zawiera żadnych niezerowych wektorów produktowych.*

Dysponując nierozszerzalną bazą produktową  $\{\Psi_1, \dots, \Psi_k\}$ , konstruujemy stan  $\rho$  jako unormowany projektor na jej dopełnienie ortogonalne. Ponieważ dopełnienie ortogonalne nie zawiera żadnych wektorów produktowych, stan  $\rho$  jest splątany. Jednocześnie biorąc jego częściową transpozycję dostajemy macierz  $\rho^\Gamma$ :

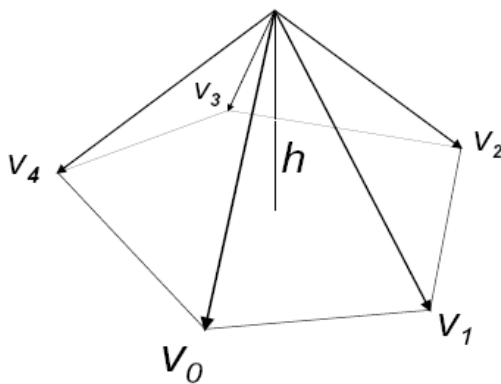
$$\rho^\Gamma = (I - \sum_{i=1}^k |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|)^\Gamma = I - \sum_{i=1}^k (|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|)^\Gamma$$

Ponieważ wektory  $\Psi_i$  są produktowe, projektory na nie przejdą na nowe projektory, rzutujące na wektory wzajemnie prostopadłe. Macierz  $\rho^\Gamma$  jest zatem projektorem na dopełnienie ortogonalne pewnej innej nierozszerzalnej bazy produktowej, jest więc półdodatnio określona. Stan  $\rho$  jest splątany stanem PPT.

Zauważmy, że obraz macierzy tak skonstruowanego stanu  $\rho$ , ani obraz macierzy  $\rho^\Gamma$  nie zawierają żadnych wektorów produktowych. Oznacza to, że wszystkie stany konstruowane w ten sposób są stanami narożnikowymi - łamią kryterium obrazu w sposób maksymalny.

Przykład konstrukcji takiej bazy przytoczymy za [133].

**Przykład 3.38** (Konstrukcja bazy UPB). *Pięć wektorów  $\{\psi_i\}_{i=0}^4 \subset \mathbb{R}^3$  dobieramy tak, by ich końce tworzyły pięciokąt foremny.*



Rysunek 3.3: Układ pięciu wektorów w  $\mathbb{R}^3$  użyty do konstrukcji UPB. Rysunek z pracy [133]

Wysokość ostrosłupa rozpiętego na tym pięciokącie i punkcie  $[0, 0, 0]$  dobieramy tak, by zachodził warunek  $\langle \psi_i | \psi_{i\pm 2} \rangle = 0$  (dodawanie modulo 5). Wektory te mają współrzędne:

$$\psi_i = [\cos(i\frac{2\pi}{5}), \cos(i\frac{2\pi}{5}), \sqrt{\cos(\pi/5)}]$$

Przestrzeń  $\mathbb{R}^3$  jest zanurzona kanonicznie w  $\mathbb{C}^3$ , więc wektory  $\psi_i$  można traktować jako wektory w  $\mathbb{C}^3$ . Konstruujemy układ pięciu ortonormalnych wektorów w  $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$  za pomocą wzoru:

$$\Psi_i = \psi_i \otimes \psi_{2i} \quad (3.29)$$

Łatwo sprawdzić, że wektory  $\Psi_i$  są do siebie prostopadłe (zapewnia to warunek  $\langle \psi_i | \psi_{i\pm 2} \rangle = 0$ ). Nie istnieje wektor produktowy  $\alpha \otimes \beta$  prostopadły do wszystkich pięciu wektorów  $\Psi_i$ . Prostopadłość dwóch wektorów produktowych oznacza, że są one prostopadłe w pierwszym lub drugim czynniku iloczynu tensorowego. Ponieważ wektor  $\alpha \otimes \beta$  jest prostopadły do pięciu wektorów  $\Psi_i$ , przynajmniej do trzech z nich jest on prostopadły w jednym określonym czynniku (powiedzmy w pierwszym). Ponieważ żadne dwa wektory  $\Psi_i$  nie mają w pierwszym czynniku tego samego wektora  $\psi_i$ , oznacza to że  $\alpha$  jest prostopadły do trzech różnych wektorów  $\psi_i$ . Ponieważ każde trzy wektory  $\psi_i$  są liniowo niezależne,  $\alpha = 0$ . Nie istnieje niezerowy wektor produktowy w dopełnieniu ortogonalnym zbioru  $\{\Psi_i\}_{i=0}^4$ . Jest to więc nierozszerzalna baza produktowa.

Dopełnienie ortogonalne tej bazy UPB jest napinane przez cztery wektory  $\Psi_5, \dots, \Psi_8$ , których macierze współrzędnych wyglądają następująco:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(\Phi_5) &= \frac{1}{\sqrt{1+2\alpha^2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathfrak{A}(\Phi_6) &= \frac{1}{\sqrt{1+2\alpha^2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} \\ \mathfrak{A}(\Phi_7) &= \frac{1}{\sqrt{1+2\alpha^2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} & \mathfrak{A}(\Phi_8) &= \frac{1}{\sqrt{1+2\alpha^2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Współczynnik  $\alpha = 1/2\sqrt{\cos(\pi/5)}$ .

Wektory tak skonstruowanej bazy UPB mają rzeczywiste współczynniki. Oznacza to że stan narożnikowy  $\rho$  będący unormowanym projektem na jej dopełnienie ortogonalne jest punktem stałym częściowej transpozycji.

## 3.12 Doświadczalny pomiar świadka splątania. Świadkowie nieliniowi

Na koniec rozdziału należy wspomnieć o tym, jak w praktyce można mierzyć skonstruowanego świadka splątania. Zagadnienie mierzenia świadków splątania w doświadczeniu opisują m.in. prace [135], [136]. Jak się przekonamy w następnym podrozdziale, wszystkie wektory własne świadka nie mogą być produktowe, zatem nie może być on przedstawiony jako  $W_1 \otimes W_2$ , dla pewnych obserwabli działających w przestrzeniach odpowiednio pierwszego i w drugiego podukładu. Obserwabla taka musiałaby być mierzona na całym podukładzie, ale ponieważ w zastosowaniach stanów splątanych podukłady są przestrzennie

rozseparowane, wymóg taki jest niefizyczny. Przeszkodę tę omijamy tak, że nie mierzymy samego świadka splątania, ale przedstawiamy go jako sumę par obserwabli w podukładach:

$$W = \sum_i W_i^{(1)} \otimes W_i^{(2)}, \quad (3.31)$$

dla układów obserwabli  $\{W_i^{(1)}\}_i$  i  $\{W_i^{(2)}\}_i$ . Mierzmy każdy iloczyn wartości oczekiwanych pary lokalnych obserwabli, a następnie dodajemy je do siebie. Problem optymalnego doboru lokalnych (ze względu na liczbę składników sumy lub liczbę niekomutujących baz w przestrzeniach podukładów) poruszają m.in. prace [137] (i referencje tamże) oraz [138], [143], badające problem optymalności dla ortogonalnych układów lokalnych obserwabli.

Dla przykładu, dla świadka  $W = P_+^\Gamma$ , optymalnym rozkładem jest [140]:

$$W = \frac{1}{4}(I \otimes I + \sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z).$$

Chcąc wyznaczyć jego wartość oczekiwaną na stanie, mierzymy na nim wartości oczekiwane obserwabli  $\sigma_i \otimes \sigma_i$  i otrzymujemy:

$$\langle \Psi | \sigma_i \otimes \sigma_i | \Psi \rangle = \mathbb{E}(\sigma_i^{(1)} \otimes \sigma_i^{(2)}),$$

a ponieważ  $\mathbb{E}(\sigma_i) = \text{Tr}(\sigma_i) = 0$ , jest to kowariancja pomiędzy rzutami spinu jednej i drugiej cząstki na  $i$ -ty kierunek. Jeżeli suma tych kowariancji jest mniejsza od 1, to wtedy wartość oczekiwana świadka  $W$  jest ujemna.

Ogólnie, pomiar świadka splątania polega na sumowaniu korelacji pomiędzy wynikami lokalnych obserwabli w jego rozkładzie. Przypomina to pomiar łamania nierówności Bella dla układu w tym stanie. W istocie, pokazuje się, że każdej nierówności Bella odpowiada pewien nieoptymalny świadek splątania [139], [140]. Świadcowie splątania są silniejszym narzędziem wykrywania splątania, niż nierówności Bella.

Wyznaczając korelacje potrzebne do określenia wartości oczekiwanej świadka splątania, dla każdej pary pomiarowej musimy zebrać serię pomiarów par w obu podukładach. Można zapytać, czy dysponując tymi seriami pomiarowymi można wykorzystać do detekcji splątania współczynniki korelacji wyższych rzędów, co odpowiadałoby nieliniowej nierówności w iloczynie tensorowym. Prawa strona takiej nierówności byłaby wynikiem działania na stan pewnego *nieliniowego świadka splątania*.

Ideę nieliniowych świadków splątania wprowadzają prace [141], [142]. Poszukujemy pewnego kwadratowego funkcjonału dodatniego na stanach czystych separowalnych. Ponieważ nie jest on liniowy, dla uzyskania dodatniości na wszystkich stanach separowalnych trzeba założyć jego wklęsłość. Jak dla zadanego świadka postaci  $W = |\phi\rangle\langle\phi|^\Gamma \in \mathcal{W}_1(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$  skonstruować poprawkę kwadratową, która prowadzi do funkcjonału dodatniego na stanach separowalnych mówi twierdzenie 1 z [142]:

**Twierdzenie 3.39** (Poprawka kwadratowa do świadka splątania). *Dla świadka  $W = |\phi\rangle\langle\phi|^\Gamma \in \mathcal{W}_1(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$  i dowolnego wektora  $\psi \in \mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$  zdefiniujemy niehermitowską dwuformę  $X = |\phi\rangle\langle\psi|$ . Wtedy funkcjonal*

$$\mathcal{F}(\rho) = \mathbb{E}_\rho(|\phi\rangle\langle\phi|^\Gamma) - \frac{1}{\text{Sch}_{\max}^2(\psi)} \mathbb{E}_\rho(X^\Gamma) \mathbb{E}_\rho^\dagger(X^\Gamma)$$

*jest dodatni na stanach separowalnych.  $\text{Sch}_{\max}(\psi)$  oznacza maksymalny współczynnik Schmidta wektora  $\Psi$ .*

Możliwość zdefiniowania takiej poprawki dla świadków optymalnych prowadzi do ograniczenia wymiaru ściany stożka  $\mathcal{W}_1(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$ , ponieważ płaszczyznę styczną do ściany można wzdłuż pewnych kierunków wygiąć w kierunku zbioru stanów separowalnych i uzyskać pewną hiperpowierzchnię stopnia drugiego nie mającą punktów wspólnych z wnętrzem tego zbioru. Do zbioru nieliniowych świadków splątania nie stosują się metody opisu stosowane do stożka świadków splątania, dlatego nie będą one bardziej szczegółowo badane w tej pracy.

## Rozdział 4

# Własności spektralne świadków splątania

Obserwable wykrywające splątanie i ogólniej  $k$ -splątanie jako obserwable są pewnymi szczególnymi klasami dwuform hermitowskich. Wiele własności obserwabli hermitowskich jest zakodowanych w ich rozkładzie spektralnym. W rozdziale tym postawimy pytanie - jakie własności spektralne powinien posiadać świadek  $k$ -splątania? Jakie warunki wystarczające i konieczne można sformułować patrząc jedynie na wartości własne i pewne niezmienniki charakteryzujące podprzestrzenie własne świadka. Treść rozdziału pokrywa się w dużej mierze z wnioskami zebranymi w pracy [22].

Na wstępie wypiszemy jako przykłady rozkłady spektralne świadków z rozdziału 3.

**Świadek skonstruowany dla częściowej transpozycji.** Świadek, który wykrywał zadany przykładowy stan NPT (3.13) ma postać (3.14):

$$W_{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jego rozkład spektralny wygląda następująco:

$$W_{\Gamma} = \frac{1}{2} \mathfrak{P}\mathfrak{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \mathfrak{P}\mathfrak{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \mathfrak{P}\mathfrak{A}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \mathfrak{P}\mathfrak{A}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$



**Świadek skonstruowany dla odwzorowania Choi.** Świadek wykrywający stan PPT (3.6), mający postać (3.16):

$$W_{Ch} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

posiada następujący rozkład spektralny:

$$\begin{aligned} W_{Ch} = & 2 \cdot \mathfrak{P}\mathfrak{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + 2 \cdot \mathfrak{P}\mathfrak{A}^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \\ & + 1 \cdot \mathfrak{P}\mathfrak{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \mathfrak{P}\mathfrak{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + 1 \cdot \mathfrak{P}\mathfrak{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \mathfrak{P}\mathfrak{A}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.1)$$

**Świadek skonstruowany dla kryterium realignmentu.** Rozkład spektralny świadka splątania (3.20):

$$W_{real} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right],$$

zbudowanego dla stanu PPT (3.6) wykrywanego przez kryterium realignmentu, jest następujący:

$$W_{real} = \left( \frac{5}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cdot \mathfrak{P}\mathfrak{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \left( \frac{5}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cdot \mathfrak{P}\mathfrak{A}^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{3} \cdot \mathfrak{P}\mathfrak{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \mathfrak{P}\mathfrak{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \mathfrak{P}\mathfrak{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& + \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cdot \mathfrak{P}\mathfrak{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cdot \mathfrak{P}\mathfrak{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& + \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cdot \mathfrak{P}\mathfrak{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \left( \frac{4}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cdot \mathfrak{P}\mathfrak{A}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (4.2)
\end{aligned}$$

Celem niniejszego rozdziału będzie znalezienie ogólnych warunków, które muszą spełniać takie rozkłady spektralne, takich jak maksymalna liczba ujemnych wartości własnych, charakteryzacja jądra macierzy świadka i liczbowe zależności między wartościami własnymi. Znalezionych własności spektralnych będziemy próbowali użyć do powiedzenia czegoś o geometrii zbioru świadków splątania.

## 4.1 Wprowadzenie - definicje i oznaczenia

Rozważać będziemy obserwable hermitowskie działające w przestrzeni iloczynu tensorowego  $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$ . Dla wygody ustalmy, że  $d_1 \leq d_2$ .

**Definicja 4.1.** *Symbolem  $P_V$  będziemy oznaczać projekcję ortogonalną na podprzestrzeń  $V$*

**Definicja 4.2** (Podprzestrzeń dodatnia, zerowa i ujemna). *Rozkład spektralny dowolnej obserwable  $H$  pozwala nam rozłożyć jej dziedzinę na sumę prostą ortogonalnych podprzestrzeni:  $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2} = V_+ \oplus V_0 \oplus V_-$ , gdzie podprzestrzenie  $V_+$ ,  $V_0$  i  $V_-$  są napinane przez wektory własne odpowiadające odpowiednio dodatnim, zerowym i ujemnym wartościom własnym. Będziemy je nazywać odpowiednio podprzestrzemią dodatnią, zerową i ujemną. Podprzestrzeń zerowa to jądro macierzy obserwable.*

**Definicja 4.3** (Część dodatnia i ujemna obserwable). *Dla każdej obserwable hermitowskiej  $H$  można zdefiniować obserwable półdodatnio określone  $H_+ = \sum_i \lambda_i^+ |v_i^+\rangle\langle v_i^+|$  oraz  $H_- = \sum_i (-\lambda_i^-) |v_i^-\rangle\langle v_i^-|$  zwane odpowiednio częścią dodatnią i ujemną obserwable  $H$ . Liczby  $\lambda_i^+$  oraz  $\lambda_i^-$  oznaczają odpowiednio dodatnie i ujemne wartości własne obserwable  $H$ , a  $v_i^+$  i  $v_i^-$  odpowiadające im wektory własne.*

**Definicja 4.4.** *Dla dowolnego stanu  $\Psi \in \mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$  definiujemy podprzestrzeń liniową:  $\tilde{V}_\Psi = \text{ImTr}_2|\Psi\rangle\langle\Psi| \otimes \mathbb{C}^{d_2} \cup \mathbb{C}^{d_1} \otimes \text{ImTr}_1|\Psi\rangle\langle\Psi|$*

Jeżeli wektor  $\Psi$  mamy zadany przez jego rozkład Schmidta  $\Psi = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i \otimes f_i$ , wtedy przestrzeń  $\tilde{V}_\Psi$  występującą w definicji 4.4 możemy zdefiniować równoważnie jako:

$$V_\Psi = \text{span}\{e_1, \dots, e_k\} \otimes \mathbb{C}^{d_2} \cup \mathbb{C}^{d_1} \otimes \text{span}\{f_1, \dots, f_k\}$$



Rodzina ta tworzy krzywą algebraiczną (nad  $\mathbb{R}$ ) stopnia 2. Przecięcie  $\{\Phi(t) : t \in \mathbb{R}\} \cap V_0$  może być jednym z następujących zbiorów:

1. Całą krzywą:  $\{\Phi(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset V_0$ .
2. Krzywa  $\{\Phi(t) : t \in \mathbb{R}\}$  przecina  $V_0$  w nie więcej niż dwóch punktach. Ponieważ  $\sum_{i=1}^k x_i \otimes y_i \in V_0$ , jednym z tych punktów jest zero.

Na początek rozważmy drugi przypadek. W tym przypadku pierwiastek w zerze mianownika funkcji  $F_\Phi$  jest punktem izolowanym, tzn:

$$\exists \epsilon : \{\Phi(t) : t \in (-\epsilon, \epsilon)\} \cap V_0 = \{\Phi(0)\} = \sum_{i=1}^k x_i \otimes y_i$$

Obcięcie funkcji  $F$  do krzywej  $\Phi$  daje funkcję  $F_\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadaną wzorem:

$$F_\Phi(t) = \frac{\langle \Phi(t) | W_- | \Phi(t) \rangle}{\langle \Phi(t) | W_+ | \Phi(t) \rangle} \quad (4.4)$$

Rozwinięcie licznika  $F_\Phi$  daje:

$$\begin{aligned} & \langle \Phi(t) | W_- | \Phi(t) \rangle = \\ & \left\langle \sum_{i=1}^k (x_i + t\tilde{x}_i) \otimes (y_i + t\tilde{y}_i) \middle| W_- \middle| \sum_{i=1}^k (x_i + t\tilde{x}_i) \otimes (y_i + t\tilde{y}_i) \right\rangle \\ & = t^2 \left( t^2 \left\langle \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i \otimes \tilde{y}_i \middle| W_- \middle| \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i \otimes \tilde{y}_i \right\rangle \right. \\ & \quad \left. + 2t \operatorname{Re} \left\langle \sum_{i=1}^k x_i \otimes \tilde{y}_i + \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i \otimes y_i \middle| W_- \middle| \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i \otimes \tilde{y}_i \right\rangle \right. \\ & \quad \left. + \left\langle \sum_{i=1}^k x_i \otimes \tilde{y}_i + \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i \otimes y_i \middle| W_- \middle| \sum_{i=1}^k x_i \otimes \tilde{y}_i + \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i \otimes y_i \right\rangle \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

A dla mianownika dostajemy:

$$\begin{aligned} & \langle \Phi(t) | W_+ | \Phi(t) \rangle = \\ & \left\langle \sum_{i=1}^k (x_i + t\tilde{x}_i) \otimes (y_i + t\tilde{y}_i) \middle| W_+ \middle| \sum_{i=1}^k (x_i + t\tilde{x}_i) \otimes (y_i + t\tilde{y}_i) \right\rangle \\ & = t^2 \left( t^2 \left\langle \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i \otimes \tilde{y}_i \middle| W_+ \middle| \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i \otimes \tilde{y}_i \right\rangle \right. \\ & \quad \left. + 2t \operatorname{Re} \left\langle \sum_{i=1}^k x_i \otimes \tilde{y}_i + \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i \otimes y_i \middle| W_+ \middle| \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i \otimes \tilde{y}_i \right\rangle \right. \\ & \quad \left. + \left\langle \sum_{i=1}^k x_i \otimes \tilde{y}_i + \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i \otimes y_i \middle| W_+ \middle| \sum_{i=1}^k x_i \otimes \tilde{y}_i + \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i \otimes y_i \right\rangle \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dla zadanego  $\{\tilde{x}_i, \tilde{y}_i\}$ , dostajemy funkcję wymierną  $F_\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Taka funkcja jest ilorazem dwóch wielomianów stopnia 2:

$$F_{\{\tilde{x}_i, \tilde{y}_i\}}(t) = \frac{at^2 + bt + c}{dt^2 + et + f} \quad (4.7)$$

Teraz założenie, że supremum funkcji  $F$  na jej dziedzinie jest skończone, implikuje że dla dowolnej krzywej  $\Phi$ , granica funkcji  $F_\Phi$  w zerze jest skończona.

Na początek rozważmy przypadek zdegenerowany, gdy  $\sum_{i=1}^k \tilde{x}_i \otimes \tilde{y}_i \in V_0$ . Wtedy  $a = d = b = e = 0$ , ale  $f$  nie jest zerem (ponieważ zakładamy na tym etapie, że krzywa  $\Phi$  nie jest podzbiorem  $V_0$ ). Granica funkcji  $F_\Phi$  w zerze jest skończona.

Możemy teraz rozważyć przypadek ogólny, kiedy  $d \neq 0$ . Na początek zauważmy, że  $f = 0 \Rightarrow e = 0$ , natomiast  $c = 0 \Rightarrow b = 0$ .

Założmy, że mianownik ma pierwiastek w zerze (na mocy powyższego akapitu, jest to wtedy pierwiastek podwójny), co oznacza, że  $f = 0 \iff \sum_{i=1}^k x_i \otimes \tilde{y}_i + \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i \otimes y_i \in \ker W_+$  (na podstawie wzoru (4.6) i dodatniości obserwabli  $W_+$ ).

Skończoność granicy funkcji  $F_\Phi$  in 0 (na podstawie wzoru (4.5) i dodatniości obserwabli  $W_-$ ) implikuje teraz, że również  $c = 0 \iff \sum_{i=1}^k x_i \otimes \tilde{y}_i + \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i \otimes y_i \in \ker W_-$  (wtedy na mocy powyższego akapitu również  $b = 0$  i licznik ma podwójny pierwiastek w zerze).

Granica jest wtedy równa  $a/d$  i jest skończona. Używając definicji podprzestrzeni  $\tilde{V}_{\sum x_i \otimes y_i}$  i rozpoznając jądra macierzy obserwabli dodatnich  $W_+$  and  $W_-$ , możemy przepisać tę implikację w poniższej formie:

$$\forall \phi \in \tilde{V}_{\sum x_i \otimes y_i} \quad \phi \in V_0 \oplus V_- \Rightarrow \phi \in V_0 \quad (4.8)$$

co daje tezę twierdzenia.

Pozostaje rozważyć sytuację, gdy  $\{\Phi(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \ker W_+$ . To implikuje, że:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i \otimes \tilde{y}_i &\in \ker W_+ \\ \sum_{i=1}^k (\tilde{x}_i \otimes y_i + x_i \otimes \tilde{y}_i) &\in \ker W_+ \end{aligned}$$

Ale teraz na podstawie drugiego warunku w twierdzeniu, również  $\{\Phi(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \ker W_-$ , więc w szczególności:

$$\sum_{i=1}^k (\tilde{x}_i \otimes y_i + x_i \otimes \tilde{y}_i) \in \ker W_-$$

Znów, rozpoznając jądra macierzy i używając definicji podprzestrzeni  $\tilde{V}_{\sum x_i \otimes y_i}$ , dostajemy tezę twierdzenia.  $\square$

Druga część twierdzenia prowadzi do wniosku:

**Wniosek 4.6.** *Jeżeli przestrzeń zerowa świadka  $k$ -splątania nie zawiera niezerowych wektorów  $k$ -separowalnych, to przestrzeń  $V_0 \oplus V_-$  nie zawiera niezerowych wektorów  $k$ -separowalnych.*

Wzmacniając warunki konieczne, można dostać warunki wystarczające na bycie świadkiem  $k$ -splątania.

**Twierdzenie 4.7.** *Rozważmy rozbitcie przestrzeni  $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$  na sumę prostą trzech podprzestrzeni:  $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2} = V_+ \oplus V_0 \oplus V_-$ . Niech  $W_\pm$  będą dowolnymi obserwabliami dodatnio określonymi, dla których obrazy ich macierzy równają się odpowiednio  $V_\pm$ .*

*Zdefiniujmy podprzestrzeń  $\hat{V} = \bigcap_{\Psi \in V_0 \cap S_k} \hat{V}_\Psi^\perp$ . Jeżeli zachodzą warunki:*

1.  $V_- \supsetneq \{0\}$ .
2.  $\forall \Psi \in \mathcal{S}_k \ \Psi \in V_0 \oplus V_- \Rightarrow \Psi \in V_0$ .
3.  $V_- \subset \hat{V}$ .

Istnieje wtedy taka liczba rzeczywista  $\lambda > 0$  dla której obserwabla  $\lambda W_+ - W_-$  jest świadkiem  $k$ -splątania.

**Dowód:** Obserwabla jest świadkiem  $k$ -splątania, jeżeli posiada przynajmniej jedną ujemną wartość własną. Gwarantuje to pierwsze założenie twierdzenia.

Dla każdego wektora  $\Psi \in \mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$  wprowadzamy rozkład:  $\Psi = \hat{\Psi} + \tilde{\Psi}$ , gdzie  $\hat{\Psi} \in \hat{V}$  a  $\tilde{\Psi} \in \hat{V}^\perp$ . Używając rozkładu  $W = W_+ - W_-$  możemy zapisać drugi warunek w definicji świadka splątania (3.4) jako:

$$\begin{aligned} \forall \hat{\Psi} \in \hat{V} \quad \forall \tilde{\Psi} \in \hat{V}^\perp : \hat{\Psi} + \tilde{\Psi} \in \mathcal{S}_k \quad & \langle \hat{\Psi} + \tilde{\Psi} | W_+ | \hat{\Psi} + \tilde{\Psi} \rangle \\ & \geq \langle \hat{\Psi} + \tilde{\Psi} | W_- | \hat{\Psi} + \tilde{\Psi} \rangle = \langle \hat{\Psi} | W_- | \hat{\Psi} \rangle. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Wektor  $\tilde{\Psi}$  jest prostopadły do obrazu macierzy  $W_-$  na mocy trzeciego założenia, stąd ostatnia równość. Gdy  $\hat{\Psi} = 0$ , wtedy warunek (4.9) jest spełniony. Wystarczy więc skupić się na wektorach  $\Psi$  dla których  $\hat{\Psi} \neq 0$ . Jeżeli warunek (4.9) jest spełniony dla wektora  $\Psi$ , wtedy również dla wektora  $\alpha\Psi$ , gdzie  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ . Wystarczy zatem ograniczyć kwantyfikowany zbiór do zbioru wektorów  $\Psi$ , dla których  $\|\hat{\Psi}\| = 1$ . Warunek (4.9) wygląda teraz tak

$$\begin{aligned} \forall \hat{\Psi} \in \hat{V} : \|\hat{\Psi}\| = 1 \quad \forall \tilde{\Psi} \in \hat{V}^\perp : \hat{\Psi} + \tilde{\Psi} \in \mathcal{S}_k \\ \langle \hat{\Psi} + \tilde{\Psi} | W_+ | \hat{\Psi} + \tilde{\Psi} \rangle \geq \langle \hat{\Psi} | W_- | \hat{\Psi} \rangle. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Podprzestrzeń  $\hat{V}$  jest podprzestrzenią produktową. By to pokazać, wprowadźmy oznaczenia

$$\begin{aligned} A_\Psi &= \text{ImTr}_2 |\Psi\rangle\langle\Psi| \\ B_\Psi &= \text{ImTr}_1 |\Psi\rangle\langle\Psi| \end{aligned}$$

i zapiszmy definicję przestrzeni  $\tilde{V}_\Psi$  przy ich użyciu:

$$\tilde{V}_\Psi = \text{span}\{A_\Psi \otimes \mathbb{C}^{d_2} \cup \mathbb{C}^{d_1} \otimes B_\Psi\}.$$

Jej dopełnienie ortogonalne jest więc równe:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_\Psi^\perp &= (A_\Psi \otimes \mathbb{C}^{d_2})^\perp \cap (\mathbb{C}^{d_1} \otimes B_\Psi)^\perp = \\ &= A_\Psi^\perp \otimes \mathbb{C}^{d_2} \cap \mathbb{C}^{d_1} \otimes B_\Psi^\perp = A_\Psi^\perp \otimes B_\Psi^\perp \end{aligned}$$

Podprzestrzeń  $\tilde{V}_\Psi^\perp$  jest zatem podprzestrzenią produktową. Przestrzeń  $\hat{V}$  jest przekrojem takich podprzestrzeni, jest więc również podprzestrzenią produktową:

$$\begin{aligned} \hat{V} &= \bigcap_{\Psi \in \mathcal{S}_k \cap V_0} \tilde{V}_\Psi^\perp = \bigcap_{\Psi \in \mathcal{S}_k \cap V_0} (A_\Psi^\perp \otimes B_\Psi^\perp) \\ &= (\bigcap_{\Psi \in \mathcal{S}_k \cap V_0} A_\Psi^\perp) \otimes (\bigcap_{\Psi \in \mathcal{S}_k \cap V_0} B_\Psi^\perp). \end{aligned}$$

Oznaczmy czynniki iloczynu tensorowego jako  $\hat{V}_1 = \bigcap_{\Psi \in \mathcal{S}_k \cap V_0} A_\Psi^\perp$  and  $\hat{V}_2 = \bigcap_{\Psi \in \mathcal{S}_k \cap V_0} B_\Psi^\perp$ .

Ponieważ  $\hat{V} = \hat{V}_1 \otimes \hat{V}_2$  jest podprzestrzenią produktową, można tak wybrać bazy przestrzeni  $\mathbb{C}^{d_1}$  i  $\mathbb{C}^{d_2}$  by podprzestrzenie  $\hat{V}_1$  i  $\hat{V}_2$  były generowane jako  $\hat{V}_1 = \text{span}\{e_1, \dots, e_{\dim \hat{V}_1}\}$  i analogicznie  $\hat{V}_2 = \text{span}\{f_1, \dots, f_{\dim \hat{V}_2}\}$ . W takich bazach macierz  $\mathfrak{A}(\hat{\Psi})$  elementu  $\hat{\Psi} \in \hat{V}$  jest macierzą, która posiada zera poza lewym górnym blokiem wymiaru  $\dim V_1 \times \dim V_2$ .

Od teraz będziemy używać takiej bazy. Macierz  $\mathfrak{A}(\hat{\Psi})$  jest więc niezerowa tylko w jej górnym lewym bloku o rozmiarze  $\dim \hat{V}_1 \times \dim \hat{V}_2$ , a macierz  $\mathfrak{A}(\tilde{\Psi})$  jest niezerowa tylko poza jej lewym górnym blokiem rozmiaru  $\dim \hat{V}_1 \times \dim \hat{V}_2$ . Oznacza to, że dowolny wektor  $\Psi = \hat{\Psi} + \tilde{\Psi}$  może być  $k$ -separowalny tylko wtedy, gdy jego składowa  $\hat{\Psi}$  jest  $k$ -separowalna. (Macierz ma rząd mniejszy niż  $k$ , tylko wtedy, gdy każdy jej blok ma rząd mniejszy niż  $k$ ).

Teraz dla zadanego wektora  $\hat{\Psi} \in \mathcal{S}_k \cap \hat{V}$  zdefiniujemy zbiór

$$U_{\hat{\Psi}} = \{\tilde{\Psi} \in \hat{V}^\perp : \hat{\Psi} + \tilde{\Psi} \in \mathcal{S}_k\}. \quad (4.11)$$

Używając powyższych obserwacji i oznaczeń, można przepisać warunek (4.10) w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \forall \hat{\Psi} \in \hat{V} \cap \mathcal{S}_k : \|\hat{\Psi}\| = 1 \quad \forall \tilde{\Psi} \in U_{\hat{\Psi}} \\ \langle \hat{\Psi} + \tilde{\Psi} | W_+ | \hat{\Psi} + \tilde{\Psi} \rangle \geq \langle \hat{\Psi} | W_- | \hat{\Psi} \rangle. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Zbiory  $U_{\hat{\Psi}}$  są:

- niepuste: Zero jest zawsze elementem.
- domknięte (w topologii metrycznej przestrzeni  $\hat{V}^\perp$ ):

Na mocy izomorfizmu  $\mathfrak{A}$  zdefiniowanego wzorem (3.2), zbiór  $\mathfrak{A}(U_{\hat{\Psi}})$  jest zbiorem macierzy o ustalonym lewym górnym bloku rozmiaru  $\dim \hat{V}_1 \times \dim \hat{V}_2$  i rzędzie mniejszym równym  $k$  (bezpośrednie przeformułowanie definicji (4.11) w języku macierzy współrzędnych). Jest to zbiór wspólnych zer wszystkich minorów rozmiaru  $k+1$  (wyrazy macierzowe z lewego górnego bloku traktujemy jako ustalone stałe). Minory są funkcjami wielomianowymi, zatem ciągłymi, więc zbiór  $U_{\hat{\Psi}}$  jest przeciwobrazem w funkcji ciągłej domkniętego zbioru  $\{0\}$ , i jako taki jest domknięty.

Zdefiniujemy teraz funkcję ciągłą  $f_{\hat{\Psi}} : U_{\hat{\Psi}} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  przez lewą stronę nierówności (4.10)

$$f_{\hat{\Psi}} = \langle \hat{\Psi} + \tilde{\Psi} | W_+ | \hat{\Psi} + \tilde{\Psi} \rangle. \quad (4.13)$$

Na mocy drugiego i trzeciego założenia mamy:

$$\forall \Psi \in \mathcal{S}_k \quad \Psi \in V_0 \oplus V_- \Rightarrow \Psi \in V_0 \Rightarrow P_{\hat{V}} \Psi = 0$$

Korzystając teraz z zasady kontrapozycji:

$$\forall \Psi \in \mathcal{S}_k \quad P_{\hat{V}} \Psi \neq 0 \Rightarrow \Psi \notin V_0 \oplus V_- \Rightarrow \langle \Psi | W_+ | \Psi \rangle > 0.$$

Oznacza to, że dla dowolnego  $\tilde{\Psi} \in U_{\hat{\Psi}}$  funkcja  $f_{\hat{\Psi}}$  przyjmuje wartości ściśle dodatnie. Obraz funkcji  $f_{\hat{\Psi}}$  jest więc domkniętym podzbiorem  $\mathbb{R}_+$ . Infimum funkcji  $f_{\hat{\Psi}}$  na jej dziedzinie jest więc ściśle dodatnie. Oznaczmy je przez  $c_{\hat{\Psi}}$ .

Rozważmy teraz funkcję ciągłą  $c : \hat{\Psi} \rightarrow c_{\hat{\Psi}}$ , zdefiniowaną na zbiorze  $\{\hat{\Psi} : \hat{\Psi} \in \hat{V} \wedge \|\Psi\| = 1\}$ . Jej dziedzina jest zwarta, więc funkcja  $c$  jest ograniczona z dołu, a jej infimum  $C$  jest osiąganym w pewnym punkcie dziedziny i jako takie jest ściśle dodatnie. Wynik ten pozwala nam ograniczyć lewą stronę nierówności w (4.10) z dołu przez wartość infimum  $C$ :

$$\langle \hat{\Psi} + \tilde{\Psi} | W_+ | \hat{\Psi} + \tilde{\Psi} \rangle \geq C$$

Na tym samym zbiorze  $\{\hat{\Psi} : \hat{\Psi} \in \hat{V} \cap \mathcal{S}_k \wedge \|\hat{\Psi}\| = 1\}$  mamy również zadaną poprzez prawą stronę nierówności (4.10) funkcję ciągłą przyjmującą wartości rzeczywiste:

$$g(\hat{\Psi}) = \langle \hat{\Psi} | W_- | \hat{\Psi} \rangle.$$

Znowu, z powodu zwartości dziedziny, funkcja ta jest ograniczona z góry. Oznaczmy jej maksimum przez  $G$ .

Teraz skalując obserwabę  $W_+$  przez odpowiednio duży czynnik  $\lambda$  można dostać  $C \geq G$ . Gwarantuje to, że nierówność w warunku (4.9) jest spełniona dla dowolnego wektora o rzędzie Schmidta  $k$ , a to oznacza, że obserwabla  $\lambda W_+ - W_-$  jest świadkiem  $k$ -splątania.  $\square$

Zbiór stałych skalujących  $\lambda$ , dla których obserwabla  $\lambda W_+ - W_-$  jest świadkiem splątania, tworzy domkniętą z dołu półprostą rzeczywistą:

$$\lambda \in [\lambda_{min}, \dots, \infty)$$

Niestety zadanie wyznaczenia minimalnej stałej skalującej jest trudne, pewne szczególne przypadki i oszacowania dla przypadków ogólnych będą dyskutowane w podrozdziale 4.5

### 4.3 Podprzestrzenie nie zawierające niezerowych wektorów $k$ -separowalnych

**Lemat 4.8.** *Zbiór  $\mathcal{S}_k$  jest rozmaitością algebraiczną wymiaru  $(d_1 - k) \times (d_2 - k)$ .*

**Dowód:** Zbiór  $\mathcal{S}_k$  to zbiór wektorów, których macierze współrzędnych mają rząd mniejszy równy  $k$ . Zbiór takich macierzy jest zerem ideału wszystkich minorów rozmiaru  $k + 1$  (macierz ma rząd mniejszy równy  $k$ , jeżeli zerują się jej wszystkie minory rozmiaru  $k + 1$ ). Jest ich  $\binom{d_1}{k+1} \times \binom{d_2}{k+1}$ , ale lokalnie tylko  $(d_1 - k) \times (d_2 - k)$  wielomianów jest niezależnych.

Weźmy dowolny punkt regularny  $\Psi$  rozmaitości  $\mathcal{S}_k$ . Punkty regularne tej rozmaitości odpowiadają macierzom o rzędzie równym  $k$ . Zmieńmy tak bazę, by przyjął on postać:

$$\left[ \begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \quad (4.14)$$

Wokół punktu  $\Psi$  istnieje otoczenie otwarte, w którym wszystkie macierze mają lewy górny blok rozmiaru  $k$  nieosobliwy. Takie macierze mają  $k$  pierwszych wierszy (równoważnie,  $k$  pierwszych kolumn) liniowo niezależnych. By stwierdzić należenie do zbioru  $\mathcal{S}_k$ ,



trzeba sprawdzić, czy dowolna kolumna poza pierwszymi  $k$  (dowolny wiersz poza pierwszymi  $k$ ) jest kombinacją liniową pierwszych  $k$ . ... Stwierdzenie tego wymaga sprawdzenia  $(d_1 - k) \times (d_2 - k)$  warunków postaci:

$$\det \left[ \begin{array}{ccc|c} b_{11} & \dots & b_{1k} & b_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kk} & b_{ki} \\ \hline b_{j1} & \dots & b_{jk} & b_{ji} \end{array} \right] = 0.$$

Wymiar przestrzeni stycznej w punkcie regularnym tej rozmaitości jest więc równy  $d_1 \times d_2 - (d_1 - k) \times (d_2 - k)$ .  $\square$

**Twierdzenie 4.9.** Podprzestrzeń  $V \subset \mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$  wymiaru większego niż  $(d_1 - k) \times (d_2 - k)$  zawiera stan  $k$ -separowalny.

**Dowód:** Pytamy o rozmiar maksymalnej podprzestrzeni  $V$  w przestrzeni macierzy  $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}(d_1 \times d_2)$ , nie zawierającej niezerowej macierzy rzędu  $k$ . Zauważmy że:

- $\forall \alpha \in \mathbb{C}^* \Psi \in \mathcal{S}_k \Rightarrow \alpha\Psi \in \mathcal{S}_k$ ,
- $\forall \alpha \in \mathbb{C}^* \Psi \in V \Rightarrow \alpha\Psi \in V$ ,

co pozwala rozważać projektywizacje tych zbiorów w przestrzeni rzutowej.

Podprzestrzeń liniowa jest rozmaitością algebraiczną - generuje ją ideał wielomianów stopnia 1. Jej projektywizacja  $PV$  ma wymiar  $\dim V - 1$ .

Z lematu (4.8) wiemy, że zbiór  $\mathcal{S}_k$  jest również rozmaitością algebraiczną wymiaru  $d_1 \times d_2 - (d_1 - k) \times (d_2 - k)$ . Wymiar jej projektywizacji  $P\mathcal{S}_k$  jest natomiast równy  $d_1 \times d_2 - (d_1 - k) \times (d_2 - k) - 1$ .

Twierdzenie *projective dimension theorem* ([76], strona 48) mówi, że dowolne dwie podrozmaitości przestrzeni rzutowej mają punkt wspólny, jeżeli suma ich wymiarów jest większa lub równa wymiarowi przestrzeni rzutowej w której są zanurzone <sup>1</sup>. Oznacza to, że dowolna podprzestrzeń będzie zawierała niezerowy wektor  $k$ -separowalny, jeżeli:

$$\dim PV + \dim P\mathcal{S}_k \geq \dim \mathbb{C}P^{d_1 \times d_2 - 1},$$

czyli gdy:

$$\dim V - 1 + d_1 \times d_2 - (d_1 - k) \times (d_2 - k) - 1 \geq d_1 \times d_2 - 1.$$

Jeżeli więc  $\dim V > (d_1 - k) \times (d_2 - k)$ , wtedy podprzestrzeń  $V$  zawiera stan  $k$ -separowalny.  $\square$

Przypadek szczególny tego wyniku w zastosowaniu do mechaniki kwantowej znajdujemy np. w pracy [144].

Twierdzenie 4.9 prowadzi do ciekawego wniosku algebraicznego. Załóżmy że mamy dwie dowolne macierze kwadratowe  $A$  i  $B$ . Twierdzenie Hilberta o zerach (*Nullstellensatz*) dla geometrii rzutowej orzeka, że istnieje ich kombinacja liniowa, o wyznaczniku równym 0, czyli o rzędzie mniejszym od maksymalnego (wyznacznik kombinacji jest wielomianem jednorodnym we współczynnikach kombinacji). Powyższe twierdzenie pozwala uogólnić ten fakt na kombinacje liniowe macierzy prostokątnych:

<sup>1</sup>Jest to fakt, który odróżnia geometrię rzutową od afinicznej. Różnicę tę uwidacznia najprostszy przypadek szczególny powyższego twierdzenia - dwie proste na płaszczyźnie rzutowej zawsze się przecinają.

**Wniosek 4.10.** *Rozważmy zbiór macierzy prostokątnych  $\{X_i\}_{i=1,\dots,k} \subset \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(n \times m)$ . Jeżeli tylko  $|n - m| + 1 < k$ , wtedy istnieje kombinacja macierzy  $X_i$  o rzędzie mniejszym od maksymalnego.*

**Dowód:** Dla ustalenia uwagi przyjmujemy, że  $n > m$ . Dowód dla przypadku  $n < m$  przebiega analogicznie. Gdy  $n = m$  mamy znany fakt, że zawsze istnieje osobliwa kombinacja liniowa dwóch dowolnych macierzy kwadratowych.

Rozważmy  $(km - n)$  wymiarową podprzestrzeń przestrzeni macierzy  $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}(m \times k)$ . Zapytajmy, czy zawiera ona macierz rzędu jeden. W tym celu znajdujemy dopełnienie ortogonalne tej podprzestrzeni napinane przez  $n$  macierzy  $M_1, \dots, M_n$  i pytamy, czy istnieje macierz  $xy^T \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(m \times k)$  rzędu 1 prostopadła do wszystkich  $M_i$ :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(M_1^\dagger xy^T) &= 0 \\ \vdots & \\ \text{Tr}(M_n^\dagger xy^T) &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

co wykorzystując cykliczność śladu można zapisać jako:

$$\begin{aligned} y^T M_1^\dagger x &= 0 \\ \vdots & \\ y^T M_n^\dagger x &= 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Jest to układ równań liniowych ze względu na  $x$ . Pytamy, czy istnieje takie niezerowe  $y \in \mathbb{C}^k$ , by istniały niezerowe rozwiązania układu:

$$\begin{bmatrix} y^T M_1^\dagger \\ \vdots \\ y^T M_n^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k y_i \begin{bmatrix} e_i M_1^\dagger \\ \vdots \\ e_i M_n^\dagger \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k y_i Y_i \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Wprowadziliśmy  $k$  macierzy  $Y_i \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(n \times m)$  takich, że wiersze  $i$ -tej macierzy  $Y_i$  są  $i$ -tymi wierszami kolejnych macierzy  $M_1^\dagger, \dots, M_n^\dagger$ .

Układ równań (4.17) ma niezerowe rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnej kombinacji  $y$  macierz  $\sum_{p=1}^k y_p X_p$  ma rząd mniejszy od  $m$ , czyli od maksymalnego.

Z drugiej zaś strony, twierdzenie (4.9) orzeka, że jeżeli podprzestrzeń przestrzeni  $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}(m \times k)$  ma wymiar większy od  $(k - 1) \times (m - 1)$ , czyli kiedy jej dopełnienie ortogonalne ma wymiar  $n < k + m - 1$ , wtedy podprzestrzeń zawiera stan separowalny, a więc istnieje kombinacja  $\sum_{p=1}^k y_p X_p$  o rzędzie mniejszym od maksymalnego.  $\square$

Znamy już górne ograniczenie wymiaru podprzestrzeni nie zawierającej stanu  $k$ -separowalnego. Kolejny lemat pokazuje w sposób konstruktywny, że jest to najmniejsze ograniczenie górne.

**Lemat 4.11** (O maksymalnej podprzestrzeni bez niezerowych wektorów  $k$ -separowalnych). *Podprzestrzeń  $V_{max}^k$  napinana przez rodzinę  $(d_1 - k) \times (d_2 - k)$  liniowo niezależnych wektorów:*

$$\left\{ \sum_{l=0}^{k+1} e_{i+l} \otimes f_{j+l} \right\}_{i=1,\dots,d_1-k; j=1,\dots,d_2-k} \quad (4.18)$$

*nie zawiera stanu  $k$ -separowalnego*

**Dowód:** Przekątną macierzy rozumiemy jako zbiór wyrazów o takiej samej różnicy indeksów. Przez numer przekątnej będziemy rozumieć tą różnicę. Przekątne macierzy wymiaru  $d_1 \times d_2$  mają numery od  $1 - d_2, \dots, d_1 - 1$ .

Dowód przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na numer przekątnej. Macierz współrzędnych dowolnego wektora z podprzestrzeni  $V_{max}^k$  ma pierwsze  $k$  i ostatnie  $k$  przekątnych zerowych. Załóżmy teraz, że istnieje w podprzestrzeni  $V_{max}^k$  wektor  $k$ -separowalny.

Udowodnimy, że jeżeli wszystkie przekątne macierzy współrzędnych takiego wektora o numerze mniejszym równym  $n$  są zerowe, to przekątna  $n + 1$ -sza też musi być zerowa.

Ponieważ wektor jest  $k$ -separowalny, jego macierz współrzędnych ma rząd  $k$ . Oznacza to, że zeruje się każdy minor rozmiaru  $k + 1$ , w szczególności zaś te minory, których diagonalą jest podzbiorem  $n + 1$ -szej przekątnej. Na mocy założenia indukcyjnego takie minory są wyznacznikami macierzy górnotrójkątnych, więc iloczynami elementów na diagonalu. Zerowanie się wszystkich takich minorów tłumaczy się więc na zerowanie się wszystkich  $k + 1$ -krotnych iloczynów elementów z  $n + 1$ -szej przekątnej. By mogło tak być, najwyżej  $k$  elementów  $n + 1$ -szej przekątnej może być niezerowych, pozostałe natomiast muszą być zerami. Przekątna o numerze  $n + 1 - d_2$  ( $n + 1$ -sza przekątna) ma długość  $n + 1$ .

Na wartości wyrazów na  $n + 1$ -szej przekątnej mają wpływ współczynniki kombinacji przy wektorach bazy dla  $i - j = n + 1$ . Numerujemy te współczynniki indeksem  $i$  wektora bazy przy którym stoją. Podobnie ponumerujemy wyrazy na przekątnej macierzy. Związek wyrazów na przekątnej  $b_i$  ze współczynnikami kombinacji  $\alpha_i$  jest wyrażony układem  $n + 1$  równań na  $n + 1 - k$  niewiadomych:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n+1} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

W układzie tym najwyżej  $k$  równań może mieć prawą stronę różną od zera. Wyrzucimy te równania z układu. Wykreślając dowolne  $k$  wierszy z macierzy równania, dostajemy kwadratową macierz nieosobliwą. Układ ma dokładnie jedno, zerowe rozwiązanie. Dostajemy więc, że prawe strony odrzuconych równań też były zerami, więc zerowa jest cała  $n + 1$ -sza przekątna.

Tym sposobem wykazaliśmy indukcyjnie, że zerują się wszystkie przekątne macierzy współrzędnych dowolnego  $k$ -separowalnego wektora w podprzestrzeni  $V_{max}^k$ .  $\square$

Ciekawą rzeczą byłoby udowodnienie, że wychodząc z takiej podprzestrzeni i używając lokalnych operacji liniowych, można otrzymać dowolną przestrzeń o maksymalnym wymiarze niezawierającą niezerowych wektorów  $k$ -separowalnych:

**Hipoteza 4.12.** *Dla dowolnej maksymalnej podprzestrzeni nie zawierającej wektorów  $k$ -separowalnych istnieją bazy przestrzeni  $\mathbb{C}^{d_1}$  i  $\mathbb{C}^{d_2}$  takie, że istnieje baza podprzestrzeni postaci (4.18).*

## 4.4 Sygnatury świadków splątania

Znajomość ograniczenia na wymiar podprzestrzeni nie zawierającej stanu  $k$ -separowalnego, pozwala zapisać warunki konieczne na sygnatury świadków  $k$ -splątania.

Oczywiście, nie należy się spodziewać żadnego ograniczenia górnego liczby dodatnich wartości własnych, poza oczywistym ograniczeniem, że musi istnieć przynajmniej jedna ujemna. Jeżeli mamy wektor własny  $v^-$  przy wartości własnej ujemnej, to dodanie do świadka  $k$ -splątania dowolnej obserwabli dodatniej zerującej się na wektorze  $v^-$ , nie wyprowadzi nas poza zbiór świadków  $k$ -splątania. Jeżeli dodamy taką obserwabłę z odpowiednio dużym współczynnikiem kombinacji, to możemy uczynić dodatnimi wszystkie wartości własne ujemne, poza jedną przy wektorze  $v^-$ . Oczywiście, robimy to niszcząc optymalność świadka splątania. Interesującym jest więc pytanie o sygnaturę przy dodatkowym założeniu optymalności świadka splątania.

Możemy natomiast na gruncie poprzedniego rozdziału spodziewać się górnego ograniczenia liczby wartości własnych ujemnych, czy też dolnego ograniczenia liczby wartości własnych dodatnich.

Zacznijmy od przypadku, kiedy w jądrze macierzy świadka splątania nie ma wektorów  $k$ -separowalnych.

**Lemat 4.13.** *Świadek splątania działający w przestrzeni  $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$ , którego macierz nie zawiera w swoim jądrze wektorów separowalnych, posiada:*

- przynajmniej  $k(d_1 + d_2 - k)$  wartości własnych dodatnich
- przynajmniej jedną wartość własną ujemną.
- najwyżej  $(d_1 - k)(d_2 - k)$  wartości własnych ujemnych.

**Dowód:**

1. Na mocy wniosku (4.6) z twierdzenia (4.5), jeżeli w jądrze macierzy świadka splątania nie ma wektorów  $k$ -separowalnych, wtedy nie ma ich w całej podprzestrzeni  $V_0 \oplus V_-$ . Maksymalny wymiar przestrzeni nie zawierającej niezerowych wektorów  $k$ -separowalnych, wynosi  $(d_1 - k) \times (d_2 - k)$ . Minimalny wymiar jej dopełnienia ortogonalnego, czyli podprzestrzeni  $V_+$  wynosi  $d_1 d_2 - (d_1 - k) \times (d_2 - k) = k(d_1 + d_2 - k)$ .
2. Żeby obserwabla nie była półdodatnio określona, musi posiadać przynajmniej jedną wartość własną ujemną.
3. Znowu wykorzystujemy fakt, że w podprzestrzeni ujemnej nie może być wektorów  $k$ -separowalnych.  $\square$

Trudniej jest powiedzieć coś o sygnaturze świadka bez dodatkowego założenia o braku wektorów  $k$ -separowalnych w jądrze jego macierzy. Niemniej można to zrobić w szczególnych przypadkach, co pozwala na ograniczenie z dołu wymiaru podprzestrzeni dodatniej dowolnego świadka  $k$ -splątania.

**Lemat 4.14.** *Dowolny świadek  $k$ -splątania działający w przestrzeni  $\mathbb{C}^{k+1} \otimes \mathbb{C}^{k+1}$  posiada dokładnie jedną ujemną wartość własną, a jądro jego macierzy jest izomorficzne z pewną podprzestrzenią macierzy nilpotentnych o rzędzie mniejszym od  $k$ .*

**Dowód:** Lemat 4.13 ogranicza wymiar podprzestrzeni ujemnej świadka do 1. Z drugiej strony, świadek musi posiadać przynajmniej jedną ujemną wartość własną. Dlatego dowolny świadek  $k$ -splątania w przestrzeni  $\mathbb{C}^{k+1} \otimes \mathbb{C}^{k+1}$  posiada dokładnie jedną ujemną wartość własną.

Można tak obrócić unitarnie bazy w przestrzeniach podukładów, by sprowadzić wektor własny  $\Psi_1$  odpowiadający tej wartości własnej do jego postaci Schmidta. Od tego momentu pozostaniemy w tych bazach i oznaczymy macierz współrzędnych wektora  $\Psi$  przez  $A_-$ :

$$A_- = \mathfrak{A}(\Psi) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1} \end{bmatrix}$$

Weźmy dowolny wektor w jądrze macierzy świadka i oznaczymy go przez  $\Psi_0$ , a jego macierz współrzędnych przez  $A_0$ . Podprzestrzeń napinana przez  $\Psi_-$  i  $\Psi_0$  jest podprzestrzenią przestrzeni  $V_- \otimes V_0$ . Drugi punkt twierdzenia 4.5 mówi, że dowolny wektor  $k$ -separowalny w tej podprzestrzeni jest elementem jądra, czyli w naszym przypadku jest równoległy do wektora  $\Psi_0$ . Oznacza to, że zachodzi implikacja:

$$\det(\alpha A_0 + \beta A_-) = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

jeżeli  $\alpha = 0$ , to jedynym rozwiązaniem równania jest  $\beta = 0$ . Odrzucamy ten przypadek i dzielimy równanie przez  $\alpha^{k+1}$ . Iloraz  $\beta/\alpha$  oznaczamy dalej jako  $-x$ . Jednocześnie wyłączamy na prawą i lewą stronę nawiasu czynnik  $A_-^{1/2}$ :

$$\det A_-^{1/2}(A_-^{-1/2}A_0A_-^{-1/2} - xI)A_-^{1/2} = 0 \Leftrightarrow \det(A_-^{-1/2}A_0A_-^{-1/2} - xI) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Warunek ten oznacza, że macierz  $A = A_-^{-1/2}A_0A_-^{-1/2}$  ma wszystkie wartości własne równe 0. Ma ona zatem reprezentację Jordana:

$$A = X \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \epsilon_k \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} X^{-1}$$

dla pewnej macierzy nieosobliwej  $X$ . Liczby  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$  przyjmują wartości 0 lub 1. Jeżeli wszystkie te liczby są równe 1, to przestrzeń  $\tilde{V}_{\Psi_0}$  (zdefiniowana w definicji 4.4) jest przestrzenią wszystkich wektorów postaci:

$$\tilde{V}_{\Psi_0} = \{\Psi : \Psi = \mathfrak{A}^{-1}A_-^{1/2}XVX^{-1}A_-^{1/2} \wedge V_{k+1,1} = 0\}.$$

Widzimy, że do tej przestrzeni należy również wektor  $\Psi_-$ , co przeczy trzeciemu warunkowi w 4.5. Oznacza to, że macierz współrzędnych dowolnego wektora w jądrze macierzy świadka jest nilpotentna i ma rząd mniejszy niż  $k$ .  $\square$

**Definicja 4.15.** Liczba  $\text{nil}(n)$  oznacza wymiar maksymalnej podprzestrzeni macierzy nilpotentnych rzędu mniejszego niż  $n - 1$  w  $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}(n)$ .

**Wniosek 4.16.** Dowolny świadek  $k$ -splątania działający w przestrzeni  $\mathbb{C}^{k+1} \otimes \mathbb{C}^{k+1}$  posiada dokładnie jedną ujemną wartość własną i przynajmniej  $k^2 + 2k - \text{nil}(k + 1)$  dodatnich wartości własnych.

**Dowód:** Z lematu 4.14 wiemy, że taki świadek posiada dokładnie jedną ujemną wartość własną i najwyżej  $\text{nil}(k + 1)$  zerowych wartości własnych.  $\square$

W przypadku świadka splątania w  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  mamy następujący:

**Wniosek 4.17.** Dowolny świadek splątania dla dwóch qubitów posiada dokładnie jedną ujemną wartość własną i dokładnie trzy dodatnie wartości własne.

**Dowód:** Lemat 4.14 mówi, że w jądrze macierzy świadka mogą być tylko stany o rzędzie Schmidta 0.  $\square$

W inny sposób fakt ten udowodniany jest w pracach [145], [146], [147]

W przypadku świadka 2-splątania dla dwóch qutritów mamy następujące ograniczenia na sygnaturę:

**Wniosek 4.18.** Dowolny świadek 2-splątania dla dwóch qutritów posiada dokładnie jedną ujemną wartość własną i co najmniej sześć dodatnich.

**Dowód:** Obliczmy liczbę  $\text{nil}(3)$ . Maksymalna podprzestrzeń macierzy rzędu jeden w  $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}(3 \times 3)$  jest postaci:

$$\{|\Psi\rangle\langle\Phi| : \Phi \in \mathbb{C}^3\},$$

dla dowolnego wektora  $\Phi \in \mathbb{C}^3$ . Wśród tych macierzy nilpotentne są tylko te, dla których  $\Phi \perp \Psi$ . Oznacza to, że maksymalną przestrzenią macierzy nilpotentnych rzędu jeden jest podprzestrzeń:

$$\{|\Psi\rangle\langle\Phi| : \Phi \in \Psi^\perp\},$$

, więc liczba  $\text{nil}(3)$  jest równa 2.  $\square$

Dowód wniosku pokazuje jawnie konstrukcję jądra macierzy dla świadka, który spełnia warunki konieczne 4.5, ale nie spełnia warunków wystarczających 4.7. By świadek  $k$ -splątania w  $\mathbb{C}^{k+1} \otimes \mathbb{C}^{k+1}$  spełniał warunki wystarczające, jego macierz nie może posiadać w jądrze wektorów rzędu Schmidta  $k$  (ponieważ podprzestrzeń  $\tilde{V}$  określona definicją 4.4, która jest podprzestrzenią produktową, musi zawierać w sobie stan pełnego rzędu Schmidta, co implikuje że musi być ona całą przestrzenią  $\mathbb{C}^{k+1} \otimes \mathbb{C}^{k+1}$ ). Tacy świadkowie mogą być punktem wyjścia do szukania nowych, bardziej restrykcyjnych warunków koniecznych, lub słabszych warunków wystarczających.

**Twierdzenie 4.19.** Dowolny świadek  $k$ -splątania posiada przynajmniej  $k^2 + 2k - \text{nil}(k + 1)$  wartości własnych dodatnich.

**Dowód:** Dowolny świadek  $k$ -splątania posiada przynajmniej jedną wartość własną ujemną. Wektor własny jej odpowiadający ma rząd Schmidta przynajmniej  $k + 1$ . Niech jego rozkładem Schmidta będzie

$$\Psi = \lambda_1|e_1\rangle\langle f_1| + \dots + \lambda_l|e_l\rangle\langle f_l|, \quad l \geq k + 1.$$

Chcemy, by wartość średnia świadka na dowolnym wektorze  $k$ -separowalnym w przestrzeni  $\text{span}\{e_1, \dots, e_{k+1}\} \otimes \text{span}\{f_1, \dots, f_{k+1}\}$  była dodatnia. W tym celu potrzebujemy przynajmniej  $k^2 + 2k - \text{nil}(k+1)$  wektorów własnych dodatnich. W przeciwnym wypadku oznaczałoby to możliwość skonstruowania świadka  $k$ -splątania na przestrzeni  $\mathbb{C}^{k+1} \otimes \mathbb{C}^{k+1}$  o mniejszej liczbie dodatnich wartości własnych, co przeczyłoby wnioskowi 4.16.  $\square$

Pozwala to oszacować z dołu rząd świadka  $k$ -splątania działającego w dowolnej przestrzeni:

**Wniosek 4.20.**  $\text{rz}W \geq (k+1)^2 - \text{nil}(k+1)$ .

**Interpretacja geometryczna ograniczeń na sygnatury** Stożek  $\mathcal{B}_+(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$  jest podzbiorem stożka  $\mathcal{W}_k(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$ . Fakt 3.15 mówi, że przekrój takich stożków (zbiór punktów styczności ich brzegów) będzie sumą algebraiczną ścian stożka  $\mathcal{B}_+(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$ . Ograniczenia na sygnatury pozwalają dla pewnych ścian stożka  $\mathcal{B}_+(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$  rozstrzygnąć, czy zawierają się one w tym przekroju, czy nie.

Rozważmy teraz zbiór świadków  $k$ -splątania, których przestrzenią dodatnią jest podprzestrzeń  $V$ , a podprzestrzeń ujemna jest zawarta w dopełnieniu ortogonalnym podprzestrzeni  $V$ . W stożku  $\mathcal{B}_+(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$  ściany  $F_V$  i  $F_{V^\perp}$  są ścianami wzajemnie komplementarnymi. Zbiór obserwacji o tak określonej podprzestrzeni dodatniej i ujemnej leży poza stożkiem macierzy półdodatnio określonych na linii przechodzącej przez elementy ścian  $F_V$  i  $F_{V^\perp}$  po zewnętrznej stronie tej pierwszej. Jeżeli wymiar ściany  $V$  jest mniejszy od ograniczenia dolnego z twierdzenia 4.19, wtedy na dowolnej prostej przechodzącej przez  $V$  i wewnątrz stożka  $\mathcal{B}_+(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$  nie będzie świadków  $k$ -splątania po zewnętrznej stronie  $F_V$  (ponieważ w takim wypadku  $V$  nie może być podprzestrzenią dodatnią żadnego świadka) i ściana ta należy do przekroju  $\partial\mathcal{B}_+(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}) \cap \partial\mathcal{W}_k(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$ .

W drugą stronę, jeżeli ściana  $F_V$  nie zawiera się w zbiorze punktów styczności, to dowolna prosta przechodząca przez punkt z jej wnętrza i wewnątrz stożka przechodzi przez punkty stożka  $\mathcal{W}_k(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$  po zewnętrznej stronie ściany  $F_V$ . Oznacza to, że dla dowolnej macierzy hermitowskiej  $W_+$  o obrazie równym  $V$  i dowolnej macierzy  $W_-$  o obrazie zawartym w  $V^\perp$  istnieje takie  $\lambda$ , że macierz  $\lambda W_+ - W_-$  jest macierzą świadka  $k$ -splątania. Warunek wystarczający by przestrzeń  $V$  posiadała taką własność podaje twierdzenie 4.7.

**Charakteryzacja odwzorowań dodatnich za pomocą wyników dla świadków.** Mając zadane przez rozkład spektralny świadka  $k$ -splątania

$$W = \sum_{i=1}^p \lambda_i^+ |\Psi_i^+\rangle \langle \Psi_i^+| - \sum_{i=1}^q |\lambda_i^-| |\Psi_i^-\rangle \langle \Psi_i^-|,$$

można za pomocą izomorfizmu  $\mathfrak{J}$  zdefiniowanego wzorem (3.24) znaleźć odpowiadające mu odwzorowanie  $k$ -dodatnie  $\Lambda : \mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_1}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_2})$ :

$$\Lambda\rho = \sum_{i=1}^p A_i \rho A_i^\dagger - \sum_{i=1}^q B_i \rho B_i^\dagger.$$

Rozkład spektralny świadka  $W$  przechodzi w izomorfizmie  $\mathfrak{J}$  na postać Kraus-Choi 3.25 odwzorowania  $\Lambda$ , w której macierze  $A_i = \sqrt{\lambda_i^+} \mathfrak{A}(\Psi_i^+)$  i  $B_i = \sqrt{|\lambda_i^-|} \mathfrak{A}(\Psi_i^-)$  są ortogonalne

w iloczynie HS. Dla liczb  $p$  i  $q$  w takim rozkładzie zachodzą oszacowania przeniesione wprost z wyników dotyczących sygnatur świadków  $k$ -splątania. Zauważmy, że jeżeli od macierzy  $A_i$  i  $B_i$  będziemy wymagali tylko liniowej niezależności w miejsce ortogonalności, sygnatura odwzorowania  $(p, q)$  nie ulegnie zmianie. Pozwala to na sformułowanie ograniczeń na liczby  $p$  i  $q$  w rozkładzie Kraus-Choi odwzorowania, jeżeli tylko założymy niezależność liniową macierzy  $A_i$  oraz  $B_i$ .

**Wniosek 4.21.** *Jeżeli odwzorowanie  $\Lambda$  jest  $k$ -dodatnie, to*

$$\begin{aligned} q &\leq (d_1 - k) \times (d_1 - k) \\ p &\geq k^2 + 2k - \text{nil}(k + 1) \end{aligned}$$

oraz rząd macierzy  $B_i$  jest większy równy  $k$ .

## 4.5 Zależności między wartościami własnymi

Twierdzenie (4.7) mówi, że obserwabla spełniająca trzy warunki konieczne, po odpowiednim przeskalowaniu jej części dodatniej, będzie świadkiem  $k$ -splątania. W tym podrozdziale zajmujemy się problemem wyznaczenia minimalnej stałej skalującej bądź jej oszacowania.

Bez wątpienia najważniejszym przypadkiem z fizycznego punktu widzenia jest problem 1-separowalności i do tego problemu ograniczymy rozważania w tym podrozdziale. Poza szczególną własnością wiążącą oszacowania z normą *sup*, wnioski z przypadku dla  $k = 1$  przenoszą się na przypadek wyższych  $k$ .

Zacniemy od wprowadzenia kilku definicji ważnych dla dalszych rozważań.

**Definicja 4.22.** *Dla macierzy  $X \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(d_1 \times d_2)$  definiujemy wielkość:*

$$\|X\|_{S-sup} := \sup\{\|X\Psi\| : \Psi \in \mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2} \wedge \Psi \in \mathcal{S}_1 \wedge \|\Psi\| = 1\}$$

Supremum brane jest po zbiorze unormowanych wektorów rzędu Schmidta 1, który jest istotnym podzbiorem zbioru wszystkich wektorów unormowanych. Dlatego zachodzi nierówność:

$$\|X\|_{S-sup} \leq \|X\|_{sup} \tag{4.20}$$

W szczególnych przypadkach norma *S-sup* wyraża się prostszymi wzorami. W interesujących nas zagadnieniach będziemy obliczać ją tylko dla macierzy stanów i obserwabli na przestrzeni Hilberta. Dla nich możliwe jest podać bardziej operacyjną definicję:

**Lemat 4.23.** *Jeżeli  $X \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(d_1 \times d_2)$  jest macierzą hermitowską, mamy:*

$$\begin{aligned} \|X\|_{S-sup} = \sup\{ &\sqrt{\sum_i \lambda_i^2 |\langle \alpha | \mathfrak{A}(\phi_i) | \beta \rangle|^2} : \alpha \in \mathbb{C}^{d_1} \wedge \beta \in \mathbb{C}^{d_2} \\ &\wedge \|\alpha\| = 1 \wedge \|\beta\| = 1\}, \end{aligned}$$

gdzie  $\lambda_i$  oznaczają wartości własne macierzy  $X$ , a  $\phi_i$  jego wektory własne.



**Dowód:** Korzystając z rozkładu spektralnego macierzy  $X$ , można wyrażenie  $\|X\alpha \otimes \beta\|^2$  zapisać jako:

$$\|X\alpha \otimes \beta\|^2 = \langle \alpha \otimes \beta | X^2 | \alpha \otimes \beta \rangle = \sum_i \lambda_i^2 |\langle \phi | \alpha \otimes \beta \rangle|^2.$$

Teraz wykorzystamy fakt, że izomorfizm (3.2) przenosi iloczyn tensorowy wektorów  $\alpha \otimes \beta$  na projektor  $\alpha\beta^T$ , a iloczyn skalarny w przestrzeni  $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$  w iloczyn HS w przestrzeni macierzy  $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}(d_1 \otimes d_2)$ . Wyrażenie  $\langle \phi | \alpha \otimes \beta \rangle$  można więc zapisać jako:

$$\begin{aligned} \langle \phi | \alpha \otimes \beta \rangle &= \langle \mathfrak{A}(\phi) | \mathfrak{A}(\alpha \otimes \beta) \rangle_{HS} = \langle \mathfrak{A}(\phi) | \alpha\beta^T \rangle_{HS} = \\ &= \langle \beta^* | \mathfrak{A}(\phi)^\dagger | \alpha \rangle = \langle \alpha | \mathfrak{A}(\phi) | \beta^* \rangle \quad \square \end{aligned}$$

**Fakt 4.24.** Dla macierzy hermitowskich  $\|X\|_{S-sup} = \|X\|_{sup}$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje separowalny wektor własny przy maksymalnej wartości własnej macierzy.

**Dowód:** Dla macierzy hermitowskiej wyrażenie  $\|X\Psi\|_{sup}$  osiąga maksimum na sferze jednostkowej dla wektorów własnych odpowiadających jej maksymalnej wartości własnej. Na każdym innym wektorze wartość wyrażenia  $\|X\Psi\|_{sup}$  jest mniejsza od maksymalnej. Jeżeli zatem zachodzi dowodzona równość, oznacza to że do zbioru stanów o rzędzie Schmidta  $k$ , po których bierzemy supremum w definicji wyrażenia  $\|X\Psi\|_{S-sup}$ , należy przynajmniej jeden wektor własny przy maksymalnej wartości własnej.  $\square$

Prostsza forma definicji normy  $S-sup$  przyjmuje dla projekcji ortogonalnych:

**Wniosek 4.25.** Dla projekcji ortogonalnej na podprzestrzeń  $V$  zachodzi:

$$\|P_V\|_{S-sup} = \sup\{\|\mathfrak{A}(\phi)\|_{sup} : \phi \in V \wedge \|\phi\| = 1\},$$

**Dowód:**

$$\begin{aligned} \|P_V\alpha \otimes \beta\| &= \sup\{|\langle \phi | \alpha \otimes \beta \rangle| : \phi \in V \wedge \|\phi\| = 1\} \\ &= \sup\{\langle \alpha | \mathfrak{A}(\phi) | \beta^* \rangle : \phi \in V \wedge \|\phi\| = 1\}, \end{aligned}$$

Interesuje nas teraz supremum tego wyrażenia po wszystkich stanach separowalnych:

$$\begin{aligned} \sup\{\langle \alpha | \mathfrak{A}(\Phi) | \beta \rangle : \phi \in V \wedge \|\phi\| = 1 \wedge \|\alpha\| = 1 \wedge \|\beta\| = 1\} \\ = \sup\{\|\mathfrak{A}(\Phi)\|_{sup} : \Phi \in V \wedge \|\phi\| = 1\} \end{aligned}$$

(uzyskujemy to zamieniając kolejnością suprema).  $\square$

Norma supremum macierzy współrzędnych, to jej największa wartość singularna, czyli maksymalny współczynnik Schmidta odpowiadającego jej wektora stanu. Dlatego wprowadzimy funkcję  $Sch_{\max}$  działającą na kracie podprzestrzeni przestrzeni  $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$  o wartościach w przedziale  $[0, 1]$ :

$$Sch_{\max}(V) = \|P_V\|_{S-sup} = \sup\{\|\mathfrak{A}(\phi)\|_{sup} : \phi \in V \wedge \|\phi\| = 1\}, \quad (4.21)$$

która przypisuje przestrzeni  $V$  maksimum z maksymalnego współczynnika Schmidta wektora ze sfery jednostkowej w tej podprzestrzeni. Podobna koncepcja pojawia się w pracy [148]. Tam autorzy przez splątanie podprzestrzeni definiują minimalną wartość entropii splątania dla stanu z podprzestrzeni. We wzorze (4.21) natomiast maksymalizuje się miarę separowalności, którą jest maksymalny współczynnik Schmidta wektora stanu.

**Twierdzenie 4.26.** *Dowolny świadek splątania o śladzie równym 1 da się zapisać w postaci:*

$$W_{\rho,\lambda} = \frac{\lambda I - \rho}{\lambda d_1 d_2 - 1}, \quad (4.22)$$

gdzie  $\rho$  jest macierzą gęstości, a

$$\lambda \in [ \|\sqrt{\rho}\|_{S-sup}^2, \|\rho\|_{sup} ) \quad (4.23)$$

**Dowód:** Odejmując od identyczności obserwabę półdodatnio określoną, można otrzymać dowolną obserwabę hermitowską  $W$ . By pokazać to mając daną obserwabę  $W$ , wystarczy wziąć dowolną macierz półdodatnio określoną  $\rho$  taką, że wszystkie sumy wartości własnych przy tych samych wektorach własnych  $\rho$  i  $W$  są równe. Suma  $W + \rho$  jest wtedy proporcjonalna do identyczności.

Obserwabla (4.22) jest świadkiem splątania, jeżeli:

1. nie jest półdodatnio określona
2. na dowolnym wektorze rzędu Schmidta 1 przyjmuje dodatnią wartość oczekiwaną

Żeby był spełniony pierwszy warunek, macierz  $\rho$  musi mieć większą normę  $sup$  niż  $\lambda$ , co dowodzi górnego ograniczenia zakresu parametru  $\lambda$ .

Drugi warunek jest spełniony, jeżeli:

$$\forall \Psi \in \mathcal{S}_1 : \|\Psi\| = 1 \quad \langle \Psi | (\lambda I - \rho) | \Psi \rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall \Psi \in \mathcal{S}_1 : \|\Psi\| = 1 \quad \lambda \geq \langle \Psi | \rho | \Psi \rangle$$

jeżeli nierówność ta zachodzi dla wszystkich unormowanych wektorów separowalnych, to zachodzi ona również dla supremum prawej strony nierówności po wszystkich unormowanych wektorach separowalnych:

$$\lambda \geq \sup\{ \langle \Psi | \rho | \Psi \rangle : \Psi \in \mathcal{S}_1 \wedge \|\Psi\| = 1 \} =$$

$$\sup\{ \|\sqrt{\rho}\Psi\|^2 : \Psi \in \mathcal{S}_1 \wedge \|\Psi\| = 1 \} = \|\sqrt{\rho}\|_{S-sup}^2 \quad \square$$

Liczba rzeczywista  $\|\sqrt{\rho}\|_{S-sup}^2$  określa maksymalny iloczyn  $HS$  zadanego stanu  $\rho$  i projektora na wektor produktowy. Ponieważ norma  $HS$  macierzy  $\rho$  jest ustalona, a norma dowolnego projektora wynosi jeden, szukana wielkość jest odległością  $HS$  stanu  $\rho$  od najbliższego czystego stanu separowalnego i może być traktowana jako miara splątania i zmieszania stanu  $\rho$ . Jak pokażemy w następnym paragrafie, dla stanów czystych miara ta przechodzi w kwadrat maksymalnego współczynnika Schmidta wektora na który rzutuje stan. Miarę tę można rozumieć jako uogólnienie maksymalnego współczynnika Schmidta na przypadek stanów mieszanych [149].

**Wartości własne świadka splątania.** Wniosek 4.25 wskazuje klasę stanów, dla których wielkość  $\|\sqrt{\rho}\|_{S-sup}^2$  oblicza się łatwiej niż dla pozostałych. Są to stany których spektrum zawiera dokładnie jedną niezerową wartość własną (unormowane projekcje ortogonalne). Po zrezygnowaniu z normowania, wstawiając tę szczególną klasę stanów do wzoru ogólnego (4.22) otrzymamy dwuparametrową rodzinę obserwabli o trywialnej przestrzeni  $V_0$ , jednej wartości własnej dodatniej i jednej ujemnej:

$$W = \lambda_+(1 - P_{V_-}) + \lambda_- P_{V_-} \quad (4.24)$$

Podprzestrzenią ujemną tych obserwabli jest obraz macierzy projektora użytego do jego konstrukcji. Warunkiem koniecznym, by obserwabla (4.24) była świadkiem splątania, jest brak w  $V_-$  niezerowych wektorów separowalnych. Ponieważ jądro jej macierzy jest trywialne, wszystkie warunki wystarczające z twierdzenia (4.7) mamy spełnione. Zapytajmy, jaka nierówność wiążąca  $\lambda_+$  i  $\lambda_-$  musi być spełniona, by obserwabla (4.24) była świadkiem splątania.

**Twierdzenie 4.27.** *Obserwabla (4.24) jest świadkiem splątania, wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \leq \frac{1 - \text{Sch}_{\max}^2(V_-)}{\text{Sch}_{\max}^2(V_-)}.$$

**Dowód:** By obserwabla (4.24) była świadkiem splątania, jej wartość oczekiwana dla każdego wektora separowalnego  $\chi$  (wystarczy ograniczyć się do wektorów unormowanych) musi być nieujemna. Mamy więc stąd:

$$\forall \chi \in \mathcal{S}_1 : \|\Psi\| = 1 \quad \lambda_-/\lambda_+ \leq \frac{1 - \langle \chi | P_{V_-} | \chi \rangle}{\langle \chi | P_{V_-} | \chi \rangle} \quad (4.25)$$

Wielkość  $\langle \chi | P_{V_-} | \chi \rangle$  przyjmuje wartości rzeczywiste w przedziale  $[0, 1)$ . Wartość 1 nie jest przyjmowana, ponieważ z założenia podprzestrzeń  $V$  nie zawiera wektorów separowalnych. Ponieważ funkcja  $x \rightarrow (1 - x)/x$  jest malejąca na przedziale  $[0, 1)$ , warunek (4.26) przyjmuje postać:

$$\lambda_-/\lambda_+ \leq \frac{1 - \sup \langle \chi | P_{V_-} | \chi \rangle}{\sup \langle \chi | P_{V_-} | \chi \rangle}, \quad (4.26)$$

gdzie supremum jest brane po wszystkich unormowanych wektorach separowalnych.

$$\sup \langle \chi | P_{V_-} | \chi \rangle = \sup \|P_{V_-} \chi\|^2 = (\sup \|P_{V_-} \chi\|)^2 = \|P_{V_-}\|_{S-sup}^2 = \text{Sch}_{\max}^2(V_-) \quad (4.27)$$

Wstawiając teraz powyższy wynik do równania (4.26) otrzymujemy tezę twierdzenia.  $\square$

Jeżeli do świadka splątania dodamy dowolną obserwabłą półdodatnio określoną i wynik nie będzie półdodatnio określony, to będzie on też świadkiem splątania.

Weźmy świadka splątania. Niech  $\lambda_+^{max}$  oznacza jego maksymalną dodatnią wartość własną, a  $\lambda_-^{max}$  maksymalną ujemną wartość własną (o najmniejszej wartości bezwzględnej). Dodając do tego świadka pewną obserwabłą półdodatnio określoną, otrzymać możemy w wyniku obserwabłą:

$$\lambda_+^{max}(1 - P_{V_-}) + \lambda_-^{max} P_{V_-}$$

będzie ona również świadkiem splątania, a wtedy z twierdzenia (4.27) mamy:

**Wniosek 4.28.** Dla świadka splątania zachodzi warunek:

$$\lambda_-^{max}/\lambda_+^{max} \leq \frac{1 - \text{Sch}_{\max}^2(V_-)}{\text{Sch}_{\max}^2(V_-)},$$

**Wniosek 4.29.** Rozważmy obserwabę hermitowską  $W$  taką, że jądro jej macierzy nie zawiera wektorów separowalnych i niech  $\lambda_-^{min}$  oznacza jej minimalną (o maksymalnej wartości bezwzględnej) ujemną wartość własną, a  $\lambda_-^{min}$  oznacza jej maksymalną dodatnią wartość własną. Jeżeli obserwabla ta spełnia warunki twierdzenia (4.5) i dodatkowo spełniony jest warunek:

$$\lambda_-^{min}/\lambda_+^{min} \leq \frac{1 - \text{Sch}_{\max}^2(V_- \oplus V_0)}{\text{Sch}_{\max}^2(V_- \oplus V_0)},$$

to jest ona świadkiem splątania.

**Dowód:** Jeżeli jądro macierzy obserwabli nie zawiera wektorów separowalnych, wtedy w połączeniu z warunkami wystarczającymi z twierdzenia (4.7) oznacza to, że cała przestrzeń  $V_0 \oplus V_-$  nie zawiera wektorów separowalnych. To z kolei oznacza, że jeżeli tylko zachodzi nierówność:

$$\lambda_-^{min}/\lambda_+^{min} \leq \frac{1 - \text{Sch}_{\max}^2(V_- \oplus V_0)}{\text{Sch}_{\max}^2(V_- \oplus V_0)},$$

wtedy obserwabla  $\lambda_+^{min}(1 - P_{V_-}) + \lambda_-^{min}P_{V_- \oplus V_0}$  jest na mocy twierdzenia (4.27) świadkiem splątania. Dodając do niej obserwabę półdodatnio określoną, możemy uzyskać obserwabę  $W$ . Obserwabla ta będzie nadal świadkiem splątania.  $\square$

W rodzinie świadków splątania postaci (4.22) wyróżniamy podrodzinę świadków, dla których parametr  $\lambda$  w tezie twierdzenia (4.23) przyjmuje wartość minimalną. Rodzinę tę parametryzuje dowolna sfera w przestrzeni  $\mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$  wokół stanu maksymalnie mieszanego.

$$W_\rho = \frac{\|\sqrt{\rho}\|_{S-sup}^2 I - \rho}{\|\sqrt{\rho}\|_{S-sup}^2 d_1 d_2 - 1} \quad (4.28)$$

Każdy świadek  $W_{\rho,\lambda}$ , dla którego parametr  $\lambda$  w tezie twierdzenia 4.26 przyjmuje wartość z wnętrza przedziału (4.23), jest kombinacją wypukłą:

$$W_{\rho,\lambda} = \mu I + \nu W_\rho$$

unormowanej identyczności i świadka splątania  $W_\rho$ . Oznacza to, że zbiór stanów  $\mathcal{D}(W_{\rho,\lambda})$  splątanych wykrywanych przez świadka  $W_{\rho,\lambda}$  zawiera się w zbiorze  $\mathcal{D}(W_\rho)$  stanów wykrywanych przez świadka  $W_\rho$ . Rodzina (4.28) wykrywa wszystkie stany splątane. Jest to brzeg zbioru  $\mathcal{W}_1(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$ .

W rodzinie świadków postaci (4.28) wyróżniamy podrodzinę:

$$W_{V_-} = \text{Sch}_{\max}^2(V_-)I - P_{V_-} \quad (4.29)$$

(z dokładnością do normowania). Świadków z tej rodziny używaliśmy już do określenia ograniczeń na wartości własne świadków splątania.

Wśród świadków postaci (4.29) szczególne miejsce zajmują świadkowie  $W_{|\Psi\rangle\langle\Psi|}$ . Dla takich świadków łatwo wyznacza się wielkość  $\text{Sch}_{\max}^2(V_-)$  (wszystkie unormowane wektory w jednowymiarowej podprzestrzeni różnią się o czynnik fazowy i mają ten sam maksymalny współczynnik Schmidta). Jest ona równa maksymalnemu współczynnikowi Schmidta wektora własnego (normie *sup* jego macierzy współrzędnych). Jest to wektor własny przy jedynej ujemnej wartości własnej świadka splątania  $W_{|\Psi\rangle\langle\Psi|}$ . W tym szczególnym przypadku odtwarzamy wyniki pracy [150].

W pewnych szczególnych przypadkach możemy łatwo analitycznie wyznaczyć wielkość  $\text{Sch}_{\max}^2(V_-)$  dla zadanej podprzestrzeni  $V$  o wymiarze wyższym niż 1. Zaprezentujemy dwie klasy takich przestrzeni.

**Bazy wektorów o tym samym rozkładzie Schmidta.** Do pierwszej prezentowanej klasy podprzestrzeni należy każda podprzestrzeń, dla której istnieje baza ortonormalna, dla wektorów której macierze współrzędnych można jednocześnie sprowadzić do postaci Schmidta przy pomocy pewnej operacji lokalnej. Po zastosowaniu tej operacji mamy zatem:

$$\mathfrak{A}(\Psi_1) = \begin{bmatrix} \lambda_1^{(1)} & 0 & & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{d_1}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \vdots \quad (4.30)$$

$$\mathfrak{A}(\Psi_k) = \begin{bmatrix} \lambda_1^{(k)} & 0 & & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{d_1}^{(k)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Maksymalny współczynnik Schmidta wektora równa się normie *sup* jego macierzy współrzędnych. Oznacza to, że szukamy teraz kombinacji liniowej macierzy (4.30) o maksymalnym co do modułu wyrazie (takiej, bo kwadraty modułów współczynników kombinacji sumowały się do jedynki). Moduł tego wyrazu jest szukaną wielkością  $\text{Sch}_{\max}(V_-)$ . Jej wartość pozwala w prosty sposób wyznaczyć:

**Twierdzenie 4.30.** *Dla podprzestrzeni  $V$  napinanej przez bazę ortonormalną wektorów o macierzach współrzędnych postaci (4.30),*

$$\|P_V\|_{S-sup} = \max\left\{\left\|\begin{bmatrix} \lambda_1^{(1)} \\ \vdots \\ \lambda_{d_1}^{(1)} \end{bmatrix}\right\|, \dots, \left\|\begin{bmatrix} \lambda_{d_1}^{(1)} \\ \vdots \\ \lambda_{d_1}^{(k)} \end{bmatrix}\right\|\right\}.$$

**Dowód:**  $j$  – ty współczynnik Schmidta kombinacji liniowej macierzy (4.30) wyraża się wzorem:

$$\Lambda_j(\vec{a}) = \left| \sum_{i=1}^k a_i \lambda_j^{(i)} \right| \quad (4.31)$$

Szukamy maksimum tego wyrażenia po wektorach unormowanych. Ponieważ macierze (4.30) tworzą bazę ortonormalną podprzestrzeni, ich kombinacja jest unormowana wtedy i tylko wtedy gdy wektor  $\vec{a}$  ma normę jeden.

Oznaczmy przez  $\vec{\lambda}_j$  wektor  $[\lambda_j^{(1)}, \dots, \lambda_j^{(k)}]^T$ . Szukamy maksimum funkcji  $|\langle \vec{\lambda}_j | \vec{a} \rangle|$  po sferze jednostkowej. Przyjmowane jest ono w punkcie  $\vec{a} = \lambda_j$ , a jego wartość jest równa normie wektora  $\vec{a}$ . Maksymalna wartość  $j$ -tego współczynnika Schmidta wynosi więc  $\|\vec{\lambda}_j\|$ , a maksymalna wartość maksymalnego współczynnika Schmidta kombinacji wynosi  $\max\{\|\vec{\lambda}_1\|, \dots, \|\vec{\lambda}_k\|\}$ .  $\square$

Maksymalnym wymiarem podprzestrzeni wektorów o tym samym rozkładzie Schmidta jest  $d_1$  (mniejszy z wymiarów podukładów). Jeżeli wymiary podukładów są takie same i równe  $d$ , to przestrzeń Hilberta układu można przedstawić jako sumę prostą  $d$  maksymalnych podprzestrzeni wektorów o tym samym rozkładzie Schmidta. Stany o wektorach własnych leżących w tych podprzestrzeniach nazywa się stanami *circulant* [151], [152], [153], [154]. Mają one tę ciekawą własność, że wektory własne częściowej transpozycji leżą również w składnikach tej samej sumy prostej.

### Bazy o ortogonalnych wierszach macierzy współrzędnych wektorów bazowych.

Założmy, że dla bazy o macierzach współrzędnych wektorów bazowych:

$$\mathfrak{A}(\Psi_1) = \begin{bmatrix} \vec{u}_1^{(1)} \\ \vdots \\ \vec{u}_{d_1}^{(1)} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \mathfrak{A}(\Psi_k) = \begin{bmatrix} \vec{u}_1^{(1)} \\ \vdots \\ \vec{u}_{d_1}^{(1)} \end{bmatrix}$$

zachodzi warunek:

$$\langle \vec{u}_i^{(p)} | \vec{u}_j^{(q)} \rangle = \delta_{ij} \delta_{pq}. \quad (4.32)$$

**Lemat 4.31.** *Jeżeli baza spełnia warunek (4.32) wtedy dla napinanej przez nią przestrzeni  $V$  zachodzi:*

$$\|P_V\|_{S-sup} = \max\{\|\mathfrak{A}(\Psi_1)\|_{sup}, \dots, \|\mathfrak{A}(\Psi_k)\|_{sup}\}$$

**Dowód:** Macierz współrzędnych kombinacji wektorów bazowych wyraża się wzorem:

$$\mathfrak{A}\left(\sum_i a_i \Psi_i\right) = \begin{bmatrix} \sum_i a_i \vec{u}_1^{(i)} \\ \vdots \\ \sum_i a_i \vec{u}_{d_1}^{(i)} \end{bmatrix}$$

Pomnóżmy teraz tę macierz prawostronnie przez jej sprzężenie hermitowskie <sup>2</sup> :

$$\mathfrak{A}\left(\sum_i a_i \Psi_i\right)\mathfrak{A}\left(\sum_i a_i \Psi_i\right)^\dagger = \begin{bmatrix} \sum_i |a_i|^2 |\vec{u}_1^{(i)}|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_i |a_i|^2 |\vec{u}_2^{(i)}|^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sum_i |a_i|^2 |\vec{u}_{d_1}^{(i)}|^2 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Macierz ta jest diagonalna dzięki założeniu (4.32). Wartościami singularnymi kombinacji  $\sum_i a_i \Psi_i$  są pierwiastki wyrazów diagonalnych macierzy (4.33). Kwadraty modułów współczynników kombinacji liniowej w wyrazach diagonalnych są współczynnikami kombinacji wypukłej (ponieważ bierzemy tylko kombinacje liniowe o normie równej jeden). Maksymalną wartością kombinacji wypukłej zbioru liczb rzeczywistych jest największa spośród tych liczb.

Maksymalną wartością  $i$ -tego wyrazu diagonalnego jest więc długość najdłuższego wektora spośród wektorów  $\{\vec{u}_i^{(p)} : p = 1, \dots, k\}$ . Maksymalnym współczynnikiem Schmidta kombinacji liniowej wektorów bazy jest więc długość najdłuższego spośród wektorów  $\{\vec{u}_i^{(p)} : i = 1, \dots, d_1, p = 1, \dots, k\}$ .

Obliczmy maksymalny współczynnik Schmidta wektora bazy  $\Psi_i$  w podobny sposób, jak zrobiliśmy to dla ich kombinacji. Śladem częściowym projektora na wektor  $\Psi_i$  będzie macierz diagonalna:

$$\mathfrak{A}(\Psi_i)\mathfrak{A}(\Psi_i)^\dagger = \begin{bmatrix} |\vec{u}_1^{(i)}|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\vec{u}_2^{(i)}|^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & |\vec{u}_{d_1}^{(i)}|^2 \end{bmatrix},$$

i analogicznie maksymalnym współczynnikiem Schmidta wektora  $\Psi_i$  będzie długość maksymalnego wektora w zbiorze  $\{\vec{u}_j^{(i)} : j = 1, \dots, d_1\}$ .

Maksimum  $\{|\vec{u}_i^{(p)}| : i = 1, \dots, d_1, p = 1, \dots, k\}$  jest więc maksimum z maksymalnego współczynnika Schmidta wektorów bazy.  $\square$

## 4.6 Rozkładalność świadków splątania

Można sformułować warunki konieczne i wystarczające rozkładalności świadka splątania postaci (4.28) w języku normy  $S$ -sup. Niniejszy podrozdział prezentuje te wyniki.

**Lemat 4.32** (Rozkład spektralny częściowej transpozycji projektora). *Niech wektor  $\Psi \in \mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$  będzie dany przez swój rozkład Schmidta:  $\Psi = \sum_{i=1}^{d_1} \lambda_i \alpha_i \otimes \beta_i$ . Wtedy rozkład spektralny częściowej transpozycji projektora na stan  $\Psi$  jest dany następująco:*

<sup>2</sup>Mnożenie macierzy współrzędnych wektora stanu prawostronnie przez jej sprzężenie hermitowskie daje w wyniku ślad częściowy po drugim podukładzie projektora na ten wektor. Analogicznie, mnożenie lewostronne macierzy współrzędnych przez jej sprzężenie hermitowskie daje ślad częściowy po pierwszym podukładzie projektora na wektor stanu.

$$|\Psi\rangle\langle\Psi|^\Gamma = \sum_{i=1}^{d_1} \lambda_i^2 |\alpha_i\rangle\langle\beta_i| - \sum_{i<j=1}^{d_1} \lambda_i \lambda_j \left| \frac{\alpha_i \otimes \beta_j - \alpha_j \beta_i}{\sqrt{2}} \right\rangle \left\langle \frac{\alpha_i \otimes \beta_j - \alpha_j \beta_i}{\sqrt{2}} \right| \\ + \sum_{i<j=1}^{d_1} \lambda_i \lambda_j \left| \frac{\alpha_i \otimes \beta_j + \alpha_j \beta_i}{\sqrt{2}} \right\rangle \left\langle \frac{\alpha_i \otimes \beta_j + \alpha_j \beta_i}{\sqrt{2}} \right|$$

**Dowód:** Uzupełnijmy ortonormalne układy wektorów  $\{\alpha_i\}$  i  $\{\beta_i\}$  do baz ortonormalnych przestrzeni odpowiednio  $\mathbb{C}^{d_1}$  i  $\mathbb{C}^{d_1}$ . Operator liniowy częściowej transpozycji zachowuje swoją macierz w bazie standardowej po dowolnej lokalnej unitarnej zmianie bazy.

$$|\Psi\rangle\langle\Psi| = \left( \sum_i \lambda_i |\alpha_i \otimes \beta_i\rangle \right) \left( \sum_j \lambda_j \langle \alpha_j \otimes \beta_j| \right) \\ |\Psi\rangle\langle\Psi|^\Gamma = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j |\alpha_i \otimes \beta_j\rangle \langle \alpha_j \otimes \beta_i|$$

Macierz ta rozbija się na bloki numerowane nieuporządkowanymi parami indeksów  $i, j$ :

$$|\Psi\rangle\langle\Psi|^\Gamma = \sum_i \lambda_i^2 |\alpha_i \otimes \beta_i\rangle \langle \alpha_i \otimes \beta_i| + \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j (|\alpha_i \otimes \beta_j\rangle \langle \alpha_j \otimes \beta_i| + |\alpha_j \otimes \beta_i\rangle \langle \alpha_i \otimes \beta_j|) \quad (4.34)$$

Druga suma zawiera bloki rozmiaru  $2 \times 2$ , proporcjonalne do macierzy  $\sigma_x$ , która ma rozkład spektralny:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ & \end{bmatrix}$$

Wykorzystując to do drugiego członu równania (4.34), możemy je zapisać w postaci:

$$|\Psi\rangle\langle\Psi|^\Gamma = \sum_{i=1}^{d_1} \lambda_i^2 |\alpha_i\rangle\langle\beta_i| - \sum_{i<j=1}^{d_1} \lambda_i \lambda_j \left| \frac{\alpha_i \otimes \beta_j - \alpha_j \beta_i}{\sqrt{2}} \right\rangle \left\langle \frac{\alpha_i \otimes \beta_j - \alpha_j \beta_i}{\sqrt{2}} \right| \\ + \sum_{i<j=1}^{d_1} \lambda_i \lambda_j \left| \frac{\alpha_i \otimes \beta_j + \alpha_j \beta_i}{\sqrt{2}} \right\rangle \left\langle \frac{\alpha_i \otimes \beta_j + \alpha_j \beta_i}{\sqrt{2}} \right| \quad \square$$

**Lemat 4.33** (Warunek wystarczający rozkładalności świadka splątania). *Jeżeli*

$$\|\rho^\Gamma\|_{sup} \leq \|\sqrt{\rho}\|_{S-sup}^2$$

*wtedy świadek  $W_\rho$  postaci (4.28) jest rozkładalny.*

**Dowód:** Rozważmy częściową transpozycję świadka  $W_\rho$ :

$$W_\rho^\Gamma = \|\sqrt{\rho}\|_{S-sup}^2 I - \rho^\Gamma$$

minimalna wartość własna tak otrzymanej macierzy jest równa:

$$\min \sigma(W_\rho^\Gamma) = \|\sqrt{\rho}\|_{S-sup}^2 - \max \sigma(\rho^\Gamma) = \|\sqrt{\rho}\|_{S-sup}^2 - \|\rho^\Gamma\|_{sup}$$

Ponieważ na mocy założenia  $\|\rho^\Gamma\|_{sup} \leq \|\sqrt{\rho}\|_{S-sup}^2$ , obserwabla  $W_\rho^\Gamma$  jest półododatnio określona. Dalej na mocy inwolucyjności częściowej transpozycji dostajemy, że świadek  $W_\rho$  jest częściową transpozycją obserwabli półododatnio określonej, więc jest świadkiem rozkładalnym.  $\square$

Lematy 4.32 i 4.33 prowadzi do następującego wniosku:



**Wniosek 4.34.** *Jeżeli  $\text{rz}(\rho) = 1$ , wtedy świadek  $W_\rho$  jest rozkładalny.*

**Dowód:** Lemat 4.32 pozwala obliczyć normę  $\text{sup}$  częściowej transpozycji jednowymiarowego projektora rzutującego na wektor  $\Psi$ . Jest ona równa kwadratowi maksymalnego współczynnika Schmidta wektora  $\Psi$ , zatem kwadratowi normy  $S\text{-sup}$  projektora na wektor  $\Psi$  i jest spełniona nieostra nierówność w lemacie 4.33.  $\square$

**Przykład 4.35.** *Dla przestrzeni ujemnej:*

$$V_- = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

*świadek  $W_{V_-}$  jest rozkładalny*

**Dowód:** Wektory bazowe spełniają warunek (4.32), więc lemat 4.31 mówi, że norma  $S\text{-sup}$  projektora na tę podprzestrzeń będzie równy maksymalnej normie  $\text{sup}$  macierzy współrzędnych wektorów bazy. Ponieważ dla obu tych wektorów norma ta wynosi  $1/2$ , norma  $S\text{-sup}$  projektora będzie równa  $1/2$ .

Częściowa transpozycja projektora jest projektorem, zatem jej norma  $\text{sup}$  jest równa 1. Oznacza to, że nierówność w lemacie 4.33 jest spełniona w sposób ostry.  $\square$

**Lemat 4.36** (Warunek konieczny rozkładalności świadka splątania). *Jeżeli świadek  $W_\rho$  jest rozkładalny, to*

$$\|\sqrt{\rho^\Gamma}\|_{S\text{-sup}}^2 \leq \|\sqrt{\rho}\|_{S\text{-sup}}^2$$

**Dowód:** Rozkładalny świadek splątania da się zapisać w postaci  $A^\Gamma + B$ . Jego częściowa transpozycja może być więc albo świadkiem splątania, albo macierzą półdefinitną określoną, czyli jej wartość oczekiwana na dowolnym wektorze separowalnym musi być dodatnia. Częściową transpozycją świadka splątania  $W_\rho$  jest:

$$W_\rho^\Gamma = \|\sqrt{\rho}\|_{S\text{-sup}}^2 I - \rho^\Gamma \quad (4.35)$$

(z dokładnością do normowania). Dla każdego unormowanego wektora separowalnego  $\Psi$  spełniony jest warunek

$$\langle \Psi | \rho^\Gamma | \Psi \rangle \leq \|\sqrt{\rho}\|_{S\text{-sup}}^2,$$

czyli jest on spełniony również dla supremum lewej strony po wszystkich unormowanych wektorach separowalnych i otrzymujemy tezę.  $\square$

Częściowa transpozycja jest odwzorowaniem samosprzężonym w iloczynie  $HS$  i przekształca ona projektor na wektor produktowy  $\phi \otimes \psi$  w projektor na wektor  $\phi \otimes \psi^*$ . Można zatem pokazać, że

$$\|\sqrt{\rho^\Gamma}\|_{S\text{-sup}}^2 = \sup_{\phi, \psi} \langle \phi \otimes \psi | \rho^\Gamma | \phi \otimes \psi \rangle = \sup_{\phi, \psi} \langle \phi \otimes \psi^* | \rho | \phi \otimes \psi^* \rangle = \|\sqrt{\rho}\|_{S\text{-sup}}^2,$$

czyli że warunek konieczny z lematu 4.36 spełniony jest dla każdego stanu.

## 4.7 Optymalność świadków splątania

W języku normy  $S$ -sup można przeformułować również problem optymalności świadka splątania postaci 4.28. W podrozdziale 3.2 zdefiniowaliśmy optymalność i udowodniliśmy równoważne sformułowanie optymalności mówiące, że świadek jest optymalny wtedy i tylko wtedy, gdy odjęcie od niego dowolnej obserwabli dodatniej wyprowadza poza zbiór świadków. Wystarczy kryterium to sprawdzić dla jednowymiarowych projektorów (dzięki temu, że każda macierz półdodatnio określona jest wypukłą kombinacją projektorów na stany separowalne). Świadek  $W$  jest optymalny wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego projektora  $P$  na jednowymiarową podprzestrzeń i dla każdego  $\epsilon \in (0, 1)$  obserwabla  $W - \epsilon P$  nie jest świadkiem splątania.

Korzystając z parametryzacji brzegu zbioru świadków splątania (4.28) dostajemy:

**Wniosek 4.37.**  $W_\rho$  jest optymalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego jednowymiarowego projektora  $P$  jest spełniona nierówność

$$\|\sqrt{\rho + \epsilon P}\|_{S\text{-sup}}^2 > \|\sqrt{\rho}\|_{S\text{-sup}}^2, \quad (4.36)$$

dla dowolnego  $\epsilon > 0$ .

**Dowód:** Po odjęciu od świadka  $W_\rho$  obserwabli  $\epsilon P$  dostaniemy obserwabę:

$$W - P = \|\sqrt{\rho}\|_{S\text{-sup}}^2 I - (\rho + \epsilon P)$$

będzie ona świadkiem splątania, jeżeli jej wartość oczekiwana na każdym unormowanym wektorze separowalnym będzie nieujemna, co prowadzi do warunku:

$$\langle \Psi | \rho + \epsilon P | \Psi \rangle \leq \|\sqrt{\rho}\|_{S\text{-sup}}^2.$$

Ponieważ ma to zachodzić dla każdego unormowanego wektora separowalnego, nierówność zachodzi również dla supremum lewej strony nierówności po zbiorze wszystkich unormowanych wektorów separowalnych:

$$\|\sqrt{\rho + \epsilon P}\|_{S\text{-sup}}^2 \leq \|\sqrt{\rho}\|_{S\text{-sup}}^2.$$

Jeżeli zażądamy, by dla dowolnego projektora na jednowymiarową podprzestrzeń obserwabla  $W - \epsilon P$  nie była świadkiem splątania, otrzymamy tezę.  $\square$

Ponieważ na mocy dodatniości  $P$  zawsze zachodzi  $\|\sqrt{\rho + \epsilon P}\|_{S\text{-sup}}^2 \geq \|\sqrt{\rho}\|_{S\text{-sup}}^2$ , warunek 4.37 jest równoważny warunkowi:

$$\sim \exists P \geq 0 : \|\sqrt{\rho + \epsilon P}\|_{S\text{-sup}}^2 = \|\sqrt{\rho}\|_{S\text{-sup}}^2 \quad (4.37)$$

**Lemat 4.38.** Jeżeli  $\rho$  jest stanem czystym, wtedy stan  $W_\rho$  jest optymalny wtedy i tylko wtedy, gdy wymiary podukładów są sobie równe i  $\rho$  jest projektorem na wektor maksymalnie splątany.

**Dowód:** W podrozdziale 3.4 udowodniliśmy, że świadek splątania jest optymalny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór wektorów produktowych, na których świadek się zeruje, rozpina całą przestrzeń Hilberta układu. Zbiór ten oznaczamy jako  $\mathcal{P}^1(W_\rho)$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^1(W^\rho) &= \{\phi \in \mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2} : \langle \phi | (||\sqrt{\rho}||_{S-sup}^2 I - \rho) | \phi \rangle = 0\} \\ &= \{\phi \in \mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2} : \langle \phi | \rho | \phi \rangle = ||\sqrt{\rho}||_{S-sup}^2 \wedge |\phi| = 1\}\end{aligned}$$

Ponieważ  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ , wzór ten przyjmie postać:  $\mathcal{P}^1(W_\rho) = \{\phi \in \mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2} : |\langle\psi|\phi\rangle| = \text{Sch}_{\max}(\psi) \wedge |\phi| = 1\}$ . Niech rozkładem Schmidta wektora  $\psi$  będzie  $\lambda_1 e_1 \otimes f_1 + \dots + \lambda_{d_1} e_{d_1} \otimes f_{d_1}$ . Załóżmy, że  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{d_1 d_2}$ .

Poszukujemy teraz wektorów separowalnych  $\phi$ , dla których  $|\langle\psi|\phi\rangle| = \lambda_1$ . Będzie to wektor  $e_1 \otimes e_2$ . W przypadku, gdy pierwszych  $k$  wartości własnych jest zdegenerowanych, zbiorem takich wektorów będzie podprzestrzeń produktowa  $\text{span}\{e_1, \dots, e_k\} \otimes \text{span}\{f_1, \dots, f_k\}$ . Zbiorem tym będzie cała przestrzeń Hilberta układu wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości singularne wektora  $\psi$  są równe i wymiary przestrzeni Hilberta podukładów są równe.  $\square$

Powodem nieoptymalności świadka  $W_\rho$ , gdy przestrzenie Hilberta podukładów mają różne wymiary, jest macierz identycznościowa działająca również w podprzestrzeni  $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \text{span}\{f_{d_1+1}, \dots, f_{d_2}\}$ , w której każdy wektor separowalny jest prostopadły do wektora  $\psi$  definiującego świadka. Problem ten nie zachodzi dla świadka o obrazie jego macierzy w iloczynie dwóch przestrzeni tego samego wymiaru.

**Wniosek 4.39.** *Dla dowolnego wektora  $\psi$  o zdegenerowanych współczynnikach Schmidta świadek  $W \in \mathcal{W}_1(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$  określony wzorem  $\text{Sch}_{\max}^2(\psi) \text{Id}_{\text{Tr}_2|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \text{Tr}_1|\psi\rangle\langle\psi|} - |\psi\rangle\langle\psi|$  jest optymalny.*

# Rozdział 5

## Własności spektralne stanów separowalnych

### 5.1 Kryteria nie używające informacji o bazie własnej

Stan maksymalnie zmieszany (unormowana identyczność), który będziemy oznaczać jako  $\rho_0$ , jest stanem separowalnym - każda baza jest bazą własną stanu  $\rho_0$ , w szczególności baza składająca się z wektorów separowalnych. Rozkład spektralny w takiej bazie dowodzi separowalności stanu  $\rho_0$ .

Co więcej, można udowodnić (twierdzenie 1 w [155]), że stan  $\rho_0$  leży we wnętrzu zbioru stanów separowalnych. Pojawia się zatem pytanie, jak duża kula wokół tego stanu zawiera się w zbiorze stanów separowalnych. Pytanie to można zadać dla wielu różnych norm macierzowych. Odpowiedzi na nie, dla norm  $l_p, 1 \leq p \leq \infty$  dają prace [156], [157]. Normy te są  $U(d_1) \times U(d_2)$  niezmiennicze, zatem norma  $l_p$  pewnej macierzy hermitowskiej jest równa normie  $l_p$  wektora jej wartości własnych <sup>1</sup>

Twierdzenie 1 z [156] pozwala znaleźć maksymalny promień kuli macierzy separowalnych wokół identyczności. Określa ono implikację:

$$\|\Delta\|_2 \leq 1 \Rightarrow I + \Delta \in \mathcal{S}_1. \quad (5.1)$$

Wnioskiem z tego twierdzenia jest wniosek 2 z tej samej pracy, określający maksymalny promień kuli stanów separowalnych wokół  $\rho_0$ :

$$\rho \in B(\rho_0, \frac{1}{\sqrt{d(d-1)}}) \Rightarrow \rho \in \mathcal{S}_1. \quad (5.2)$$

Liczba  $d$  oznacza wymiar całego układu  $d = d_1 \times d_2$ . Ten sam fakt można wyrazić jako ograniczenie na czystość stanu:

$$\text{Tr}\rho^2 \leq \frac{1}{d-1} \quad (5.3)$$

Praca [156] udowadnia, że jest to kula styczna do brzegu stanów separowalnych, czyli że istnieją stany splątane o czystości dowolnie bliskiej liczbie  $1/(d-1)$ .

---

<sup>1</sup>Normy  $l_p$  dla macierzy nazywa się czasem normami Schattena, patrz np. [158]

**Ograniczenie na wartości własne świadka splątania.** Rozważamy teraz parę dwóch zbiorów wypukłych w warstwie macierzy o śladzie jednostkowym - zbiór stanów separowalnych i wpisaną w niego kulę  $B(I/d, 1/\sqrt{d(d-1)})$ . Relacja polarności (2.5) przetrzuci tę parę na kulę  $B(I/d, \sqrt{(d-1)/d})$  opisaną na zbiorze świadków splątania o jednostkowym śladzie. Wektor wartości takiego świadka splątania spełnia więc zależność:

$$\sum_i (\lambda_i - \frac{1}{d})^2 = \sum_i \lambda_i^2 - \frac{1}{d} \leq \frac{d-1}{d}.$$

Oznacza to, że wektor wartości własnych dowolnego świadka splątania spełnia nierówność:

$$\frac{\text{Tr}W^2}{(\text{Tr}W)^2} \leq 1. \quad (5.4)$$

Wartości po lewej stronie nierówności nie należy nazywać czystością. Czystość osiąga maksymalną wartość równą 1 dla macierzy rzędu 1, ponieważ jest określona na macierzach półdefinitnie określonych. Świadców splątania nie są macierzami półdefinitnie określonymi i przy zachowaniu stałej wartości śladu, można uzyskać dowolnie dużą wartość lewej strony (5.4).

Udowodniliśmy w ten sposób zachodzenie wzoru (3.11) dla wszystkich świadków splątania. W podrozdziale 3.5 udowodniliśmy, że wzór ten zachodzi dla kilku przykładów odwzorowań dodatnich będących kontrakcjami w normie  $HS$ .

Zbiór wszystkich świadków splątania nie jest jednak w tę sferę wpisany w tym sensie, w jaki jest wpisany w nią zbiór stanów czy świadków rozkładalnych, dla których wszystkie punkty ekstremalne leżą na tej sferze. By to pokazać, weźmy świadka splątania odpowiadającego w izomorfizmie Jamiołkowskiego (3.23) odwzorowaniu Choi zachowującemu ślad:

$$W_{Ch} = (I \otimes Ch)P_+ = \frac{1}{6} \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Jego norma  $HS$  wynosi  $1/\sqrt{3}$ , więc leży on wewnątrz kuli  $B(I/d, 1/\sqrt{d(d-1)})$ . Ponieważ odwzorowanie Choi generuje półpromień ekstremalny w stożku odwzorowań dodatnich, tak skonstruowany świadek jest punktem ekstremalnym zbioru świadków splątania o jednostkowym śladzie.

## 5.2 Kryteria wykorzystujące informację o bazie własnej

Kryteria zaprezentowane w poprzednim podrozdziale dają warunki wystarczające separowalności w języku tylko wartości własnych. Stan o dowolnej bazie własnej spełniający te

kryteria na spektrum będzie separowalny. Geometrycznie odpowiada to wpisywaniu kul w normach  $U(d_1 \times d_2)$  niezmienniczych w zbiór macierzy gęstości.

W tym podrozdziale zostaną zaprezentowane kryteria, które wykorzystują informację o bazie własnej macierzy gęstości. Geometrycznie patrząc, działają one nie w całym zbiorze macierzy gęstości, a w sympleksie macierzy o określonej bazie własnej.

**Przeformułowanie kryterium separowalności.** W podrozdziale 4.5 sparametryzowaliśmy zbiór świadków splątania wzorem (4.26). Zauważyliśmy również, że dowolne splątanie wykrywają świadkowie z brzegu tego zbioru, tj. rodzina (4.28). Prowadzi to do równoważnego sformułowania problemu separowalności:

**Twierdzenie 5.1.** *Stan  $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$  jest separowalny wtedy i tylko wtedy gdy:*

$$\forall \eta \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}) \quad \langle \rho | \eta \rangle \leq \|\sqrt{\eta}\|_{S-sup}^2. \quad (5.5)$$

W rzeczywistości wystarczy ograniczyć się w kwantyfikatorze do stanów z dowolnej sfery wokół stanu maksymalnie zmieszanego.

W kwantyfikowanym zbiorze można wyróżnić podzbiór, dla którego nierówność w warunku (5.5) jest spełniona dla każdego stanu  $\rho$ . Są to macierze gęstości dla których podprzestrzeń własna przy maksymalnej wartości własnej zawiera stan separowalny. Dla takich i tylko takich stanów nierówność (4.20) przechodzi w równość:

$$\|\sqrt{\rho}\|_{S-sup}^2 = \|\rho\|_{sup}$$

W szczególności są to stany, dla których można wybrać separowalną bazę własną. Podzbiorem tychże są iloczyny tensorowe stanów podukładów.

**Stany widzące swoje splątanie.** W szczególności, nierówność 5.5 musi zachodzić dla badanego stanu  $\rho$ . Warunek ten prowadzi do:

**Wniosek 5.2.** *Jeżeli stan  $\rho$  jest separowalny, to  $\|\rho\|_{HS}^2 \leq \|\sqrt{\rho}\|_{S-sup}^2$*

Iloczyn  $HS$  w który wyposażona jest przestrzeń macierzy hermitowskich ustala izomorfizm między przestrzenią obserwabli i stanów. Pozwala to sparametryzować brzeg zbioru świadków splątania poprzez sferę wokół stanu maksymalnie zmieszanego, przez co stan  $\rho$  może widzieć splątanie innych stanów kwantowych wykrywając je przy pomocy świadka  $W_\rho$ . W szczególności, stan  $\rho$  może nie spełniać warunku  $\|\rho\|_{HS}^2 \leq \|\sqrt{\rho}\|_{S-sup}^2$ . Takie stany splątane, nazywać będziemy *stanami widzącymi swoje splątanie*.

**Lemat 5.3.** *Stany splątane, będące unormowanymi projektorami na podprzestrzeń nie zawierającą wektora separowalnego, widzą swoje splątanie.*

**Dowód:** Weźmy unormowany projektor na podprzestrzeń  $V$  nie zawierającą wektora separowalnego:

$$\rho = \frac{1}{\dim V} P_V.$$

Kwadratem jego normy Schmidta jest  $\|\rho\|_{HS}^2 = 1/\dim V$ .

Druga strona nierówności jest równa:

$$\|\sqrt{\rho}\|_{S-sup}^2 = \frac{1}{\dim V} \|P_V\|_{S-sup}^2 = \frac{1}{\dim V} \text{Sch}_{\max}^2(V).$$

Żeby stan  $\rho$  był separowalny, musi zachodzić nierówność:

$$1 \leq \text{Sch}_{\max}^2(V),$$

która zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy podprzestrzeń  $V$  zawiera stan separowalny.  $\square$

Zauważmy, że przykładem takiego stanu jest unormowany projektor na podprzestrzeń nie zawierającą wektora separowalnego skonstruowaną jako dopełnienie przestrzeni napinanej przez bazę  $UPB$ . Taki stan jest stanem splątany o dodatniej częściowej transpozycji. Widzimy zatem, że wniosek 5.2 daje nam kryterium zdolne wykrywać stany splątane PPT. Mankamentem kryterium jest problem efektywnego obliczania normy  $S-sup$  z pierwiastka macierzy gęstości, czy choćby dostatecznie dobrego szacowania jej z góry.

Różnica stron nierówności w tym kryterium jest funkcją ciągłą na zbiorze macierzy półdodatnio określonych (w topologii zadawanej np. przez normę HS). Jeżeli kryterium to jest łamane dla jakiegoś stanu, to również dla stanów z pewnej kuli (w normie HS) wokół niego.

Przypadkiem szczególnym przestrzeni nie zawierającej wektora separowalnego jest jednowymiarowa podprzestrzeń napinana przez wektor o rzędzie Schmidta wyższym niż jeden. Projektory na jednowymiarowe podprzestrzenie to stany czyste. Daje to następujący

**Wniosek 5.4.** *Stan czysty, jeżeli jest splątany, to widzi swoje splątanie.*

**Stany widziane przez projektory.** Dalej ograniczymy się w warunku (5.5) do projekcji ortogonalnych (zauważmy, że warunek (5.5) nie wymaga, by stan  $\eta$  był unormowany). Wniosek 4.25 mówi, że dla projektorów wielkość  $\|\sqrt{\rho}\|_{S-sup}^2$  jest równa maksymalnemu współczynnikowi Schmidta unormowanego wektora w przestrzeni, na którą rzutuje projektor. Wykorzystując to, dostaniemy warunek konieczny separowalności:

$$\forall V \subset \mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2} \quad \text{Tr}(\rho P_V) \leq \text{Sch}_{\max}^2(V) \quad (5.6)$$

**Uwaga 5.5.** *Twierdzenie (4.9) mówi, że jeżeli  $k > (d_1 - 1) \times (d_2 - 1)$ , to podprzestrzeń  $\text{span}\{\phi_{i_1}, \dots, \phi_{i_k}\}$  zawiera stan separowalny, co oznacza że teza twierdzenia się trywializuje ( $\text{Tr}(\rho P_V) \leq 1$ ). Nietrywialne warunki dostajemy tylko dla projektorów na podprzestrzenie o wymiarze  $k \leq (d_1 - 1) \times (d_2 - 1)$ .*

W szczególności, ograniczając się do podprzestrzeni jednowymiarowych, dostajemy proste kryterium separowalności:

$$\forall \Psi \in \mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_1} \quad \langle \Psi | \rho | \Psi \rangle \leq \text{Sch}_{\max}^2(\Psi) \quad (5.7)$$

Na mocy wniosku 4.34 mamy rozkładalność wszystkich świadków splątania  $W_{|\Psi\rangle\langle\Psi|}$ . Oznacza to, że zawężając kwantyfikowany zbiór stanów w tezie twierdzenia 5.6 do stanów czystych, nie wykrywamy tak otrzymanym kryterium stanów splątanych PPT. Oznacza

to, że wszystkie kryteria spektralne oparte na jednowymiarowych podprzestrzeniach opisują nie tyle własności stanów separowalnych, co własności stanów PPT.

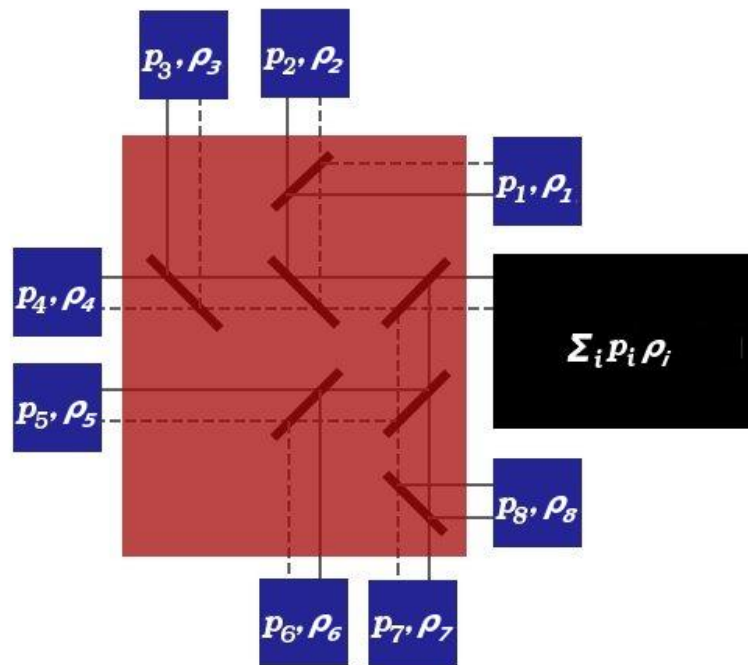
Jeżeli w warunku 5.7 weźmiemy wektor maksymalnie splątany, dostaniemy warunek, który spełniać muszą wszystkie stany PPT:

$$\text{Tr}(P_+\rho) \leq \frac{1}{d_1}, \quad (5.8)$$

który odnajdujemy w pracach [159] i [160]. Lewą stronę nierówności definiuje wielkość  $F(\rho)$  nazywaną *fidelity* (wierność) lub *singlet fraction*.

Zawężając zbiór podprzestrzeni do klasy podprzestrzeni charakterystycznych dla badanego stanu, można otrzymać w wyniku nowe warunki konieczne splątania o ciekawej interpretacji geometrycznej.

**Kryteria separowalności dla mieszanin statystycznych stanów mieszanych.** Wyobraźmy sobie, że do wyjścia urządzenia produkującego stany kwantowe podłączonych jest kilka źródeł stanów, które (założmy, że są to splątane stany fotonów) wędrują przez układ lusterek półprzepuszczalnych (*beam-splitterów*) do wyjścia, jak na rysunku 5.1



Rysunek 5.1: Urządzenie produkujące mieszaninę statystyczną stanów mieszanych par fotonów. Współczynniki kombinacji są równe względnym efektywnościom źródeł.

Stan wyjścia jest wtedy kombinacją wypukłą stanów produkowanych przez źródła, a współczynniki kombinacji są względnymi efektywnościami źródeł (prawdopodobieństwo



przejścia fotonu przez układ luster półprzepuszczalnych jest takie samo dla każdego źródła):

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i. \quad (5.9)$$

Zastosujmy do tego stanu kryterium (5.6), gdzie za podprzestrzeń  $V$  weźmiemy obraz macierzy gęstości  $\rho_i$  (oznaczymy go przez  $V_i$ ). Dostajemy warunek na separowalność stanu (5.9):

$$\sum_i p_i \text{Tr}(\rho_i P_{V_i}) \leq \text{Sch}_{\max}^2(V_i).$$

Oszacujmy z dołu sumę po lewej stronie nierówności przez jeden z jej składników. Wykorzystajmy fakt, że  $\langle \rho_i | P_{V_i} \rangle = \text{Tr}(\rho_i) = 1$ . Dostaniemy ograniczenie na względną efektywność źródła:

**Twierdzenie 5.6.** *Jeżeli kombinacja (5.9) jest stanem separowalnym, to unormowana efektywność każdego ze źródeł spełnia ograniczenie:*

$$p_i \leq \text{Sch}_{\max}^2(V_i). \quad (5.10)$$

Na mocy uwagi 5.5, nietrywialne warunki otrzymujemy tylko dla źródeł produkujących stany o rzędzie macierzy gęstości mniejszym lub równym  $(d_1 - 1) \times (d_2 - 1)$ .

W szczególności, jeżeli źródła produkują stany czyste o wektorach stanu  $\Psi_i$ , wzór (5.10) przechodzi na

$$p_i \leq \text{Sch}_{\max}^2(\Psi_i). \quad (5.11)$$

unormowana efektywność źródła jest wtedy ograniczona przez maksymalny współczynnik Schmidta wektora stanu, który ono produkuje. Ogólniej oznacza to, że w rozkładzie dowolnego stanu separowalnego na kombinację wypukłą jednowymiarowych projektorów udział takiego projektora w kombinacji musi być mniejszy, niż kwadrat maksymalnego współczynnika Schmidta wektora, na który on rzutuje. Jako kryterium bazujące na jednowymiarowych podprzestrzeniach, nie wykrywa ono stanów splątanych PPT.

Wynik ten można również otrzymać, wstawiając wektor  $\Psi_i$  do kryterium (5.7) i szacując sumę po lewej stronie nierówności przez jeden z jej składników.

**Ograniczenia na wartości własne.** Rozważmy teraz szczególny przypadek rozkładu (5.9) stanu  $\rho$ . Niech  $V_i$  będzie podprzestrzenią napinaną przez pewną liczbę wektorów własnych macierzy gęstości  $\rho$ , a  $\rho_V$  i  $\rho_{V^\perp}$  obcięciami dwuformy  $\rho$  odpowiednio do podprzestrzeni  $V$  i jej dopełnienia ortogonalnego. Wstawmy teraz taką sumę do wzoru (5.5), a za stan  $\eta$  weźmy projektor na podprzestrzeń  $V$ . Otrzymamy warunek:

$$\langle \rho_V + \rho_{V^\perp} | P_V \rangle_{HS} \leq \text{Sch}_{\max}^2(V).$$

Lewa strona warunku jest równa  $\langle \rho_V | P_V \rangle_{HS}$ , a to jest równe sumie wartości własnych przy wektorach własnych napinających przestrzeń  $V$ . Dostajemy więc:

**Twierdzenie 5.7.** *Suma wartości własnych macierzy gęstości stanu separowalnego jest ograniczona z góry przez maksymalny współczynnik Schmidta podprzestrzeni napinanej przez wektory własne odpowiadające tym wartościom własnym:*

$$\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k} \leq \text{Sch}_{\max}^2(\text{span}\{\phi_{i_1}, \dots, \phi_{i_k}\}) \quad (5.12)$$

Na mocy uwagi 5.5, nietrywialne warunki otrzymujemy tylko dla sum o liczbie składników mniejszej równej  $(d_1 - 1) \times (d_2 - 1)$ .

**Wniosek 5.8.** *Dla podprzestrzeni jednowymiarowych dostajemy warunek:*

$$\lambda_i \leq \text{Sch}_{\max}^2(\phi_i). \quad (5.13)$$

*Wartość własna stanu separowalnego jest mniejsza niż maksymalny współczynnik Schmidta odpowiadającego jej wektora własnego.*

Kryterium to bazuje na jednowymiarowych podprzestrzeniach, więc nie wykrywa ono stanów splątanych PPT.

Lepsze ograniczenie górne na wartość własną otrzymamy, jeżeli mamy dodatkową informację o degeneracji tej wartości własnej. Można wtedy z tej podprzestrzeni wybrać dowolny wektor własny i skonstruować na jego podstawie ograniczenie (5.13). Tym lepsze będzie to ograniczenie, im mniejszy będzie maksymalny współczynnik Schmidta tego wektora. Wprowadzamy zatem następującą:

**Definicja 5.9.** *Liczbą  $\text{Sch}_{\min}(V)$  oznaczamy minimum z maksymalnego współczynnika Schmidta wektora, brane po sferze jednostkowej w podprzestrzeni  $V$ .*

Przy użyciu wielkości  $\text{Sch}_{\min}(V)$  można sformułować uogólnienie kryterium (5.13) na zdegenerowane wartości własne:

**Twierdzenie 5.10.** *Dla wartości własnej  $\lambda_i$  odpowiadającej podprzestrzeni własnej  $V_i$  mamy ograniczenie:*

$$\lambda_i \leq \text{Sch}_{\min}^2(V_i). \quad (5.14)$$

### 5.3 Zbiory stanów wykrywanych - skuteczność spektralnych kryteriów separowalności

Żeby móc ocenić, na ile użyteczne są kryteria wyprowadzone w poprzednim rozdziale, należy scharakteryzować zbiór spełniających je stanów.

Pomiędzy kryteriami wprowadzonymi w poprzednim podrozdziale, dla których scharakteryzujemy zbiory spełniających je stanów, zachodzą następujące implikacje:

$$\forall \eta \langle \rho | \eta \rangle \leq \|\sqrt{\eta}\|_{S\text{-sup}}^2 \quad \Rightarrow \quad \|\rho\|_{HS}^2 \leq \|\sqrt{\rho}\|_{S\text{-sup}}^2$$

$$\text{Twierdzenie 5.1} \quad (5.2)$$

↓

$$\forall V \quad \text{Tr}(\rho P_V) \leq \text{Sch}_{\max}^2(V) \quad \Rightarrow \quad \forall \Psi \quad \langle \Psi | \rho | \Psi \rangle \leq \text{Sch}_{\max}^2(\Psi)$$

$$(5.6) \quad (5.7)$$

↓

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \leq \text{Sch}_{\max}^2(\text{span}\{\phi_i\}_{i \in I}) \quad \Rightarrow \quad \lambda_i \leq \text{Sch}_{\max}^2(\phi_i)$$

Twierdzenie 5.7

Wniosek 5.8

**Twierdzenie 5.11** (Własności zbioru stanów spełniających kryteria spektralne). *Zbiory stanów spełniających powyższe kryteria:*

1. Zawierają w sobie zbiór stanów separowalnych
2. Jeżeli pewien stan należy do zbioru, to zawiera się w nim cała orbita unitarnych operacji lokalnych tego stanu.

**Dowód:**

1. Zbiorem stanów spełniających kryterium z twierdzenia 5.1 jest zbiór stanów separowalnych. Pozostałe kryteria są słabsze, więc zbiory stanów je spełniających są nadzbiorem zbioru stanów separowalnych.
2. Zauważmy, że iloczyn HS, indukowana przez niego norma HS oraz norma  $S\text{-sup}$  są niezmiennicze na działanie grupy unitarnych operacji lokalnych.  $\square$

**Twierdzenie 5.12.** *Kryteria oparte na jednowymiarowych podprzestrzeniach (wzór (5.7) i wniosek 5.8) nie wykrywają splątania PPT - zbiory stanów spełniających te kryteria zawierają w sobie zbiór stanów PPT.*

**Dowód:** Wniosek 4.34 mówi, że każdy świadek splątania  $W_{|\Psi\rangle\langle\Psi|}$  jest rozkładalny. Kryteria oparte na jednowymiarowych podprzestrzeniach bazują na takich świadkach, dlatego nie są w stanie wykryć splątania PPT.  $\square$

**Twierdzenie 5.13.** *Kryteria oparte na podprzestrzeniach wyższego wymiaru (wzór (5.6), twierdzenie 5.7) i kryterium (5.2) wykrywają splątanie PPT. Innymi słowy, zbiory stanów spełniających te kryteria nie zawierają w sobie zbioru stanów PPT.*

**Dowód:** Lemat 5.3 orzeka, że unormowany projektor na podprzestrzeń nie zawierającą wektora separowalnego, jest stanem splątany widzącym swoje splątanie. Wśród takich stanów są projektory na dopełnienia ortogonalne podprzestrzeni napinanych przez bazy UPB, a takie projektory są stanami splątany PPT.

Rozważmy taki projektor  $P$ . Skonstruowany dla niego świadek  $W_P$  jest nierozkładalny [134]. Oznacza to, że używając go w kryterium (5.6) jesteśmy w stanie wykryć splątanie PPT.

Jeżeli obraz macierzy projektora  $P$  jest napinany przez wektory własne stanu  $\rho$ , wtedy kryterium (5.12) ograniczające sumę wartości własnych przy tych wektorach własnych potrafi wykrywać stany PPT.  $\square$

**Twierdzenie 5.14.** *Istnieją stany splątane, które nie widzą swojego splątania*

**Dowód:** Jądro świadka splątania  $W_\rho$  (hiperpłaszczyzna w zbiorze macierzy hermitowskich o jednostkowym śladzie, na której świadek się zeruje) jest prostopadłe do przecinającej go półprostej wychodzącej z unormowanej identyczności i przechodzącej przez stan  $\rho$ .

Jeżeli każdy stan splątany  $\tilde{\rho}$  z takiej półprostej widzi swoje splątanie, to jądro świadka  $W_{\tilde{\rho}}$  jest hiperpłaszczyzną styczną do brzegu zbioru stanów w punkcie, w którym ta półprosta go przecina.

Jeżeli każdy stan splątany widzi swoje splątanie, wtedy powyższa obserwacja dotyczy każdej półprostej wychodzącej z unormowanej identyczności, więc każda hiperpłaszczyzna styczna do brzegu zbioru stanów separowalnych byłaby prostopadła do odcinka łączącego stan  $\rho$  z unormowaną identycznością, ale taką własność posiada tylko kula o środku wokół unormowanej identyczności. Wiemy natomiast, że zbiór stanów separowalnych nie jest kulą.  $\square$

Fakt, że najmniejszym możliwym rzędem splątanego stanu PPT jest 4 - [47], [48], skłania do postawienia hipotezy, że

**Hipoteza 5.15.** *Splątanie PPT są w stanie wykrywać kryteria bazujące na projektorach rzędu co najmniej 4.*

## 5.4 Przykłady działania kryteriów spektralnych

**Dwa qubity.** W przypadku dwóch qubitów uwaga 5.5 ogranicza korzyści z twierdzenia 5.7 do wniosku 5.8 (jedynymi podprzestrzeniami nie zawierającymi wektorów separowalnych są podprzestrzenie jednowymiarowe).

Na początek załóżmy, że bazą własną stanu jest baza Bella (1.11):

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(\Phi_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathfrak{A}(\Phi_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \mathfrak{A}(\Phi_3) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \mathfrak{A}(\Phi_4) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Maksymalnym współczynnikiem Schmidta wszystkich wektorów bazy jest  $1/\sqrt{2}$ . Na podstawie wniosku (5.8) mamy warunek konieczny  $\lambda_i \leq 1/2$ . Dla tej bazy własnej jest to

jednocześnie warunek wystarczający ([161], [10]). Podzbiór stanów separowalnych w sympleksie stanów, których bazą własną jest baza Bella, jest czworoscianem napinany przez środki jego ścian.

Tylko dla tej bazy zbiór stanów separowalnych ma tak prosty kształt, pozwalający opisać go za pomocą czterech liniowych nierówności na wartości własne. Rozważmy dwuparametrową rodzinę baz własnych, do której należy baza Bella:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(\Phi_1(\alpha, \beta)) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} & \mathfrak{A}(\Phi_2(\alpha, \beta)) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha) \end{bmatrix} \\ \mathfrak{A}(\Phi_3(\alpha, \beta)) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \sin(\beta) \\ \cos(\beta) & 0 \end{bmatrix} & \mathfrak{A}(\Phi_4(\alpha, \beta)) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \cos(\beta) \\ -\sin(\beta) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Stan o takiej bazie własnej jest stanem circulant, tzn. macierz gęstości takiego stanu jest macierzą blokową o strukturze bloków niezmienniczej na częściową transpozycję:

$$\rho = \begin{bmatrix} \lambda_1 \sin^2(\alpha) + \lambda_2 \cos^2(\alpha) & 0 & \lambda_3 \sin^2(\beta) + \lambda_4 \cos^2(\beta) & 0 \\ 0 & (\lambda_1 - \lambda_2) \sin(\beta) \cos(\beta) & 0 & (\lambda_1 - \lambda_2) \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \sin(\alpha) \cos(\alpha) & 0 & (\lambda_1 - \lambda_2) \sin(\beta) \cos(\beta) & 0 \\ 0 & (\lambda_1 - \lambda_2) \sin(\alpha) \cos(\alpha) & 0 & \lambda_3 \cos^2(\beta) + \lambda_4 \sin^2(\beta) \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \sin(\beta) \cos(\beta) & 0 & \lambda_3 \cos^2(\beta) + \lambda_4 \sin^2(\beta) & 0 \\ 0 & \lambda_1 \cos^2(\alpha) + \lambda_2 \sin^2(\alpha) & 0 & \lambda_1 \cos^2(\alpha) + \lambda_2 \sin^2(\alpha) \end{bmatrix}$$

Dla dwóch qubitów warunkiem koniecznym i wystarczającym jest dodatniość częściowej transpozycji. Stan  $\rho$  jest więc separowalny wtedy i tylko wtedy, gdy dwie poniższe macierze są półdefinitnie określone:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \lambda_1 \sin^2(\alpha) + \lambda_2 \cos^2(\alpha) & (\lambda_3 - \lambda_4) \sin(2\beta)/2 \\ (\lambda_3 - \lambda_4) \sin(2\beta)/2 & \lambda_1 \cos^2(\alpha) + \lambda_2 \sin^2(\alpha) \end{bmatrix} &\geq 0 \\ \begin{bmatrix} \lambda_3 \sin^2(\beta) + \lambda_4 \cos^2(\beta) & (\lambda_1 - \lambda_2) \sin(2\alpha)/2 \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \sin(2\alpha)/2 & \lambda_3 \cos^2(\beta) + \lambda_4 \sin^2(\beta) \end{bmatrix} &\geq 0. \end{aligned}$$

Oznacza to że spełnione są dwie nierówności

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - \cos^2(2\alpha)(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - \sin^2(2\beta)(\lambda_3 - \lambda_4)^2 &\geq 0 \\ (\lambda_3 + \lambda_4)^2 - \cos^2(2\beta)(\lambda_3 - \lambda_4)^2 - \sin^2(2\alpha)(\lambda_1 - \lambda_2)^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

Zbiór macierzy hermitowskich spełniających pierwszą nierówność to iloczyn kartezjański prostej w  $\mathbb{R}^4$  (o kierunku  $(\lambda_3 + \lambda_4)$ ) i trójwymiarowego stożka w jej dopełnieniu ortogonalnym (podstawą stożka jest elipsa o długościach półosi  $\cos(2\alpha)$  i  $\sin(2\alpha)$ ). Analogicznie zbiorem macierzy spełniających drugą nierówność jest iloczyn kartezjański prostej  $\mathbb{R}^4$  o kierunku  $(\lambda_1 + \lambda_2)$  i trójwymiarowego stożka w jej dopełnieniu ortogonalnym, którego

podstawą jest elipsa o długościach półosi  $\cos(2\beta)$  i  $\sin(2\beta)$ . Zbiór stanów spełniających obie nierówności to przecięcie przekroju dwóch opisanych wyżej zbiorów z sympleksem macierzy półdodatnio określonych o jednostkowym śladzie.

Kryteria spektralne dadzą natomiast oszacowania:

$$\lambda_1, \lambda_2 \leq \cos^2(\alpha) \quad \lambda_3, \lambda_4 \leq \cos^2(\beta)$$

(założyliśmy, że kąty  $\alpha$  oraz  $\beta$  należą do przedziału  $[0, \pi/4]$ , zawsze można to uzyskać za pomocą lokalnych operacji unitarnych). Zbiorem stanów spełniających te kryteria jest ośmiościan o parach przeciwległych ścian równoległych, powstały z obcięcia rogów w sympleksie. Zbiór stanów separowalnych jest wpisany w tę figurę.

**Dwa qutrity w bazie magicznej** Żeby powtórzyć prosty przykład, który w poprzednim paragrafie uzyskaliśmy dla bazy Bella, trzeba mieć odpowiednik bazy Bella (magicznej) w wyższych wymiarach. Macierzami współrzędnych wektorów bazy Bella są, z dokładnością do obrotu fazy, macierze Pauliego (wraz z identycznością).

W przypadku rozkładu stanu kwantowego w  $d$ -wymiarowej przestrzeni Hilberta uogólnieniem bazy macierzy Pauliego na wyższe wymiary była baza macierzy Gell-Manna [71]. W przypadku bazy magicznej macierze Pauliego są jedynie macierzami współrzędnych wektora i nie ma potrzeby wymagania ich hermitowskości. Uogólnia się je w inny sposób. By uzyskać bazę magiczną w przestrzeni  $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$  zauważamy, że macierze Pauliego są macierzami operatorów Weyla [162], czyli operatorów permutacji cyklicznych zbioru dwuelementowego obracającymi dodatkowo fazy wektorów bazowych. W ogólnym wymiarze, macierze  $d^2$  operatorów Weyla są postaci:

$$W_{k,l} = w^{k(s-l)} |s-l\rangle\langle s|, \quad w = e^{2\pi i/d}. \quad (5.15)$$

Wektory bazy przestrzeni  $\mathbb{C}^d$  numerują liczby  $0, \dots, d-1$ . Odejmowanie we wzorze (5.15) jest zdefiniowane modulo  $d$ . Unormowane macierze operatorów Weyla bierzemy za macierze współrzędnych wektorów ogólnej bazy magicznej za [163], [164]. Dla  $d = 3$  otrzymamy dziewięć macierzy współrzędnych wektorów (nieunormowanych) bazy magicznej:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(\Phi_0) = W_{0,0} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathfrak{A}(\Phi_3) = W_{0,1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathfrak{A}(\Phi_6) = W_{0,2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathfrak{A}(\Phi_1) = W_{1,0} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & w^2 \end{bmatrix} & \mathfrak{A}(\Phi_4) = W_{1,1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & w \\ w^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathfrak{A}(\Phi_7) = W_{1,2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ w & 0 & 0 \\ 0 & w^2 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathfrak{A}(\Phi_2) = W_{2,0} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 0 & w \end{bmatrix} & \mathfrak{A}(\Phi_5) = W_{2,1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & w^2 \\ w & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathfrak{A}(\Phi_8) = W_{2,2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ w^2 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Liczba  $w$  jest równa  $e^{2\pi i/3}$ . Normowanie przemnoży każdy z wektorów bazy przez  $1/\sqrt{3}$ . Normą supremum każdej z dziewięciu macierzy współrzędnych jest więc  $1/\sqrt{3}$ . Dla dowolnego stanu o takiej bazie własnej wniosek 5.8 daje od razu ograniczenia na wartości własne  $\lambda_i \leq 1/3$ .

Trójki wektorów  $\{\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2\}$ ,  $\{\Phi_3, \Phi_4, \Phi_5\}$  oraz  $\{\Phi_6, \Phi_7, \Phi_8\}$  napinają trzy trójwymiarowe podprzestrzenie wektorów o tym samym rozkładzie Schmidta, których sumą prostą jest cała przestrzeń  $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ . Podobnie jak w przypadku stanów dwóch qubitów o bazie własnej Bella, otrzymujemy zatem sympleks stanów circulant. Przestrzenie o tym samym rozkładzie Schmidta są szczególnymi przykładami podprzestrzeni, dla których można analitycznie wyliczyć maksymalny współczynnik Schmidta. Mówi o tym twierdzenie 4.30 w podrozdziale 4.5.

Ogólnie, dla stanów circulant w wymiarze  $d^2$  przestrzeń Hilberta rozpada się na  $d$  podprzestrzeni wymiaru  $d$ , zawierających wektory o tym samym rozkładzie Schmidta. Każda z nich zawiera wektor separowalny, zatem jedyne nietrywialne kryteria spektralne wiążące wartości własne odpowiadające wektorom z takiej podprzestrzeni dotyczą sum co najwyżej  $d - 1$  wartości własnych. W poprzednim przykładzie ograniczenie to pozwalało tylko na kryteria spektralne na jedną wartość własną. W tym przykładzie możemy już pokazać kryteria na sumy dwóch wartości własnych.

Obliczmy z twierdzenia 4.30 maksymalne współczynniki Schmidta dla trzech podprzestrzeni dwuwymiarowych napinanych przez wektory  $\{\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2\}$ . Dla każdej z nich otrzymamy w wyniku  $\sqrt{2/3}$ , co da nam kryteria:

$$\lambda_1 + \lambda_2 \leq 2/3 \quad \lambda_2 + \lambda_3 \leq 2/3 \quad \lambda_3 + \lambda_1 \leq 2/3.$$

Analogiczne kryteria dostaniemy dla wartości własnych z pozostałych dwóch podprzestrzeni. Kryteria które otrzymaliśmy są sumami kryteriów jednowymiarowych i nie wnoszą żadnej nowej informacji, ponieważ wektory własne mają te same współczynniki Schmidta. W następnym przykładzie zaprezentujemy kryteria na sumy wartości własnych dające ostrzejsze oszacowania niż sumy kryteriów z jedną wartością własną.

Zaprezentowane kryteria nie wykrywają więcej niż kryterium PPT, ponieważ bazują na sumach co najwyżej 2 wartości własnych (twierdzenie 5.12 i hipoteza 5.15), a w rzeczywistości kryteria te są sumami kryteriów z jedną wartością własną. Kryterium spektralne wykrywające splątanie PPT pojawi się w następnym przykładzie. Dyskusję splątania w sympleksie magicznym znaleźć można w pracach [163], [164], [165], [166].

**Stany o bazie własnej złożonej z bazy UPB i jej dopełnienia.** Rozważmy teraz sympleks stanów w  $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$  o bazie własnej zadanej przez wektory z nierozszerzalnej bazy produktowej (3.29) i przez wektory z jej dopełnienia do bazy całej przestrzeni (3.30). Wektory z bazy UPB są separowalne i kryterium spektralne oparte na jakiegokolwiek podprzestrzeni własnej zawierającej któryś z tych wektorów własnych da trywialną nierówność (z prawą stroną równą 1). Zaprezentujemy zatem wyniki dla podprzestrzeni własnych napinanych przez wektory własne z dopełnienia bazy UPB. Ponieważ podprzestrzeń napinana przez bazę UPB nie zawiera wektora separowalnego, każda podprzestrzeń tej podprzestrzeni da nietrywialny warunek na spektrum.

Wektory dopełnienia rozważanej bazy UPB są postaci:

$$\mathfrak{A}(\Phi_5) = \frac{1}{\sqrt{1+2\alpha^2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathfrak{A}(\Phi_6) = \frac{1}{\sqrt{1+2\alpha^2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{A}(\Phi_7) = \frac{1}{\sqrt{1+2\alpha^2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad \mathfrak{A}(\Phi_8) = \frac{1}{\sqrt{1+2\alpha^2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie współczynnik  $\alpha$  jest równy  $1/2\sqrt{\cos(\pi/5)} \approx 0.5559$ .

Maksymalne współczynniki Schmidta powyższych wektorów można obliczyć w sposób analityczny. Wynoszą one:

$$\text{Sch}_{\max}(\Phi_5) = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \alpha^2 + \sqrt{\frac{1}{4} + \alpha^2}}}{\sqrt{1 + 2\alpha^2}} \approx 0.9801$$

$$\text{Sch}_{\max}(\Phi_6) = \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{\sqrt{1 + 2\alpha^2}} \approx 0.8995$$

$$\text{Sch}_{\max}(\Phi_7) = \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{\sqrt{1 + 2\alpha^2}} \approx 0.8995$$

$$\text{Sch}_{\max}(\Phi_8) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\alpha^2}} \approx 0.7862$$

Spśród sześciu podprzestrzeni dwuwymiarowych, analitycznie maksymalny współczynnik Schmidta wyznaczyć można dla podprzestrzeni  $\text{span}\{\Phi_6, \Phi_7\}$ . Każdy niezerowy element tej podprzestrzeni ma rząd Schmidta równy 2. Dowolny unormowany element podprzestrzeni jest postaci:

$$\phi_{u,v} = u\Phi_6 + v\Phi_7 = \begin{bmatrix} 0 & u & 0 \\ v & 0 & \alpha(v-u) \\ 0 & \alpha(v+u) & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie  $|u|^2 + |v|^2 = 1$ . Współczynniki Schmidta elementu  $\phi_{u,v}$  są równe:

$$\frac{\sqrt{|u|^2 + \alpha^2|u+v|^2}}{\sqrt{1+2\alpha^2}}, \quad \frac{\sqrt{|v|^2 + \alpha^2|u-v|^2}}{\sqrt{1+2\alpha^2}}$$

Chcemy znaleźć maksimum tego wyrażenia po sferze  $S^3$  unormowanych wektorów w dwuwymiarowej podprzestrzeni zespolonej. Zauważmy, że pomnożenie wektora przez skalar o module 1 nie zmieni wartości jego współczynników Schmidta. Oznacza to, że interesujące nas funkcje (współczynniki Schmidta) są stałe na sferach  $S_1$  wektorów różniących się fazą, czyli że funkcje te faktoryzują się przez sferę Blocha.

Niech  $x, y, z$  oznaczają współrzędne na sferze Blocha, której biegunami są projektory na stany  $\Phi_6 = \phi_{1,0}$  i  $\Phi_7 = \phi_{0,1}$ . Zadane są one równościami:

$$x = \text{Re}(u^*v) \quad y = \text{Im}(u^*v) \quad z = |u|^2 - |v|^2.$$



W tych współrzędnych współczynniki Schmidta wektora  $\phi_{x,y,z}$ , na który rzutuje projektor reprezentowany przez punkt sfery o współrzędnych  $x, y, z$ , są równe:

$$\frac{\sqrt{(1+2\alpha^2)+z+2\alpha^2x}}{\sqrt{2}\sqrt{1+2\alpha^2}}, \quad \frac{\sqrt{(1+2\alpha^2)-z-2\alpha^2x}}{\sqrt{2}\sqrt{1+2\alpha^2}}$$

Zauważmy, że wartość pierwszego współczynnika Schmidta wektora  $\phi_{x,y,z}$  jest równa wartości drugiego współczynnika Schmidta wektora  $\phi_{-x,y,-z}$ . Maksimum pierwszego i drugiego współczynnika na sferze Blocha są sobie równe. Pierwszy współczynnik Schmidta osiąga wartość maksymalną w punkcie sfery Blocha, w którym funkcja liniowa  $z+2\alpha^2x = (2\alpha^2, 0, 1) \cdot (x, y, z)$  osiąga maksimum. Tym punktem jest

$$(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1+4\alpha^4}}(2\alpha^2, 0, 1),$$

a wartość pierwszego współczynnika Schmidta w tym punkcie wynosi

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \alpha^2 + \sqrt{\frac{1}{4} + \alpha^4}}}{\sqrt{1+2\alpha^2}} \approx 0.9192$$

Wynik analityczny udało się otrzymać dzięki temu, że każdy unormowany wektor w tej podprzestrzeni ma rząd Schmidta 2, więc można łatwo wyrazić analitycznie jego współczynniki Schmidta. Rysunek 5.2a przedstawia wartości maksymalnego współczynnika Schmidta na sferze Blocha w tej podprzestrzeni.

Dla pozostałych pięciu podprzestrzeni wymiaru 2 maksymalne współczynniki Schmidta obliczamy numerycznie:

$$\text{Sch}_{\max}(\text{span}\{\Phi_5, \Phi_6\}) \approx 0.9801$$

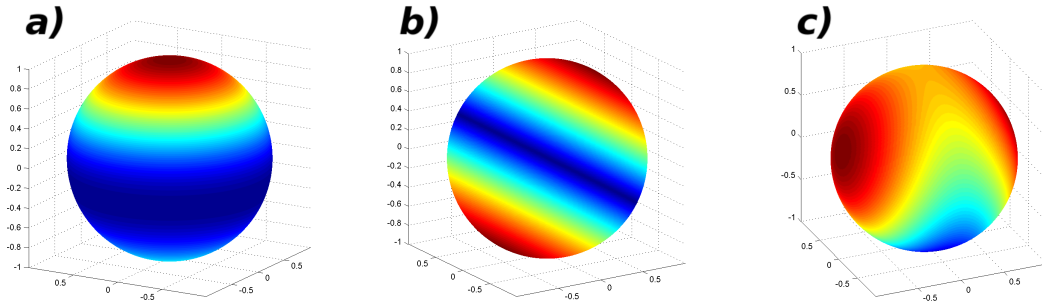
$$\text{Sch}_{\max}(\text{span}\{\Phi_5, \Phi_7\}) \approx 0.9801$$

$$\text{Sch}_{\max}(\text{span}\{\Phi_5, \Phi_8\}) \approx 0.9801$$

$$\text{Sch}_{\max}(\text{span}\{\Phi_6, \Phi_8\}) \approx 0.9503$$

$$\text{Sch}_{\max}(\text{span}\{\Phi_7, \Phi_8\}) \approx 0.9503$$

Rysunek 5.2 przedstawia maksymalny współczynnik Schmidta na sferach Blocha trzech dwuwymiarowych podprzestrzeni podprzestrzeni  $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ . W przypadku  $\mathbf{c}$  poziomice funkcji nie są okręgami. Cechą wspólną jest występowanie dwóch maksimum lokalnych, o czym należy pamiętać wyliczając je metodą gradientową.



Rysunek 5.2: Maksymalny współczynnik Schmidta jako funkcja na sferach Blocha dwuwymiarowych podprzestrzeni  $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ . Kolor fioletowy oznacza najmniejszą wartość funkcji, a czerwony największą.

a) Podprzestrzeń napinana przez  $\Phi_5$  i  $\Phi_6$  (odpowiednio górny i dolny biegun). Podobnie wyglądają sfery Blocha w pozostałych dwóch podprzestrzeniach, w których jednym z napinających wektorów jest  $\Phi_5$ .

b) Podprzestrzeń napinana przez  $\Phi_6$  i  $\Phi_7$  (odpowiednio górny i dolny biegun).

c) Podprzestrzeń napinana przez  $\Phi_7$  i  $\Phi_8$  (odpowiednio górny i dolny biegun). Podobnie wygląda sfera Blocha podprzestrzeni napinanej przez  $\Phi_6$  i  $\Phi_8$

Obliczone numerycznie maksymalne współczynniki Schmidta dla podprzestrzeni trójwymiarowych są następujące:

$$\text{Sch}_{\max}(\text{span}\{\Phi_6, \Phi_7, \Phi_8\}) \approx 0.9604$$

$$\text{Sch}_{\max}(\text{span}\{\Phi_5, \Phi_7, \Phi_8\}) \approx 0.9801$$

$$\text{Sch}_{\max}(\text{span}\{\Phi_5, \Phi_6, \Phi_8\}) \approx 0.9801$$

$$\text{Sch}_{\max}(\text{span}\{\Phi_5, \Phi_6, \Phi_7\}) \approx 0.9801,$$

a cała podprzestrzeń napinana przez cztery wektory własne  $\Phi_5, \dots, \Phi_8$  ma maksymalny współczynnik Schmidta równy 0.9809. Maksimum jest osiągnięte w wielu punktach, między innymi w wektorze własnym  $\Phi_5$ . Dla tej podprzestrzeni policzymy również minimum maksymalnego współczynnika Schmidta w zbiorze unormowanych wektorów, które wynosi 0.6982.

Mamy zatem następujące kryteria spektralne:

$$\lambda_5 \leq 0.9621 \tag{5.17}$$

$$\lambda_6 \leq 0.8091 \tag{5.18}$$

$$\lambda_7 \leq 0.8091 \tag{5.19}$$

$$\lambda_8 \leq 0.6181 \tag{5.20}$$

$$\lambda_5 + \lambda_6 \leq 0.9621 \tag{5.21}$$

$$\lambda_5 + \lambda_7 \leq 0.9621 \tag{5.22}$$

$$\lambda_5 + \lambda_8 \leq 0.9621 \tag{5.23}$$

$$\lambda_6 + \lambda_7 \leq 0.8449 \tag{5.24}$$

$$\lambda_6 + \lambda_8 \leq 0.9031 \tag{5.25}$$

$$\lambda_7 + \lambda_8 \leq 0.9031 \tag{5.26}$$

$$\lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8 \leq 0.9604 \quad (5.27)$$

$$\lambda_5 + \lambda_7 + \lambda_8 \leq 0.9621 \quad (5.28)$$

$$\lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_8 \leq 0.9621 \quad (5.29)$$

$$\lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 \leq 0.9621 \quad (5.30)$$

$$\lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8 \leq 0.9621 \quad (5.31)$$

Widzimy, że nierówności (5.17), (5.21), (5.22), (5.23), (5.28), (5.29), (5.30) są niepotrzebne, ponieważ są wnioskami z nierówności (5.31).

Stan, który ma niezerowe wartości własne tylko przy wektorach  $\Phi_5, \dots, \Phi_8$  jest splątany, ponieważ łamie kryterium obrazu - obraz macierzy tego stanu nie da się napiąć przez wektory separowalne. Separowalność takiego stanu wyklucza nierówność (5.31) - ogranicza ona z góry ślad tego stanu, a on musi być równy 1. Rozważmy kombinację wypukłą  $\rho_\mu$  dowolnej macierzy gęstości  $\rho$  z rozważanego sympleksu stanów i pewnej innej macierzy gęstości  $\eta$  o ortogonalnym obrazie:

$$\rho_\mu = \mu\rho + (1 - \mu)\eta.$$

Zapytajmy, kiedy może być ona stanem separowalnym. Żeby tak było, udział stanu  $\rho$  nie może być większy niż 0.9621 (prawa strona nierówności (5.31)). Kryterium spektralne pozwala oszacować promień otoczenia sympleksu w brzegu zbioru stanów, które nie zawiera stanów separowalnych.

Na koniec tego przykładu pokażemy korzyści, które daje wiedza o degeneracji wartości własnych. Dla stanu, który ma wartości własne  $\lambda_5, \dots, \lambda_8$  zdegenerowane, każda z tych wartości własnych jest ograniczona przez minimum maksymalnego współczynnika Schmidta po sferze jednostkowej w zdegenerowanej podprzestrzeni własnej (twierdzenie 5.10). Korzystając ze znalezionej numerycznie minimum maksymalnego współczynnika Schmidta  $\text{Sch}_{\min}(\text{span}\{\Phi_5, \dots, \Phi_8\}) \approx 0.6982$  dostajemy ograniczenia:

$$\lambda_5 \leq 0.4874 \quad \lambda_6 \leq 0.4874 \quad \lambda_7 \leq 0.4874 \quad \lambda_8 \leq 0.4874,$$

które są mocniejsze niż ograniczenia (5.17) - (5.20).

**Oszacowania temperatury, dla której dekoherencja nie niszczy splątania.** W podrozdziale 1.5 omówiliśmy mechanizm dekoherencji. Pod wpływem oddziaływania z otoczeniem stan układu, którego dynamikę generuje hamiltonian  $H$ , spada asymptotycznie na stan Gibbsa  $\rho_\infty = \exp(-\beta H)/\text{Tr}(\exp(-\beta H))$ . W przypadku gdy podukłady nie oddziałują, stan Gibbsa leży we wnętrzu zbioru stanów separowalnych i dekoherencja prowadzi do utraty splątania w skończonym czasie. Wspomnieliśmy o możliwości istnienia mechanizmu odwrotnego - generowania splątania przez dekoherencję, gdy podukłady oddziałują. Sytuacja taka ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy stan Gibbsa układu jest stanem splątany. W tym podrozdziale pokażemy dolne ograniczenie temperatury, w której to zachodzi.

Wartościami własnymi stanu Gibbsa  $\rho_\infty$  są:

$$\sigma(\rho_\infty) = \{e^{-\beta E_i} : E_i \in \sigma(H)\}$$

(obserwabela  $H$  to Hamiltonian rządzący dynamiką układu). Jeżeli stan ten jest separowalny, to każda z jego wartości własnych musi spełniać kryterium (5.13):

$$\frac{e^{-\beta E_i}}{\sum_{j=1}^{d_1 d_2} e^{-\beta E_j}} \leq \text{Sch}_{\max}^2(\phi_i),$$

gdzie wektor  $\phi_i$  oznacza wektor własny Hamiltonianu przy energii  $E_i$ . Podnosząc nierówność stronami do potęgi  $-1$  otrzymujemy warunek:

$$F_i(\beta) = \sum_{j=1}^{d_1 d_2} e^{-\beta(E_j - E_i)} \geq \frac{1}{\text{Sch}_{\max}^2(\phi_i)} \quad (5.32)$$

Łamanie którejkolwiek z tych nierówności jest warunkiem wystarczającym splątania. Oznaczmy przez  $\beta_{\min}$  najniższą temperaturę odwrotną  $\beta$ , dla której jedna z nierówności przechodzi w równość. Wtedy dla temperatur z przedziału  $[0, 1/k\beta_{\min}]$  stan Gibbsa jest splątany i proces dekoherencji prowadzi do splątania podukładów.

**Uwaga 5.16.** W sumie po lewej stronie nierówności (5.32) jeden ze składników jest równy jeden, zatem funkcja  $F_i$  przyjmuje wartości większe od 1. Żeby nierówność (5.32) mogła być łamana dla pewnej funkcji  $F_i$ , jej prawa strona musi być większa od 1, czyli  $i$ -ty wektor własny musi być splątany. Jest to odzwierciedlenie faktu, że tylko splątane wektory własne dają nietrywialne kryteria spektralne.

**Uwaga 5.17.** Zauważmy, że maksymalna wartość prawej strony nierówności (5.32) jest mniejsza równa wymiarowi mniejszego podukładu  $d_1$ . Z kolei funkcja  $F_i$  po lewej stronie tej nierówności jest ograniczona z dołu przez liczbę wartości własnych mniejszych równych  $i$ -tej. W szczególności, jeżeli wymiar mniejszego podukładu wynosi 2, wtedy tylko wektor własny przy najniższej energii może dać nietrywialne ograniczenie.

Dla przykładu rozważmy przypadek dwóch spinów  $1/2$  oddziałujących magnetycznie ze sobą i z zewnętrznym polem magnetycznym o kierunku indukcji magnetycznej zgodnym z kierunkiem osi  $z$ . Hamiltonian układu składa się z dwóch członów oddziaływania momentów magnetycznych spinów z zewnętrznym polem magnetycznym i trzeciego członu sprzęgania się momentów magnetycznych. Momenty magnetyczne są proporcjonalne do spinów:

$$H = -\mu B \hat{S}_z^{(1)} \otimes I - \mu B I \otimes \hat{S}_z^{(2)} - J \mu^2 (\hat{S}_1^{(1)} \otimes \hat{S}_1^{(2)} + \hat{S}_2^{(1)} \otimes \hat{S}_2^{(2)} + \hat{S}_3^{(1)} \otimes \hat{S}_3^{(2)}).$$

Operator spinu jest równy  $\vec{S} = \hbar[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z]$ . Macierz hamiltonianu jest więc równa:

$$H = -\frac{\hbar}{2} B \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \frac{\hbar^2}{4} \mu^2 J \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jej wartościami własnymi są liczby:

$$\begin{aligned} E_1 &= a - b \\ E_2 &= a + b \\ E_3 &= 3a \\ E_4 &= -a, \end{aligned}$$

gdzie dla uproszczenia zapisu wprowadziliśmy oznaczenia  $a = (\frac{\hbar\mu}{2})^2 J$ ,  $b = \frac{\hbar\mu}{2} B$ . Maksymalne współczynniki Schmidta odpowiadających im wektorów własnych wynoszą odpowiednio 1, 1,  $1/\sqrt{2}$ ,  $1/\sqrt{2}$ . Uwaga 5.16 orzeka, że ograniczenia na temperaturę mogą zatem pochodzić tylko od trzeciego i czwartego wektora własnego. Trzecia wartość własna jest większa od czwartej. Uwaga 5.17 mówi, że nierówność (5.32) tylko dla  $i = 4$  daje nietrywialne ograniczenie. Funkcja  $F_4$  jest równa:

$$F_4 = e^{-(b+2a)\beta} + e^{-(-b+2a)\beta} + 1 + e^{-4a\beta} = e^{-2a\beta} 2\text{ch}(b\beta) + 1 + e^{-4a\beta}.$$

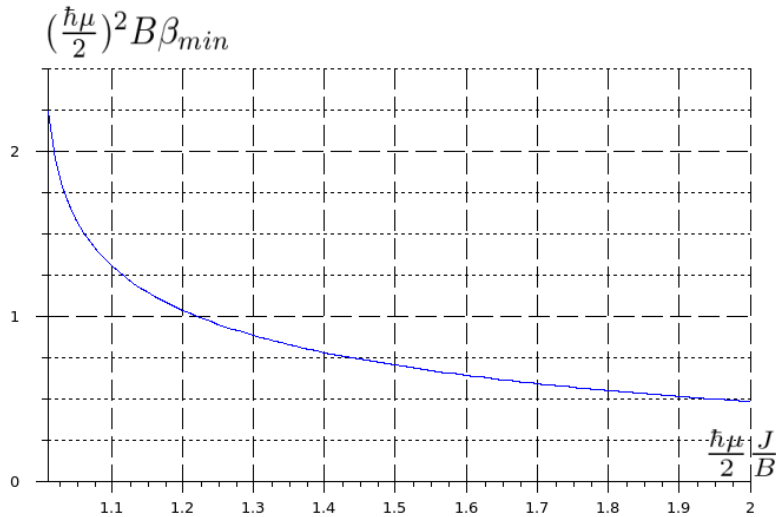
Dla tej funkcji nierówność (5.32) przyjmuje postać:

$$e^{-2a\beta} 2\text{ch}(b\beta) + 1 + e^{-4a\beta} \leq 2,$$

co jest równoważne warunkowi  $\text{ch}(b\beta) \leq \text{sh}(a\beta)$ . Po wstawieniu wartości  $a$  i  $b$  dostaniemy warunek:

$$\text{ch}\left(\frac{\hbar\mu}{2} B\beta\right) \leq \text{sh}\left(\left(\frac{\hbar\mu}{2}\right)^2 J\beta\right).$$

Temperatura odwrotna  $\beta_{min}$ , dla której nierówność przechodzi w równość jest funkcją stosunku  $\frac{\hbar\mu}{2} \frac{J}{B}$ . Funkcja ta jest określona na przedziale  $(1, 0)$ , jest malejąca, a jej granica w 1 jest nieskończona. Jej wykres przedstawia rysunek (5.3).



Rysunek 5.3: Zależność minimalnej temperatury odwrotnej, dla której stan Gibbsa jest splątany, od stosunku sprzężenia między spinami i pola zewnętrznego.

Temperaturę maksymalną  $T_{max}$ , dla której wszystkie stany Gibbsa w przedziale temperatur  $[0, T_{max}]$  są splątane, szacujemy z dołu przez odwrotność funkcji  $\beta_{min}(B, J)$ . Otrzymujemy funkcję rosnącą w sprzężeniu między spinami. Im silniejsze jest oddziaływanie między spinami dla ustalonej wartości zewnętrznego pola magnetycznego, tym w wyższej temperaturze możemy uzyskać splątanie podukładów na drodze dekoherencji.

Zaprezentowana powyżej metoda działa również dla układów o wyższym wymiarze przestrzeni Hilberta.

## 5.5 Gradientowa metoda rozstrzygnięcia o separowalności

Równoważne sformułowanie kryterium separowalności (5.5) mówi, że stan jest separowalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \eta \in \mathcal{S}_+(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}) \quad \langle \rho | \eta \rangle \leq \|\sqrt{\eta}\|_{S-sup}^2.$$

Dla stanu  $\rho$ , separowalność którego badamy, zdefiniujmy funkcję  $F_\rho : \mathcal{S}_+(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}) \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$F_\rho(\eta) = \frac{\langle \rho | \eta \rangle_{HS}}{\|\sqrt{\rho}\|_{S-sup}^2} \quad (5.33)$$

Stan jest separowalny wtedy i tylko wtedy, gdy maksimum tej funkcji jest mniejsze lub równe 1.

Ponieważ istnieje szeroka klasa stanów widzących swoje splątanie (są to stany  $\rho$  dla których  $F_\rho(\rho) > 1$ ), za moment startu metody można wybrać sam stan  $\rho$ . Poruszając się w kierunku gradientu funkcji przekroczymy w pewnym momencie wartość 1, co upewni nas o splątaniu badanego stanu, albo osiągniemy stan, w którym gradient będzie zmniejszał się mniej niż założona dokładność numeryczna. Oznacza to, że osiągnęliśmy maksimum, ale jest ono mniejsze od 1. Poniższy lemat gwarantuje, że jest to maksimum globalne:

**Lemat 5.18.** *Zbiór punktów, w których funkcja  $F_\rho$  osiąga maksimum lokalne, jest zbiorem wypukłym.*

Na zbiorze tym wartość funkcji jest taka sama i równa maksymalnej, więc osiągnięcie maksimum lokalnego oznacza osiągnięcie maksimum globalnego. Dowód lematu zostanie podany w dalszej części podrozdziału.

Zauważmy, że funkcja  $F_\rho$  faktoryzuje się przez zbiór półprostych (norma  $S-sup$  podobnie jak norma  $sup$  jest funkcją jednorodną stopnia jeden). Można zatem zdefiniować rzutowanie  $\pi$  przypisujące każdej półprostej w zbiorze półdodatnio określonych macierzy hermitowskich jej element dla którego zachodzi  $\|\sqrt{\rho}\|_{S-sup} = 1$  oraz liniową funkcję  $\tilde{F} : \{\rho : \|\sqrt{\rho}\|_{S-sup} = 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Funkcję  $F_\rho$  można wyrazić jako złożenie  $F_\rho = \tilde{F}_\rho \circ \pi$ . Znajdowanie maksimum funkcji  $F_\rho$  po zbiorze stanów jest równoważne znajdowaniu maksimum funkcji liniowej  $\tilde{F}_\rho$  po zbiorze  $\{\rho : \|\sqrt{\rho}\|_{S-sup} = 1\}$ .

**Lemat 5.19.** *Zbiór  $\{\rho : \|\sqrt{\rho}\|_{S-sup} \leq 1\}$  jest zbiorem wypukłym.*

**Dowód:** Rozważmy dwa elementy  $\rho_1$  i  $\rho_2$  zbioru  $\{\rho : \|\sqrt{\rho}\|_{S-sup} \leq 1\}$  i obliczmy normę  $S-sup$  z pierwiastka ich kombinacji wypukłej:

$$\begin{aligned} & \|\sqrt{\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2}\|_{S-sup}^2 = \\ & = \sup\{\langle \Psi | \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2 | \Psi \rangle : \Psi \in \mathcal{S}_1 \wedge \|\Psi\| = 1\} = \\ & = \sup\{\lambda\langle \Psi | \rho_1 | \Psi \rangle + (1-\lambda)\langle \Psi | \rho_2 | \Psi \rangle : \Psi \in \mathcal{S}_1 \wedge \|\Psi\| = 1\} \end{aligned}$$

$$\leq \lambda \sup\{\langle \Psi | \rho_1 | \Psi \rangle : \Psi \in \mathcal{S}_1 \wedge \|\Psi\| = 1\} +$$

$$+(1 - \lambda) \sup\{\langle \Psi | \rho_2 | \Psi \rangle : \Psi \in \mathcal{S}_1 \wedge \|\Psi\| = 1\} \leq 1$$

Jest to nierówność trójkąta dla normy  $S$ -sup.  $\square$

Funkcja liniowa na zbiorze wypukłym przyjmuje wartość maksymalną w punktach ekstremalnych i na fragmencie brzegu napinanym przez punkty ekstremalne, w których przyjmuje wartość maksymalną. Dowodzimy w ten sposób lematu 5.18. Wniosek ten pozwala również ograniczyć zbiór punktów, które mogą być punktami ekstremalnymi funkcji  $\tilde{F}_\rho$  do zbioru punktów ekstremalnych zbioru  $\{\rho : \|\sqrt{\rho}\|_{S\text{-sup}} \leq 1\}$ , a ten z kolei jest kwadratem kuli jednostkowej w normie  $S$ -sup.

Dotychczasowe rozważania pozwalają powiązać ten zbiór ze zbiorem unormowanych świadków splątania i stanów:

**Twierdzenie 5.20.** *Zbiór unormowanych świadków splątania i stanów jest rzutem środkowym zbioru  $I - [B_{S\text{-sup}}(0, 1)]^2$  na płaszczyznę  $\text{Tr}(W) = 1$  dla środka rzutu  $W = 0$ .*

**Dowód:** Warunek konieczny i wystarczający separowalności

$$\forall \eta \in [B_{S\text{-sup}}(0, 1)]^2 \quad \langle \rho | \eta \rangle_{HS} \leq 1$$

można zapisać jako

$$\forall \eta \in [B_{S\text{-sup}}(0, 1)]^2 \quad \langle \rho | I - \eta \rangle_{HS} \geq 0.$$

Oznacza to, że stożek stanów separowalnych i stożek generowany przez zbiór  $I - [B_{S\text{-sup}}(0, 1)]^2$  są wzajemnie dualne, więc stożkiem generowanym przez zbiór  $I - [B_{S\text{-sup}}(0, 1)]^2$  jest stożek  $\mathcal{W}_1(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2})$ .

Zbiór unormowanych świadków splątania (i stanów kwantowych, które leżą w powłoce wypukłej tychże) jest cięciem tego stożka płaszczyzną  $\text{Tr}(W) = 1$ .  $\square$

## 5.6 Parametryzacja świadków i kryteria spektralne dla wyższych rzędów Schmidta

Twierdzenie 4.26, podające parametryzację zbioru świadków splątania, można zmodyfikować do przypadku świadków  $k$ -splątania. Zapisują się oni również w postaci (4.22) (wzór ten pozwala zapisać dowolną obserwabłą hermitowską o śladzie równym 1 za pomocą stanu ze sfery wokół stanu maksymalnie mieszanego i parametru  $\lambda$  - jest to rodzaj współrzędnych biegunowych na płaszczyźnie macierzy o śladzie jednostkowym.) Modyfikacji ulega tylko zakres parametru  $\lambda$ .

Ponieważ każdy świadek  $k$ -splątania jest świadkiem 1-splątania, zakres ten dla danego stanu  $\rho$  będzie podzbiorem zakresu (4.23). Supremum zakresu pozostaje bez zmian - dla żadnego  $k$  świadek  $k$ -splątania nie może być macierzą dodatnią. Modyfikacji ulega infimum zakresu. Analogicznie jak dla świadków 1-splątania, będzie nim supremum wyrażenia  $\langle \Psi | \rho | \Psi \rangle$  brane po wszystkich unormowanych wektorach  $k$ -separowalnych:

$$\|\sqrt{\rho}\|_{k\text{-sup}}^2 = \sup\{\langle \Psi | \rho | \Psi \rangle : \|\Psi\| = 1 \wedge \Psi \in \mathcal{S}_k\}$$

Dla liczb naturalnych  $k$  i  $l$  zachodzi nierówność:

$$k \leq l \quad \Rightarrow \quad \|\sqrt{\rho}\|_{k-sup}^2 \leq \|\sqrt{\rho}\|_{l-sup}^2,$$

ponieważ wtedy dla zbiorów po których bierzemy supremum zachodzi zawieranie  $\mathcal{S}_k \subset \mathcal{S}_l$ . Dla optymalnych świadków  $k$ -splątania parametr  $\lambda$  przyjmuje wartość minimalną.

Norma  $S-sup$  miała prostą interpretację dla projektora na podprzestrzeń  $V$ , mianowicie oznaczała maksimum z maksymalnego współczynnika Schmidta wektora brane po zbiorze unormowanych wektorów w podprzestrzeni  $V$ , czy po zastosowaniu izomorfizmu  $\mathfrak{A}$ , maksymalnej normy supremum w zbiorze unormowanych macierzy w  $\mathfrak{A}(V)$ . Podobnie, norma  $k-sup$  dla projektora na podprzestrzeń  $V$  oznacza supremum z sumy dwóch największych współczynników Schmidta wektora brane po zbiorze unormowanych wektorów w podprzestrzeni  $V$ , czy też odpowiednio maksymalnej  $k$ -tej normie Ky Fan <sup>2</sup> w zbiorze unormowanych macierzy w  $\mathfrak{A}(V)$ .

Używając normy  $k-sup$  i opartej na niej parametryzacji zbioru świadków  $k$ -splątania można przeformułować definicję  $k$ -separowalności. Stan  $\rho$  jest  $k$ -separowalny wtw gdy:

$$\forall \eta \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}) \quad \langle \rho | \eta \rangle \leq \|\sqrt{\eta}\|_{k-sup}^2.$$

Wychodząc z tego warunku można wprowadzić hierarchię warunków koniecznych odpowiadających tym, które podaliśmy w rozdziale 5.2 dla stanów 1-separowalnych.

Analogicznie do przypadku 1-splątania można również podać charakteryzację geometryczną zbioru świadków  $k$ -splątania, przeformułując twierdzenie 5.20:

**Twierdzenie 5.21.** *Zbiór unormowanych świadków splątania i stanów jest rzutem środkowym zbioru  $I - [B_{k-sup}(0, 1)]^2$  na płaszczyznę  $\text{Tr}(W) = 1$  dla środka rzutu  $W = 0$ .*

---

<sup>2</sup> $k$ -ta norma Ky Fan macierzy to suma jej  $k$  największych wartości singularnych.



# Podsumowanie

Rozdział pierwszy jest wprowadzeniem do mechaniki kwantowej widzianej z perspektywy kwantowego rachunku prawdopodobieństwa. Ma on za zadanie wprowadzenie do tematyki splątania i zdefiniowanie pojęć fizycznych potrzebnych w dalszej części pracy takich jak: ślad częściowy, operacje lokalne, splątanie związane, dekoherencja.

Rozdział drugi realizuje dwa cele. Po pierwsze jest wprowadzeniem do teorii zbiorów i stożków wypukłych, która jest wykorzystywana w dalszej części pracy. Definiuje potrzebne pojęcia geometryczne, takie jak stożek, stożek dualny, zbiór bazowy, zbiór polarny, ściana stożka i zbioru wypukłego, relacja komplementarności ścian. Podrozdział 2.3 ilustruje wprowadzone pojęcia na niskowymiarowych przykładach i pokazuje je na rysunkach.

Zaczynając od podrozdziału 2.4, rozdział ten traktuje o podstawowych faktach na temat geometrii zbioru stanów kwantowych w języku ścian stożków i zbiorów wypukłych. Wprowadza pojęcia geometryczne potrzebne w następnych rozdziałach i opisuje podstawowe fakty dotyczące geometrii zbioru stanów.

Rozdział trzeci traktuje o strukturze zbioru stanów układu kwantowego złożonego z dwóch podukładów oraz prezentuje najważniejsze kryteria splątania i podaje ich interpretację geometryczną. Definiuje izomorfizm pomiędzy świadkami splątania i odwzorowaniami dodatnimi, które nie są kompletnie dodatnie. Izomorfizm ten stosujemy następnie tłumacząc własności świadków  $k$ -splątania na własności odwzorowań  $k$ -dodatnich. Wprowadza potrzebną w rozdziale piątym technikę konstrukcji stanu splątanego PPT za pomocą nierozszerzalnej bazy produktowej. Na zakończenie wspomniane jest o technikach pomiaru świadka splątania i kwadratowych uogólnieniach świadków splątania.

Podrozdział 3.1 definiuje potrzebne struktury matematyczne - wstępujący ciąg stożków nieunormowanych stanów o różnym typie splątania oraz zstępujący ciąg stożków do nich dualnych zawierających oprócz nieunormowanych stanów obserwable wykrywające kolejne typy splątania - świadków  $k$ -splątania. Podrozdział 3.3 wprowadza pojęcie optymalności świadka  $k$ -splątania i pokazuje podstawowe fakty jej dotyczące.

Rozdział 3.4 prezentuje wprowadzony przeze mnie ogólny opis zagadnienia wykrywania przez elementy stożka  $L$  elementów stożka  $L^*$  zawartego w pewnym większym stożku  $K^*$ . Teoria ta uogólnia różne typy optymalności rozważane w literaturze i wprowadza dla nich wspólny język. Zbiór stanów optymalnych w ogólnym sensie charakteryzują pojęcia geometrii stożków. Podrozdział ten prezentuje udowodnione przeze mnie ogólne twierdzenia, które nawet wzmacniają znane dotychczas twierdzenia dotyczące szczególnych typów optymalności. Dowody tych twierdzeń zebrane są w Dodatku B.

Podrozdziały 3.5 i 3.6 dotyczą kryterium odwzorowań dodatnich. Jest tam prezentowany przegląd znanych odwzorowań dodatnich, które nie są kompletnie dodatnie i metoda

konstruowania świadka splątania wykrywającego stan wykrywany przez dowolne odwzorowanie dodatnie. Dla każdego odwzorowania dodatniego prezentowany jest przykład wykrywanego przez nie stanu i konstrukcja świadka, który stan ten wykrywa.

Podrozdział 3.8 opisuje szczegółowo kryterium realignmentu oraz moje geometryczne obserwacje dotyczące zbioru stanów wykrywanych przez to kryterium. Szczegółowo pokazuję konstrukcję świadka splątania wykrywającego stan wykrywany przez kryterium realignmentu bazującą na twierdzeniu z cytowanej literatury. Przedstawiam propozycję jego wzmocnienia poprzez wykorzystanie zmienności wartości realignmentu stanu przy działaniu na niego liniowymi operacjami lokalnymi. Dodatek A zawiera dowód faktu, że przy odpowiedniej dysproporcji wymiarów każda orbita lokalnych operacji liniowych zawiera stan niewykrywany przez kryterium realignmentu.

Rozdział czwarty prezentuje wyniki moich badań nad własnościami świadków  $k$ -splątania wyrażonymi w języku ich rozkładu spektralnego. W podrozdziale 4.2 zostały udowodnione dwa twierdzenia wprowadzające warunki konieczny i wystarczający, które musi spełniać obserwabla, by była świadkiem  $k$ -splątania.

Podrozdział 4.3 opisuje własności zbioru wektorów o rzędzie Schmidta mniejszym od ustalonego  $k$  w języku rozmaitości algebraicznych, który pozwala potem na wprowadzenie górnego ograniczenia na wymiar podprzestrzeni, która nie zawiera wektora rzędu Schmidta mniejszego od  $k$ . Pozwoliło mi to na udowodnienie w podrozdziale 4.4 ograniczeń na sygnatury świadków  $k$ -splątania. W podrozdziale tym pokazałem również geometryczne implikacje ograniczeń na sygnatury oraz przetłumaczyłem wyniki na ograniczenia na liczbę niezależnych liniowo składników w rozkładzie Krauss-Choi dowolnego odwzorowania  $k$ -dodatniego.

W podrozdziale 4.5 wprowadziłem parametryzację świadków splątania przez sferę stanów wokół stanu maksymalnie zmieszanego. Do tego celu zdefiniowałem nową normę operatorową  $S$ -sup. W następnych podrozdziałach omówiłem zagadnienia rozkładalności i optymalności świadków w takiej parametryzacji.

W rozdziale piątym użyłem wprowadzonej w rozdziale czwartym parametryzacji zbioru świadków splątania do przeformułowania definicji separowalności za pomocą normy  $S$ -sup. Dzięki temu wyprowadziłem nowe kryteria separowalności wyrażone za pomocą tej normy. Jednym z nich jest ograniczenie czystości stanu separowalnego przez normę  $S$ -sup z jego pierwiastka. Stany łamiące te kryterium nazwałem stanami widzącymi swoje splątanie.

Do konstrukcji następnych kryteriów ograniczyłem się w przeformułowanej definicji separowalności do unormowanych projektorów. Norma  $S$ -sup projektora wyraża się jako maksymalny współczynnik Schmidta unormowanego wektora w podprzestrzeni na którą rzutuje ten projektor. Wybierając odpowiednie podprzestrzenie uzyskałem ograniczenie na udział stanu w separowalnej mieszaninie statystycznej oraz ograniczenia na wartości własne stanu separowalnego i ich sumy. Pokazałem przykład kryterium spektralnego wprowadzającego ograniczenie na sumę czterech wartości własnych dla stanów o pewnej bazie własnej, które jest w stanie wykrywać splątanie PPT.

Podrozdział 5.3 opisuje krótko własności zbioru stanów wykrywanych przez kryteria wprowadzone w poprzednich podrozdziałach. Szczególną uwagę poświęciłem pytaniu, czy dane kryterium jest w stanie wykrywać splątanie PPT.

Podrozdział 5.4 pokazuje działanie kryteriów spektralnych na konkretnych przykła-

---

dach. Ostatni z przykładów omawia problem wyznaczania maksymalnego współczynnika Schmidta podprzestrzeni dwuwymiarowej i prezentuje go jako funkcję na sferze Blocha projektorów z takiej podprzestrzeni.

W podrozdziale 5.5 zaproponowałem gradientową metodę numeryczną rozwiązywania problemu separowalności opartą na przeformułowanej definicji separowalności. W podrozdziale tym pokazałem również związek geometrii zbioru unormowanych świadków splątania z kulą w normie  $S\text{-sup}$ .

Rozdział piąty dotyczył 1-splątania. W ostatnim jego podrozdziale pokazałem, jak dokonać parametryzacji świadków  $k$ -splątania przy pomocy analogona normy  $S\text{-sup}$ , jak przy jego pomocy przeformułować definicję  $k$ -separowalności i wyprowadzić z niej kryteria  $k$ -separowalności.

Niektóre pojęcia i fakty dowiedzione w tej rozprawie dla układu złożonego z dwóch podukładów, takie jak norma  $S\text{-sup}$ , parametryzacja świadków splątania przy jej pomocy i przeformułowanie definicji separowalności ma swój odpowiednik również dla większej liczby podukładów. Jednak by nie zwiększać nadmiernie objętości pracy, zrezygnowałem z wprowadzania do niej układów wielu cząstek i problemów z charakteryzacją splątania w ich teorii.

# Dodatek A

## Realignment

Na potrzeby tego rozdziału potrzebna nam będzie definicja uogólnionej odwrotności operatora, zwanej również pseudoodwrotnością, sformułowana niezależnie przez Moore'a [167] i Penrose'a [168].

**Definicja A.1** (Uogólniona odwrotność). *Dla każdej macierzy  $A$  istnieje jednoznacznie określona macierz  $A^{\text{inv}}$ , nazywana uogólnioną odwrotnością macierzy  $A$ , która spełnia cztery warunki:*

- $AA^{\text{inv}}A = A$
- $A^{\text{inv}}AA^{\text{inv}} = A^{\text{inv}}$
- $AA^{\text{inv}}$  jest macierzą hermitowską
- $A^{\text{inv}}A$  jest macierzą hermitowską

Uogólniona odwrotność definiuje się łatwo przez rozkład singularny. Jeżeli rozkładem singularnym macierzy  $A$  jest  $A = \sum_i \lambda_i |\phi\rangle\langle\psi|$ , to jego uogólniona odwrotność dana jest przez rozkład singularny  $A^{\text{inv}} = \sum_i \lambda_i^{-1} |\phi\rangle\langle\psi|$

Jeżeli  $A$  jest macierzą kwadratową pełnego rzędu, wtedy definicja uogólnionej odwrotności pokrywa się z definicją odwrotności.

Od tej chwili zapis  $A^{-1}$  oznaczać będzie uogólnioną odwrotność macierzy  $A$ .

**Fakt A.2.** *Macierz hermitowska  $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^N)$  zapisana w postaci blokowej jako*

$$\rho = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^\dagger & C \end{array} \right], \quad (\text{A.1})$$

*jest półdefinitnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:*

1.  $A \geq 0 \wedge C \geq 0$ .
2.  $B : \text{Im}C \rightarrow \text{Im}A$
- 3.

$$A - BC^{-1}B^\dagger \geq 0, \quad (\text{A.2})$$

*lub równoważnie*

$$C - B^\dagger A^{-1}B \geq 0, \quad (\text{A.3})$$

**Dowód:** Wykorzystując izomorfizm  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^d = \mathbb{C}^d \oplus \mathbb{C}^d$  można zapisać warunek dodatniości macierzy (A.1) jako:

$$\forall \phi, \psi \in \mathbb{C}^d \left[ \begin{array}{cc} \langle \psi | A | \psi \rangle & \langle \psi | B | \phi \rangle \\ \langle \phi | B^\dagger | \psi \rangle & \langle \phi | C | \phi \rangle \end{array} \right] \geq 0. \quad (\text{A.4})$$

Wyrazy diagonalne macierzy (A.4) muszą być nieujemne by była ona dodatnia. Daje to warunek  $A \geq 0 \wedge C \geq 0$ . Pozostaje sprawdzić dodatniość jej wyznacznika. Jest on równy:

$$\forall \psi, \phi \in \mathbb{C}^d \langle \psi | A | \psi \rangle \langle \phi | C | \phi \rangle - \langle \psi | B | \phi \rangle \langle \phi | B^\dagger | \psi \rangle \geq 0. \quad (\text{A.5})$$

Jeżeli jest on dodatni, to dla dowolnego wektora  $\phi \in \ker C$  zachodzi  $\phi \in \ker B$ . Podobnie, dla każdego wektora  $\psi \in \ker A$  zachodzi  $\psi \in \ker B^\dagger$ , co dowodzi drugiego warunku w tezie.

Rozkładając dowolny wektor  $\psi$  na składową  $\tilde{\psi} \in (\ker A)^\perp$  i składową do niej prostopadłą i podobnie rozkładając wektor  $\phi$ , można zapisać warunek (A.5) z zawężonym kwantyfikowanym zbiorem:

$$\forall \tilde{\psi} \in (\ker A)^\perp, \tilde{\phi} \in (\ker C)^\perp \langle \tilde{\psi} | A | \tilde{\psi} \rangle \langle \tilde{\phi} | C | \tilde{\phi} \rangle - \langle \tilde{\psi} | B | \tilde{\phi} \rangle \langle \tilde{\phi} | B^\dagger | \tilde{\psi} \rangle \geq 0. \quad (\text{A.6})$$

Macierze  $A$  i  $C$  są macierzami dwuform półdodatnio określonych. Pozwala to nam wyciągać z nich pierwiastki  $A^{1/2}$  i  $C^{1/2}$ , które również będą formami półdodatnio określonymi. Dwuformy te są nieosobliwe na podprzestrzeniach odpowiednio  $(\ker A)^\perp$  i  $(\ker C)^\perp$ , więc możemy myśleć o ich macierzach jako o macierzach nieosobliwych endomorfizmów tych podprzestrzeni i przy ich pomocy przeparametryzować te podprzestrzenie:  $A^{1/2}\tilde{\psi} \mapsto \tilde{\psi}$ ,  $C^{1/2}\tilde{\phi} \mapsto \tilde{\phi}$ . W nowej parametryzacji warunek (A.6) przepiszemy jako:

$$\forall \tilde{\psi} \in (\ker A)^\perp, \tilde{\phi} \in (\ker C)^\perp |\langle \tilde{\psi} | A^{-1/2} B C^{-1/2} | \tilde{\phi} \rangle|^2 \leq |\tilde{\psi}|^2 |\tilde{\phi}|^2, \quad (\text{A.7})$$

Odwrotność braliśmy dla obciążenia macierzy  $A$  i  $C$  do podprzestrzeni, na których były one nieosobliwe. Można zrezygnować z tego ograniczenia biorąc w ich miejscu uogólnione odwrotności. Warunek (A.7) wystarczy sprawdzać dla wektorów unormowanych. Wymaga on wtedy, by  $\|A^{-1/2} B C^{-1/2}\|_{sup} \leq 1$ . Można go zapisać jako jedną z dwóch równoważnych nierówności macierzowych:

$$\begin{aligned} A^{-1/2} B C^{-1} B^\dagger A^{-1/2} &\leq I \\ C^{-1/2} B^\dagger A^{-1} B C^{-1/2} &\leq I \end{aligned}$$

Mnożąc pierwszą nierówność prawostronnie i lewostronnie przez  $A^{1/2}$ , a drugą nierówność prawostronnie i lewostronnie przez  $C^{1/2}$ , otrzymamy trzeci punkt tezy.  $\square$

**Wniosek A.3.** *Jeżeli macierz (A.1) jest półdodatnio określona, to zachodzi oszacowanie:*

$$\text{Tr} B B^\dagger = \text{Tr} B^\dagger B \leq \text{Tr} A \cdot c_{max},$$

gdzie  $c_{max}$  oznacza maksymalną wartość własną macierzy  $C$

**Dowód:** Obróćmy unitarnie macierze  $A, B$  i  $C$  do bazy własnej macierzy  $C$ . Stosując operację śladu do warunku dodatniości (A.3) dostaniemy:

$$\mathrm{Tr}A \geq \mathrm{Tr}(BC^{-1}B^\dagger) = \sum_{ik} \frac{|b_{ik}|^2}{c_k} \leq \frac{1}{c_{\max}} \sum_{ik} |b_{ik}|^2 = \frac{1}{c_{\max}} \mathrm{Tr}(BB^\dagger).$$

Mnożąc obie strony przez  $c_{\max}$  otrzymujemy tezę.  $\square$

**Fakt A.4** (Reprezentant orbity grupy  $GL(d) \times GL(N)$ ). *Każdy stan  $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^N)$  pełnego rzędu można za pomocą lokalnej operacji liniowej sprowadzić do postaci*

$$\rho = \left[ \begin{array}{c|c|c} A_{11} & \dots & A_{1d} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{d1} & \dots & A_{dd} \end{array} \right], \quad (\text{A.8})$$

gdzie macierz  $A_{11}$  jest macierzą identycznościową, a bloki diagonalne  $A_{22}, \dots, A_{dd}$  mają ślady równe 1.

**Dowód:** Niech rozkładem spektralnym bloku  $A_{11}$  będzie rozkład

$$A_{11} = U \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \eta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \eta_N \end{bmatrix} U^\dagger = UDU^\dagger,$$

dla pewnej nieosobliwej macierzy diagonalnej  $D$ . Podziałajmy na macierz  $\rho$  lokalną operacją liniową

$$I \otimes D^{-\frac{1}{2}} U^\dagger. \quad (\text{A.9})$$

Po tej operacji lewy górny blok macierzy  $\rho$  będzie macierzą jednostkową.

Podziałajmy teraz na macierz  $\rho$  lokalną operacją liniową

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Tr}A_{22}}} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Tr}A_{dd}}} \end{array} \right] \otimes I.$$

Po tej operacji wszystkie bloki diagonalne poza pierwszym mają ślad równy 1.  $\square$

**Wniosek A.5.** *Jeżeli macierz (A.8) jest półdodatnio określona, to zachodzi oszacowanie:*

$$\mathrm{Tr}A_{ij}^\dagger A_{ij} \leq \mathrm{Tr}A_{ii} \cdot \eta_{\max}^{(j)},$$

gdzie  $\eta_{\max}^{(j)}$  oznacza maksymalną wartość własną macierzy  $A_{jj}$

**Dowód:** Macierz (A.8) musi być w szczególności dodatnia na wektorach z podprzestrzeni  $\mathrm{span}\{e_i, e_j\} \otimes \mathbb{C}^N$ . Obcięcie stanu do tej podprzestrzeni ma macierz

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_{ii} & A_{ij} \\ \hline A_{ji} & A_{jj} \end{array} \right].$$

Stosując do tej macierzy wniosek A.3 otrzymujemy tezę.  $\square$

**Lemat A.6** (Realignment reprezentanta orbity). *Realignment reprezentanta orbity grupy lokalnych operacji liniowych określonego wzorem (A.8) jest mniejszy od  $\sqrt{N} + (d^2 - 1)$ .*

**Dowód:** Realignment  $R(\rho)$  dowolnej macierzy gęstości  $\rho$  rozmiaru  $2 \times N$ , zapisanej w postaci (A.1), jest sumą pierwiastków wartości własnych macierzy:

$$\rho^R(\rho^R)^\dagger = \begin{bmatrix} \text{Tr}A_{11}^\dagger A_{11} & \dots & \text{Tr}A_{11}^\dagger A_{dd} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Tr}A_{dd}^\dagger A_{11} & \dots & \text{Tr}A_{dd}^\dagger A_{dd} \end{bmatrix}$$

(jest to macierz Gramma bloków macierzy  $\rho$ ). Przy warunku ustalonej maksymalnej wartości własnej tej macierzy i ustalonej wartości jej śladu, realignment  $R(\rho)$  przyjmuje maksymalną wartość, gdy wszystkie wartości własne poza maksymalną (ustaloną) są sobie równe, a  $R(\rho)$  wynosi wtedy  $\sqrt{\lambda_{max}} + (d^2 - 1) \cdot \sqrt{(\text{Tr}(\rho^R(\rho^R)^\dagger) - \lambda_{max})/(d^2 - 1)}$ . Realignment dowolnej macierzy gęstości  $\rho$  można zatem ograniczyć przez

$$R(\rho) \leq \sqrt{\lambda_{max}} + \sqrt{d^2 - 1} \sqrt{\text{Tr}(\rho^R(\rho^R)^\dagger) - \lambda_{max}}. \quad (\text{A.10})$$

Jeżeli za stan  $\rho$  weźmiemy reprezentanta  $\rho_0$  określonego wzorem (A.8), to dla takiej macierzy gęstości blok  $A_{00}$  jest macierzą identycznościową, a ślady pozostałych bloków są równe jeden. Ślad macierzy  $\rho_0^R(\rho_0^R)^\dagger$  jest równy:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho_0^R(\rho_0^R)^\dagger) &= \sum_{ij} \text{Tr}A_{ij}^\dagger A_{ij} = \text{Tr}A_{11}^\dagger A_{11} \\ &+ 2 \sum_i \text{Tr}A_{i1}^\dagger A_{i1} + \sum_{i>1, j>1} \text{Tr}A_{ij}^\dagger \text{Tr}A_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Pierwszy składnik prawej strony jest równy  $N$ . Drugi i trzeci składnik szacujemy za pomocą wniosku A.5. Szacowania te wynoszą odpowiednio  $\sum_{i>1} \text{Tr}A_{ii} = (d - 1)$  oraz  $\sum_{j>1} \eta_{max}^{(j)} \sum_i A_{ii} = \sum_{j>1} \eta_{max}^{(j)} (d - 1)$ . Wykorzystując te szacowania, można ograniczyć z góry ślad macierzy  $\rho_0^R(\rho_0^R)^\dagger$ :

$$\text{Tr}(\rho_0^R(\rho_0^R)^\dagger) \leq N + (d - 1)(2 + \sum_{j>1} \eta_{max}^{(j)}) \leq N + (d - 1)(d + 1) \quad (\text{A.12})$$

Stosując to ograniczenie do nierówności (A.10), dostajemy

$$R(\rho_0) \leq \sqrt{\lambda_{max}} + \sqrt{d^2 - 1} \sqrt{N + (d^2 - 1) - \lambda_{max}} \quad (\text{A.13})$$

Prawa strona nierówności (A.13) jest malejącą funkcją maksymalnej wartości własnej. Można ją zatem szacować z góry wstawiając za  $\lambda_{max}$  dolne ograniczenie na maksymalną wartość własną, czyli normę *sup* macierzy  $\rho_0^R(\rho_0^R)^\dagger$ . Jest ona większa równa od każdego elementu macierzowego tej macierzy, zatem jej ograniczeniem dolnym jest element macierzowy  $\text{Tr}A^\dagger A = N$ . Pozwala to oszacować z góry prawą stronę nierówności (A.13) i uzyskać w konsekwencji:

$$R(\rho) \leq \sqrt{N} + (d^2 - 1) \quad (\text{A.14})$$

□

**Twierdzenie A.7.** *Orbita liniowych operacji lokalnych dowolnego stanu pełnego rzędu w wymiarze  $d \times N$ ,  $N \geq d^2$ , zawiera stan niewykrywany przez realignment.*

**Dowód:** Jeżeli nieunormowany stan jest wykrywany przez realignment, to zachodzi nierówność  $R(\rho) > \text{Tr}\rho$ . Weźmy za stan  $\rho$  reprezentanta orbity  $\rho_0$  określonego wzorem (A.8):

$$R(\rho_0) > N + d - 1.$$

Jeżeli nierówność ta zachodzi, to będzie również zachodzić po oszacowaniu jej lewej strony z góry przez  $\sqrt{N} + (d^2 - 1)$ , na mocy lematu A.6:

$$\sqrt{N} + (d^2 - 1) > R(\rho) > N + d - 1.$$

Daje to nam nierówność kwadratową  $N - \sqrt{N} - d(d - 1) < 0$  na  $\sqrt{N}$ . Rozwiązując ją, otrzymujemy, że  $\sqrt{N} < \frac{1}{2}(1 + (2d - 1)) = d$ . Nierówność nie jest spełniona, jeżeli  $N \geq d^2$ . Dla takich wymiarów podukładów, orbita dowolnego stanu pełnego wymiaru  $\rho$  zawiera stan  $\rho_0$ , który nie jest wykrywany przez realignment.  $\square$

Oznacza to, że jeżeli mamy stan niewykrywany przez realignment, to może on być wykryty po przekształceniu go liniową transformacją lokalną. Stan  $\rho \in \mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$  jest separowalny, jeżeli zachodzi:

$$\sup_{G \in GL(d_1) \otimes GL(d_2)} R(G\rho G^\dagger) / \text{Tr}(G\rho G^\dagger) > 1. \quad (\text{A.15})$$

Zauważmy, że niewykrywanego reprezentanta orbity konstruowaliśmy, czyniąc jeden z diagonalnych bloków znacząco większym od pozostałych, nie zmieniając jego separowalności. Choć problem znalezienia supremum (A.15) jest otwarty, kandydatem może być diagonalne skalowanie w drugim podukładzie, zrównujące ślady bloków diagonalnych.



## Dodatek B

# Dowody ogólnej teorii wykrywania i optymalności

**Twierdzenie (3.11).**  $w_1 \geq_{L|K} w_2 \Leftrightarrow \lambda w_2 - w_1 \in k$ .

**Dowód:** Dowód jest adaptacją dowodu twierdzenia 3.5.

” $\Leftarrow$ ”: Załóżmy, że  $w_1 \leq_K w_2$ . Oznacza to, że  $w_1 = w_2 - k$  dla pewnego elementu stożka  $K$ . Oznacza to, że jeżeli tylko dla pewnego  $\rho \in K^*$  zachodzi nierówność  $\rho(w_2) < 0$ , to zachodzi również  $\rho(w_1) < 0$ , czyli  $\mathcal{D}_{L|K}(w_1) \supset \mathcal{D}_{L|K}(w_2)$ , a więc  $w_1 \geq_{L|K} w_2$ .

” $\Rightarrow$ ”: W drugą stronę, załóżmy że  $w_1 \geq_{L|K} w_2$ , czyli że  $\mathcal{D}_{L|K}(w_1) \supset \mathcal{D}_{L|K}(w_2)$ . Udowodnimy, że  $\lambda w_2 - w_1 \in K$ , gdy za parametr  $\lambda$  wybierzemy liczbę:

$$\lambda = \inf_{\rho \in \mathcal{D}_{L|K}(w_2)} \left| \frac{\rho(w_1)}{\rho(w_2)} \right|. \quad (\text{B.1})$$

Dokonyamy tego dowodząc nierówności:

$$\forall \rho \in K^* \quad \lambda \rho(w_2) \geq \rho(w_1) \quad (\text{B.2})$$

w zależności od znaku lewej strony.

1.  $\rho(w_2) = 0 \Rightarrow \rho(w_1) \leq 0$ .

Założmy że dla pewnego  $\rho \in K^*$  mamy  $\rho(w_2) = 0 \wedge \rho(w_1) > 0$ . Istnieje wtedy takie  $\epsilon > 0$ , że  $\forall \rho' \in B(\rho, \epsilon) \cap K^* \quad \rho'(w_1) > 0$ . Zbiór ten posiada niepuste wnętrze, zatem musi zawierać stany dla których  $\rho'(w_2) < 0$ , ale to przeczy założeniu  $w_1 \geq_{L|K} w_2$ .

2.  $\rho(w_2) < 0 \Rightarrow \rho(w_1) \leq \rho(w_2)$ .

Konstruujemy element  $\rho_1 \in K^*$  jako  $\rho_1 = \rho - \rho(w_2)I$ , gdzie  $I$  oznacza dowolny element stożka  $K^*$ , dla którego  $I(w_2) = I(w_1) = 1$ . Tak skonstruowane  $\rho$  spełnia założenie kroku poprzedniego, zatem zachodzi dla niego  $\rho_1(w_1) = \rho(w_1) - \rho(w_2) \leq 0$ , co udowadnia postulowaną nierówność.

Wykorzystamy ją teraz do udowodnienia nierówności (B.2) dla  $\rho(w_2) < 0$ . Mamy, że  $\forall \rho \in \mathcal{D}_{L|K}(w_2)$  zachodzi  $\rho(w_1) < 0$ . Pozwala to opuścić wartość bezwzględną we wzorze B.1, co prowadzi do:

$$\lambda = \inf_{\rho \in \mathcal{D}_{L|K}(w_2)} \frac{\tilde{\rho}(w_1)}{\tilde{\rho}(w_2)} \Rightarrow \frac{\rho(w_1)}{\rho(w_2)} \geq \lambda \Rightarrow \lambda \rho(w_2) \geq \rho(w_1),$$

co dowodzi nierówności B.2 w przypadku, gdy jej lewa strona jest ujemna.

$$3. \rho(w_2) > 0 \Rightarrow \lambda \rho(w_2) \geq \rho(w_1)$$

Weźmy dowolny element  $\rho_1 \in \mathcal{D}_{L|K}(w_2)$ . Zdefiniujmy przy jego pomocy nowy element stożka  $K^*$  jako  $\rho_2 = \rho(w_2)\rho_1 - \rho_1(w_2)\rho$ . Zachodzi dla niego równość  $\rho_2(w_2) = 0$ , więc można zastosować do niego wynik kroku pierwszego i otrzymać  $\rho_2(w_2) = \rho(w_2)\rho_1(w_1) - \rho_1(w_2)\rho(w_1) \leq 0$ . Dostajemy w wyniku nierówność  $\rho(w_2)\rho_1(w_1) \leq \rho_1(w_2)\rho(w_1)$ . Podzielmy ją stronami przez ujemną liczbę  $\rho_1(w_2)\rho(w_2)$ . Dostajemy wtedy nierówność:

$$\frac{\rho_1(w_1)}{\rho_1(w_2)} \geq \frac{\rho(w_1)}{\rho(w_2)}$$

Nierówność powyższa zachodzi dla dowolnego  $\rho_1 \in \mathcal{D}_{L|K}(w_2)$ , dlatego zachodzi również dla infimum prawej strony po zbiorze  $\mathcal{D}(w_2)$ . Infimum to definiuje wielkość  $\lambda$ . Mnożąc obie strony tak otrzymanej nierówności przez  $\rho(w_1)$  otrzymujemy nierówność (B.2) dla  $\rho(w_2) > 0$ .

Pokazaliśmy w ten sposób, że niezależnie od znaku lewej strony nierówności (B.2) jest ona spełniona.  $\square$

**Fakt (3.13).**  $x \in \text{opt}(L|K) \Rightarrow F_L(x) \subset \text{opt}(L|K)$ .

**Dowód:** Załóżmy, że  $y \in F_L(x)$ , ale  $y$  nie jest optymalny. Wykorzystujemy definicję (2.12) ściany stożka  $L$  generowanej przez jego element  $x$ :

$$y \in F_L(x) \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} \exists \alpha > 0 \exists l_1 \in L : y = \frac{x}{\alpha} - l_1 \quad (\text{B.3})$$

i zakładamy, że

$$\exists k \in K \exists l_2 \in L : y = l_2 - k \quad (\text{B.4})$$

(zaprzeczamy optymalności  $y$ ). Jeżeli wstawimy  $y$  ze wzoru (B.4) do warunku (B.3), otrzymamy, że:

$$\exists \alpha > 0 \exists l_1, l_2 \in L \exists k \in K : l_2 - k = \frac{x}{\alpha} - l_1,$$

a to oznacza, że  $x$  można przedstawić jako  $\alpha(l_1 + l_2) - \alpha k$ , czyli jako różnicę elementu ze stożka  $L$  i ze stożka  $K$ . To z kolei oznacza, że  $x$  nie jest optymalny, co prowadzi do sprzeczności z założeniem.  $\square$

**Fakt (3.14).** Dla dowolnej ściany  $F$  stożka  $L$  zachodzi  $F \subset \text{opt}(L|K) \Leftrightarrow F \cap K = \emptyset$ .

**Dowód:** "  $\Leftarrow$  " Z definicji optymalności wynika, że element stożka  $K$  nie może być optymalny. Jeżeli więc ściana stożka  $L$  zawiera się w zbiorze  $\text{opt}(L|K)$ , to nie zawiera ona elementów stożka  $K$ .

"  $\Rightarrow$  " Załóżmy, że ściana  $F$  nie zawiera się w zbiorze  $\text{opt}(L|K)$ . Oznacza to, że istnieje punkt ściany  $x$  taki, że  $x$  nie jest optymalny, czyli że:

$$\exists k \in K \exists l \in L : x = l + k,$$

ale to oznacza, że  $k = x - l$ , a istnienie takiego rozkładu oznacza, że  $k$  należy do ściany  $F_L(x)$ , która jest podścianą ściany  $F$ .  $\square$

**Fakt (3.15).** *Przekrój stożka  $K$  ze ścianą stożka  $L$  jest ścianą stożka  $K$ .*

**Dowód:** Korzystamy z geometrycznego faktu, że ściana stożka jest częścią wspólną stożka i jego hiperpłaszczyzny podpierającej, tj. płaszczyzny kowymiaru 1, która ma punkty wspólne ze stożkiem, ale taką, że wszystkie punkty stożka leżą po tej samej jej stronie (hiperpłaszczyzna taka jest brzegiem półprzestrzeni dualnej do pewnego półpromienia brzegowego stożka dualnego).

Oznaczmy przez  $H_L$  pewną hiperpłaszczyznę podpierającą zawierającą ścianę  $F_L$  stożka  $L$ . Ponieważ  $K \subset L$ , więc płaszczyzna  $H_L$ , jest również płaszczyzną podpierającą stożka  $K$ , a jego przekrój z tą płaszczyzną jest ścianą. Z drugiej strony, przekrojem tym jest zbiór punktów  $F_L \cap K$ .  $\square$

**Lemat (3.18).**  $w \in \text{opt}(L|K) \Leftrightarrow \Phi[F_L(w)] \cap \text{Int}K^* \neq \emptyset$ .

**Dowód:** Jeżeli element  $w \in \text{opt}(L|K)$ , to cała generowana przez niego ściana stożka  $L$  zawiera się w  $\text{opt}(L|K)$ . Wykorzystując wniosek 3.16, wiemy że

$$w \in \text{opt}(L|K) \Leftrightarrow \sim \exists F_K \triangleleft K, F_K \neq \emptyset : F_K \triangleleft F_L(w) \Leftrightarrow \forall F_K \triangleleft K, F_K \neq \emptyset : F_K \not\triangleleft F_L(w).$$

Warunek po prawej stronie można zapisać dla ścian komplementarnych:

$$\forall \tilde{F}_{K^*} \triangleleft K^*, \tilde{F}_{K^*} \neq K^* : \tilde{F}_{K^*} \not\triangleleft \Phi[F_L(w)].$$

Żadna ściana stożka  $K^*$  nie będąca całym  $K^*$  nie zawiera w sobie ściany  $\Phi[F_L(w)]$ . Oznacza to, że ściana w  $K^*$  generowana przez zbiór  $\Phi[F_L(w)]$  jest równa  $K^*$ , a więc do zbioru  $\Phi[F_L(w)]$  należy element wnętrza stożka  $K^*$ .  $\square$

**Fakt (3.19).** *Ściana  $\Phi[F_L(w)]$  jest napinana przez półpromienie ekstremalne stożka  $L^*$  na których element  $w$  przyjmuje wartość 0 (zbiór tych półpromieni oznaczamy przez  $\mathcal{P}^L(w)$ ).*

**Dowód:**  $F_L(w)$  jest najmniejszą ścianą zawierającą element  $w$ :

$$F_L(w) = \bigcup \{F \triangleleft L : F \triangleright \{w\}\}$$

Stosując do obu stron równości funktor komplementarności ścian, dostaniemy:

$$\Phi[F_L(w)] = \bigcap \{\Phi(F) \triangleleft L : \Phi(F)^* \triangleleft \Phi(\{w\})\} = \Phi(\{w\})$$

Ścianą komplementarną do półpromienia generowanego przez punkt  $w \in L$  jest przekrój stożka dualnego  $L^*$  hiperpłaszczyzną dualną do półpromienia  $\{w\}$ . Przekrój ten jest napinany przez półpromienie ekstremalne stożka  $L^*$ , na których element  $w$  się zeruje.  $\square$

# Bibliografia

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?* Phys Rev **47** 777 (1935)
- [2] J. S. Bell *On the Einstein Podolsky Rosen paradox* Physics **1** 195 (1964)
- [3] A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger *Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers* PRL **49** 1804 (1982)
- [4] D. Deutsch *Quantum Theory, the Church-Turing Principle and the Universal Quantum Computer* Proc. R. Soc. London, Ser. A **400** 97 (1985)
- [5] R. P. Feynman *Simulating physics with computers* Int. J. Theor. Phys. **21** 467-488 (1982)
- [6] P. W. Shor *Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory* Phys Rev A **52** 2493 (1995)
- [7] D. Coppersmith *An approximate Fourier transform usefull in quantum factoring* IBM Research Report No. RC19642 (1994)
- [8] D. Deutsch, R. Jozsa *Rapid solutions of problems by quantum computation* Proc. R. Soc. London A **439** 553 (1992)
- [9] M. Mosca *Quantum Algorithms* quant-ph/0808.0369v1
- [10] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. Smolin, W. K. Wothers *Mixed State Entanglement and Quantum Error Correction* Phys Rev A **54** 3824 (1996) quant-ph/9604024
- [11] C. H. Bennett, G. Brassard *Proceedings of the IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Procesing* (IEEE Computer Society Press, New York, Bangalore, India, December 1984) 175-179
- [12] A. Ekert *Quantum cryptography based on Bell's theorem* Phys Rev Lett **67** 661 (1991)
- [13] H.-K. Lo, Y. Zhao *Quantum Cryptography* quant-ph/0803.2507v4
- [14] C. H. Bennett, S. J. Wiesner *Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolski-Rosen states* Phys Rev Lett **69** 2881 (1992)

- [15] A. Harrow, P. Hayden, D. Leung, *Superdense coding of quantum states* Phys. Rev. Lett. **92** 187901 (2004) quant-ph/0307221v2
- [16] D. P. DiVincenzo *The physical implementation of quantum computation* Fortschr. Phys. **48**: 771-783 (2000) quant-ph/0002077
- [17] G. Chen, D. A. Church, B.-G. Englert, C. Henkel, B. Rohwedder, M. O. Scully, M. S. Zubairy *Quantum Computing Devices: Principles, Designs, and Analysis* Chapman & Hall/CRC 2007
- [18] M. Nakahara, T. Ohmi *Quantum Computing. From Linear Algebra to Physical Realizations* CRC Press 2008
- [19] J. Stolze, D. Suter *Quantum Computing. A Short Course from Theory to Experiment* Wiley-VCH Verlag 2008
- [20] M. A. Nielsen, I. L. Chuang *Quantum computation and quantum information* Cambridge 2000
- [21] A. Miranowicz, M. Piani, P. Horodecki, M. Horodecki *Inseparability criteria based on matrices of moments* quant-ph/0605001
- [22] G. Sarbicki *Spectral Properties of Entanglement Witnesses* J. Phys. A: Math. Theor. **41** 375303 (2008)
- [23] G. Sarbicki *Spectral Properties of Entanglement Witnesses and Separable States* Journal of Physics: Conference Series **104** 012009 (2008)
- [24] J. Sperling, W. Vogel *Necessary and sufficient conditions for bipartite entanglement* quant-ph/0805:1318
- [25] K. R. Parthasarathy *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus* Birkhäuser Verlag 1992
- [26] W.K. Wootters, B.D. Fields *Optimal state determination by mutually unbiased measurements* Annals of Physics, **191** 363 (1989)
- [27] Sh. Wu, S. Yu, K. Mølmer *Entropic uncertainty relation for mutually unbiased bases* quant-ph/0811.2298
- [28] A. N. Kolmogoroff *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrech* Springer Verlag, Berlin (1933) wersja angielska: *Foundations of the Probability Theory* Chelsea Publ. Comp. New York (1956)
- [29] A. Khrennikov *Bell's inequality: Physics meets Probability* quant-ph/0709.3909
- [30] K. Hess, W. Philipp *The Bell Theorem as a Special Case of a Theorem of Bass* Found. of Phys. **35** no. 10 (2005)
- [31] J. Bass *Sur la compatibilité des fonctions de répartition* C. R. Acad. Sci. **240** 839 (1955)

- [32] N. N. Vorob'ev Dokl. Acad. Nauk SSR **124** 253 (1959)
- [33] N. N. Vorob'ev Theor. Probab. Applications **VII** 147 (1962)
- [34] E. D. Schell Proc. 2nd Symp. Lin. Programming, Washington **2** 615 (1955)
- [35] S. J. Freedman, J. F. Clauser *Experimental test of local hidden-variable theories* Phys Rev Lett **28** 938 (1972)
- [36] C. A. Kocher, E. D. Commins *Polarization correlations of photons emitted in an atomic cascade* Phys Rev Lett **18** 575 (1967)
- [37] R. F. Werner *Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model* Phys Rev A **40** 4277 (1989)
- [38] J. Barrett *Nonsequential positive-operator-valued measurements on entangled mixed states do not always violate a Bell inequality* Phys Rev A **65** 042302 (2002)
- [39] K. Banaszek *Information gain versus state disturbance for a single qubit* Open Sys. & Information Dyn. **13** 1 (2006)
- [40] F. Buscemi, M. Horodecki *Towards a unified approach to information-disturbance tradeoffs in quantum measurements* quant-ph/0810.1310
- [41] W.K. Wootters, W.H. Zurek *A Single Quantum Cannot be Cloned* Nature 299 802-803 (1982)
- [42] N. Gisin, S. Massar *Optimal Quantum Cloning Machines* Phys. Rev. Lett. 79, 2153 (1997)
- [43] R. Demkowicz-Dobrzański, M. Lewenstein, A. Sen De, U. Sen, D. Bruss *Usefulness of classical communication for local cloning of entangled states* Phys. Rev. A **73** 032313 (2006)
- [44] N. Gisin *Can relativity be considered complete ? From Newtonian nonlocality to quantum nonlocality and beyond* quant-ph/0512168
- [45] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki *Quantum entanglement* quant-ph/0702225
- [46] M. Keyl *Fundamentals of Quantum Information Theory* Physics Reports **369** Number 5, 431-548, October 2002
- [47] P. Horodecki, J. A. Smolin, B. M. Terhal, A. V. Thapliyal *Rank two bipartite bound entangled states do not exist* Theor. Comp. Sc. **292** 589-596 (2003)
- [48] L. Chen, Y.-X. Chen *Rank three bipartite entangled states are distillable* quant-ph/0803.1011
- [49] R. Alicki *Pure decoherence in quantum systems* Open Sys. & Information Dyn. **11**: 53-61 (2004) quant-ph/0801.0936v1

- [50] Sh. Yuan, M. I. Katsnelson, H. De Raedt *Decoherence by a spin thermal bath: Role of the spin-spin interactions and initial state of the bath* Phys. Rev. B **77** 184301 (2008) quant-ph/0802.3828v1
- [51] H. T. Cui, K. Li, X. X. Yi *A Study on the Sudden Death of Entanglement* Phys. Lett. A **365**(1-2) 44-48 (2007) quant-ph/0612145
- [52] K. Ann, G. Jaeger *Entanglement sudden death in qubit-qutrit systems* Phys. Lett. A **372**, 579 (2008) quant-ph/0707.4485v1
- [53] D. D. Awschalom, M. E. Flatté *Challenges for Semiconductor Spintronics* Nature Physics **3** 153-159 (2007)
- [54] P. Neumann, R. Kolesov, V. Jacques, J. Beck, J. Tisler, A. Batalov, L. Rogers, N. B. Manson, G. Balasubramanian, F. Jelezko, J. Wrachtrup *Excited-state spectroscopy of single NV defect in diamond using optically detected magnetic resonance* quant-ph/0807.2379v1
- [55] R. Hanson, L. P. Kouwenhoven, J. R. Petta, S. Tarucha, L. M. K. Vandersypen *Spins in few-electron quantum dots* Rev. Mod. Phys. **79** 1217 (2007)
- [56] F. Benatti, A. M. Liguori, A. Nagy *Environment Induced Bipartite Entanglement* J. Math. Phys. **49** 042103 (2008) quant-ph/0805.4790v1
- [57] K. Życzkowski, I. Bengtsson *Geometry of quantum states* Cambridge, University Press (2006)
- [58] M. Krein, D. Milman *On extreme points of regular convex sets* Studia Mathematica **9** 133–138 (1940)
- [59] G. P. Barker, D. Carlson *Cones of diagonally dominant matrices* Pacific Journal of Mathematics **57** no 1, 15-32 (1975)
- [60] G. P. Barker *The lattice of faces of finite dimensional cone* Lin. Alg. and Its Appl. **7** 71-82 (1973)
- [61] J. Pykacz *Quantum structures and fuzzy set theory, Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures* Elsevier Amsterdam, pp. 55-74 (2007)
- [62] K. Svozil *Quantum Logic* Springer (1998)
- [63] Ch. Aliprantis, R. Tourky *Cones and Duality* Graduate Studies of Mathematics **84** Am. Math. Soc.(2007)
- [64] A. Barvinok *A Course in Convexity* American Mathematical Society (2002)
- [65] M. Moszyńska *Geometria zbiorów wypukłych* WNT Warszawa (2001)
- [66] J. Dattorro *Convex Optimization & Euclidean Distance Geometry* ISBN 0976401304 Meboo Publishing USA,  
<http://meboo.convexoptimization.com/Meboo.html>

- [67] F. J. Bloore *Geometrical description of the convex sets of states for systems with spin- $\frac{1}{2}$  and spin-1* J. Phys. A: Math. Gen. **9**(12) 2059-2067 (1976)
- [68] R. Mosseri, R. Dandalo *Geometry of entangled states, Bloch spheres and Hopf fibrations* J. Phys. A: Math. Gen. **34** 10234-10252 (2001)
- [69] B. A. Bernevig, H.-D. Chen *Geometry of three-qubit state, entanglement and division algebras* J. Phys. A: Math. Gen. **34** 8325-8339 (2003)
- [70] J. F. Cornwell *Group theory in physics II* Academic Press, London(1984)
- [71] R. A. Bertlmann, Ph. Krammer *Bloch vectors for qudits and geometry of entanglement* quant-ph/0706.1743v1
- [72] S. Kryszewski, M. Zachcial, L. Szparaga *Stratificational and antipodean properties of boundary states for  $N \times N$  density matrices* quant-ph/0707.3094
- [73] Z. Yua, X. Jost-Lib, Q. Lia, J. Lva, Sh.-M. Fei *Differential Geometry of Bipartite Quantum States* Rep. Math. Phys. **60** 125-133 (2007) quant-ph/0711.1211
- [74] J. Grabowski, G. Marmo, M. Kus, *Geometry of quantum systems: density states and entanglement* J. Phys. A: Math. Gen. **38** 10217-10244 (2005)
- [75] J. Clemente-Gallardo, G Marmo *The space of density states in geometrical quantum mechanics* quant-ph/0707.3759v1
- [76] R. Hartshorne *Algebraic Geometry* GTM **52** (1997)
- [77] B.M. Terhal, P. Horodecki *A Schmidt number for density matrices* Phys. Rev. A Rapid Communications **61** 040301 (2000) quant-ph/9911117
- [78] J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony, R.A. Holt *Proposed experiment to test local hidden-variable theories* Phys. Rev. Lett. **23** 880 (1969)
- [79] M. Lewenstein, B. Kraus, J.I. Cirac, P. Horodecki *Optimization of entanglement witnesses* Phys. Rev. A **62** 052310 (2000) quant-ph/0005014
- [80] L. M. Ioannou, B. C. Travaglione *Quantum Separability and Entanglement Detection via Entanglement-Witness Search and Global Optimization* Phys. Rev. A **73** 052314 (2006) quant-ph/0602223v1
- [81] S. -H. Kye *Facial Structures for unital positive linear maps in the two-dimensional matrix algebra* Lin. Alg. Appl **362** 57-73 (2003)
- [82] P. Horodecki *From limits of quantum operations to multicopy entanglement witnesses and state-spectrum estimation* Phys. Rev. A **68** 052101 (2003)
- [83] P. Horodecki, A. Ekert *Method for Direct Detection of Quantum Entanglement* Phys. Rev. Lett. **89** 127902 (2002)



- [84] J. K. Korbicz, M. L. Almeida, J. Bae, M. Lewenstein, A. Acín *Structural approximations to positive maps and entanglement breaking channels* Phys. Rev. A **78** 062105 (2008) quant-ph/0808:1052
- [85] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki *Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions* Phys Lett A **223** 1 (1996) quant-ph/9605038
- [86] A. Peres, *Collective tests for quantum nonlocality* Phys. Rev. A **54** 2685 (1996)
- [87] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki *Mixed-state entanglement and distillation: is there a “bound” entanglement in nature?* Phys. Rev. Lett. **80** 5239 (1998) quant-ph/9801069
- [88] Ł. Pankowski, M. Piani, M. Horodecki, P. Horodecki *Few steps more towards NPT bound entanglement* quant-ph/0711.2613
- [89] W. Hall *Multipartite reduction criteria for separability* Phys. Rev. A **72** 022311 (2005)
- [90] M.-D. Choi, *Positive semidefinite biquadratic forms* Lin. Alg. Appl. **10** 285 (1975); *ibid* **12** 95 (1975)
- [91] M.-D. Choi, *Some assorted inequalities for positive linear maps on  $C^*$ -algebras* J. Operator Theory **4** 271 (1980)
- [92] E. Størmer *Decomposable positive maps on  $C^*$ -algebras* Proc. Am. Math. Soc. **86** 402 (1982)
- [93] M. -D. Choi *Some assorted inequalities for positive linear maps on  $C^*$ -algebras* J. Operator Theory **4** 271-285 (1980)
- [94] M. -D. Choi, T. Y. Lam, *Extremal positive semidefinite forms* Math. Ann. 231 (1977)
- [95] S. J. Cho, S.-H. Kye, S. G. Lee *Generalized Choi maps in 3- dimensional matrix algebras* Lin. Alg. Appl. **171** 213 (1992)
- [96] D. Chruscinski, A. Kossakowski *On the structure of entanglement witnesses and new class of positive indecomposable maps* Open Sys. & Information Dyn. **14** 275-294 (2007) quant-ph/0606211
- [97] H.-P. Breuer, *Optimal entanglement criterion for mixed quantum states* Phys. Rev. Lett. **97** 0805001 (2006) quant-ph/0605036
- [98] W. Hall, *Constructions of indecomposable positive maps based on a new criterion for indecomposability* J. Phys. A: Math. Gen. **39** 14119 (2006) quant-ph/0607035
- [99] A. G. Robertson *Schwarz inequalities and the decomposition of positive maps on  $C^*$ -algebras* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **94** 291 (1983)
- [100] A. G. Robertson *Positive extensions of automorphisms of spin factors* Proc. Roy. Soc. Edinburgh **94** A 71 (1983)

- [101] A. G. Robertson *Positive Projections on  $C^*$ -Algebras and an Extremal Positive Map* J. Lond. Math. Soc. (2) **32** 133 (1985)
- [102] D. Chruściński and A. Kossakowski *A class of positive atomic maps* J. Phys. A: Math. Theor. **41** No 21 215201 (2008) quant-ph/0711.4483v1
- [103] S. L. Woronowicz *Nonextendible positive maps* Comm. Math. Phys. **51** 243 (1976)
- [104] W.-S. Tang *On positive linear maps between matrix algebra* Lin. Alg. Appl. **79** 33 (1986)
- [105] Ch.-K. Li, S. Pierce *Linear Preserver Problems* Amer. Math. Monthly August-September 2001
- [106] M. Lewenstein, B. Kraus, P. Horodecki, J. I. Cirac *Characterization of separable states and entanglement witnesses* Phys Rev A **63** 044303 (2001) quant-ph/0005112
- [107] P. Horodecki *Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition* Phys. Lett. A **232** 333 (1997)
- [108] L. Clarisse *Construction of bound entangled edge states with special ranks* Physics Letters A **359** 603-607 (2006)
- [109] W. A. Majewski *On a characterization of PPT states* quant-ph/0708.3980v1
- [110] L. Chen, Y. -X. Chen *Range criterion and classification of true entanglement in  $2 \times M \times N$  system* Phys. Rev. A **73** 052310 (2006)
- [111] O. Rudolph *On the cross norm criterion for separability* J. Phys A **36** 5825 (2003)
- [112] O. Rudolph *Further results on the cross norm criterion for separability* Quantum Information Processing **4** No. 3, 219-239 (2005) quant-ph/0202121
- [113] K. Chen, L.-A. Wu *A matrix realignment method for recognizing entanglement* Quantum Inf. Comp. **3** 193 (2003) quant-ph/0205017
- [114] R. Bhatia *Matrix Analysis* Graduate Texts in Mathematics **169** Springer New York (1997)
- [115] K. Chen, L.-A. Wu *Test for entanglement using physically observable witness operators and positive maps* Phys. Rev. A **69** 022312 (2004) quant-ph/0306041
- [116] Ch.-J. Zhang, Y.-Sh. Zhang, Sh. Zhang, G.-C. Guo *Entanglement detection beyond the computable cross-norm or realignment criterion* Phys. Rev. A **77** 060301(R) (2008) quant-ph/0709.3766v6
- [117] P. Aniello, C. Lupo *A class of inequalities inducing new separability criteria for bipartite quantum systems* J. Phys. A: Math. Theor. **41** 355303 (2008)
- [118] C. Lupo, P. Aniello, A. Scardicchio *Bipartite quantum systems: on the realignment criterion and beyond* J. Phys. A: Math. Theor. **41** 415301 (2008) quant-ph/0802.2019v1

- [119] L. Clarisse, P. Wocjan *On independent permutation separability criteria* Quantum Information and Computation, **6** No. 3 277-288 (2006) quant-ph/0504160v2
- [120] P. Wocjan, M. Horodecki *Characterization of combinatorially independent permutation separability criteria* Open Sys. & Inf. Dyn. **12** 331 (2005) quant-ph/0503129v2
- [121] A. Jamiołkowski *Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators* Rep. Math. Phys **3** 275 (1972)
- [122] S. Huang *Schmidt number for quantum operations* Physical Review A **75** 052318 (2006)
- [123] W. F. Stinespring *Positive functions on  $C^*$ -algebras* Proc. Amer. Math. Soc. **120** 438 (1965)
- [124] K. Kraus *States, Effects and Operations: Fundamental Notions of Quantum Theory*, Springer-Verlag, 1983
- [125] M. Horodecki, P. Shor, M.B. Ruskai *General entanglement breaking channels* Rev. Math. Phys. **15** 629 (2003)
- [126] M.B. Ruskai *Qubit entanglement breaking channels* Rev. Math. Phys. **15** 643 (2003)
- [127] D. Chruściński, A. Kossakowski *On Partially Entanglement Breaking Channels* Open Sys. & Information Dyn. **13** 17-26 (2006)
- [128] E. Størmer *Positive linear maps of operator algebras* Acta Math. **110** 233 (1963)
- [129] S. L. Woronowicz *Positive maps of low dimensional matrix algebra* Rep. Math. Phys **10** 165 (1976)
- [130] A. Sanpera, D. Bruss, M. Lewenstein *Schmidt-number witness and bound entanglement* Phys Rev A **63** 050301 (2001)
- [131] M. Piani, C. Mora *Class of ppt bound entangled states associated to almost any set of pure entangled states* Phys. Rev. A **75** 012305 (2007) quant-ph/0607061
- [132] D. P. DiVincenzo, T. Mor, P. W. Shor, J. A. Smolin, B. M. Terhal *Unextendible Product Bases, Uncompletable Product Bases and Bound Entanglement* Comm. Math. Phys. **238** 379-410 (2003) quant-ph/9908070
- [133] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, T. Mor, P. W. Shor, J. A. Smolin, B. M. Terhal *Unextendible Product Bases and Bound Entanglement* Phys. Rev. Lett. **82** 5385 (1999) quant-ph/9808030
- [134] B. M. Terhal *A Family of Indecomposable Positive Linear Maps based on Entangled Quantum States* Linear Algebra Appl **323** 61-73 (2000) quant-ph/9810091v3
- [135] M. Barbieri, F. De Martini, G. Di Nepi, P. Mataloni, G. M. D'Ariano, C. Macchiavello *Detection of entanglement with polarized photons: Experimental realization of an entanglement witness* Phys. Rev. Lett. **91** 227901 (2003)

- [136] M. Bourennane, M. Eibl, C. Kurtsiefer, S. Gaertner, H. Weinfurter, O. Gühne, P. Hyllus, D. Bruß, M. Lewenstein, A. Sanpera *Experimental detection of multipartite entanglement using witness operators* Phys. Rev. Lett. **92** 087902 (2004)
- [137] O. Gühne, P. Hyllus, D. Bruß, A. Ekert, M. Lewenstein, C. Macchiavello, A. Sanpera *Detection of entanglement with few local measurements* Phys. Rev. A **66** 062305 (2002)
- [138] S. Yu, N.-I. Liu *Entanglement Detection by Local Orthogonal Observables* Phys. Rev. Lett. **95** 150504 (2005)
- [139] P. Hyllus, O. Gühne, D. Bruß, M. Lewenstein *Relations between entanglement witnesses and Bell inequalities* Phys. Rev. A **72** 012321 (2005)
- [140] B. Terhal *Bell Inequalities and The Separability Criterion* Phys. Lett. A **271** 319 (2000) quant-ph/9911057
- [141] O. Gühne, N. Lütkenhaus *Nonlinear Entanglement Witnesses* Phys. Rev. Lett. **96** 170502 (2006)
- [142] O. Gühne, N. Lütkenhaus *Nonlinear entanglement witnesses, covariance matrices and geometry of separable states* J. Phys. Conf. Ser. **67** 012004 (2007) quant-ph/0612108v1
- [143] Ch. -J. Zhang, Y.-Sh. Zhang, Sh. Zhang, G.-C. Guo *Optimal entanglement witnesses based on local orthogonal observables* Phys. Rev. A **76** 012334 (2007) quant-ph/0705.1832v3
- [144] B. Kraus, J. I. Cirac, S. Karnas, M. Lewenstein *Separability in  $2 \times N$  composite quantum systems* Phys Rev A **61** 062302 (2000)
- [145] A. Sanpera, R. Tarrach, G. Vidal *Quantum inseparability as local pseudomixture* Phys Rev A **58** 826 (1998) quant-ph/9801024
- [146] F. Verstraete, K. Adenauert, J. Dehaene, B. D. Moor *A comparison of the entanglement measures negativity and concurrence* J. Phys. A **34** 10327 (2001) quant-ph/0108021
- [147] R. Augusiak, P. Horodecki, M. Demianowicz *Universal observable detecting all two-qubit entanglement and determinant based separability tests* Phys Rev A **77** 030301(R) (2008) quant-ph/0604109
- [148] G. Gour, N. R. Wallach *Entanglement of Subspaces and Error Correcting Codes* Phys. Rev. A **76** 042309 (2007) quant-ph/0704:0251v2
- [149] D. Ostapchuk, G. Passante, R. Kobes, G. Kunstatter *Geometric measures of entanglement and the Schmidt decomposition* quant-ph/0707.4020
- [150] F. Benatti, R. Floreanini, M. Piani *Non-decomposable Quantum Dynamical Semigroups and Bound Entangled States* Open Sys. & Inf. Dyn. **11** 325-338 (2004) quant-ph/0411095

- [151] D. Chruściński, A. Kossakowski *A new class of states with positive partial transpose* Phys Rev A **74** 022308 (2006)
- [152] D. Chruściński, A. Kossakowski *On circulant states with positive partial transpose* Phys Rev A **76** 032308 (2007)
- [153] D. Chruściński, A. Kossakowski *Multipartite circulant states with positive partial transpose* Open Sys. & Information Dyn. **15** No. 3 189-212 (2008) quant-ph/0710.1157
- [154] D. Chruściński, A. O. Pittenger *Generalized Circulant Densities and a Sufficient Condition for Separability* J. Phys. A: Math.Theor **41** 285301 (2008)
- [155] K. Życzkowski, P. Horodecki, A. Sanpera, M. Lewenstein *Volume of the set of separable states* Phys. Rev. A **58**(2) 883
- [156] L. Gurvits, H. Barnum *Largest separable balls around the maximally mixed bipartite quantum state* Phys. Rev. A **66** 062311 (2002)
- [157] L. Gurvits, H. Barnum *Better bound on the exponent of the radius of the multipartite separable ball* Phys. Rev. A **72** 032322 (2005)
- [158] E. G. Effros, Z.-J. Ruan *Operator Spaces* Oxford University Press, 2000
- [159] E. Rains *Semidefinite program for distillable entanglement* quant-ph/0008047
- [160] M. Horodecki, P. Horodecki *Reduction criterion of separability and limits for a class of protocols of entanglement distillation* Phys. Rev. A **59** 4206-4216 (1999) quant-ph/9708015
- [161] R. Horodecki, M. Horodecki *Information-theoretic aspects of inseparability of mixed states* Phys. Rev. A **54** 1838-1843 (1996)
- [162] H. Weyl *Gruppentheorie und Quantenmechanik* zweite Auflage, (S. Hirzel, Leipzig 1931).
- [163] B. Baumgartner, B.C. Hiesmayr, H. Narnhofer *The geometry of bipartite qutrits including bound entanglement* Phys. Lett. A **372**(13) 2190-2195 (2008) quant-ph/0705.1403
- [164] Ł. Derkacz, L. Jakóbczyk *Entanglement of a class of mixed two-qutrit states* quant-ph/0707.1575v1
- [165] R. A. Bertlmann, Ph. Krammer *Bound entanglement in the set of Bell state mixtures of two qutrits* Phys. Rev. A **78** 014303 (2008) quant-ph/0804.1525
- [166] Ph. Krammer *Characterizing entanglement with geometric entanglement witnesses* quant-ph/0807.4830
- [167] E.H. Moore *On the reciprocal of the general algebraic matrix* Bulletin of the American Mathematical Society **26** 394–395 (1920)

- [168] R. Penrose *A generalized inverse for matrices* Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **51** 406–413 (1955)