Rozważanym układem jest odwrócone podwójne wahadło fizyczne - układ składa się z dwóch prętów połączonych przegubowo i połączonych przegubem (w tej samej płaszczyźnie z podłożem). Dopuszczalny ruch jest ruchem płaskim w dwóch stopniach swobody (α - kąt który tworzy oś pierwszego pręta z pionem, β - kąt między osiami obu prętów).

Pręty mają długości l_1 i l_2. Środki ciężkości obu prętów są w odległościach $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2$ od ich dolnych końców. Momenty bezwładności prętów liczone wzgl. środków ciężkości wynoszą I_1, I_2, a masy m_1, m_2. Przez $\tilde{I}_1 = I_1 + m_1\tilde{l}_1^2, \tilde{I}_2 + m_2\tilde{l}_2^2$ będziemy oznaczać momenty bezwładności prętów liczone od ich dolnych przegubów (tw. Steinera). Środki ciężkości położone są w punktach:

$$r_1 = [x_1, y_1] = \tilde{l}_1[\sin(\alpha), \cos(\alpha)]$$
$$r_2 = [x_2, y_2] = l_1[\sin(\alpha), \cos(\alpha)] + \tilde{l}_2[\sin(\alpha+\beta), \cos(\alpha+\beta)]$$

Prędkości środków ciężkości wynoszą:

$$v_1 = \tilde{l}_1\dot{\alpha}[\cos(\alpha), -\sin(\alpha)]$$
$$v_2 = l_1\dot{\alpha}[\cos(\alpha), -\sin(\alpha)] + \tilde{l}_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})[\cos(\alpha+\beta), -\sin(\alpha+\beta)]$$

Energia kinetyczna i potencjalna układu wynoszą:

$$E_k = \frac{1}{2}\tilde{I}_1\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\beta}^2$$
$$E_p = m_1gy_1 + m_2gy_2$$

Ich różnica $\mathcal{L}$ wynosi (**ćwiczenie**):

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\tilde{I}_1 + m_2l_1^2)\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\tilde{I}_2\dot{\beta}^2 + (\frac{1}{2}m_2\tilde{l}_2^2 + m_2l_1\tilde{l}_2\cos\beta)\dot{\alpha}(\dot{\alpha}+\dot{\beta}) \\ &\quad -(m_1\tilde{l}_1 + m_2l_1)g\cos\alpha - m_2g\tilde{l}_2\cos(\alpha+\beta) \\ &= \frac{1}{2}a\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}b\dot{\beta}^2 + (d + c\cos\beta)\dot{\alpha}(\dot{\alpha}+\dot{\beta}) - e\cos\alpha - f\cos(\alpha+\beta),\end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{array}{lll} a = \tilde{I}_1 + m_2l_1^2 & c = \frac{1}{2}m_2\tilde{l}_2^2 & e = m_1\tilde{l}_1 + m_2l_1 \\ b = \tilde{I}_2 & d = m_2l_1\tilde{l}_2 & f = m_2g\tilde{l}_2 \end{array}$$

Równania ruchu (r.Lagrange'a II rodzaju) otrzymamy ze wzorów (r. Eulera Langrange'a dla funkcjonału $\mathcal{L}$):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\partial_{\dot{\alpha}}\mathcal{L} - \partial_\alpha\mathcal{L} = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\partial_{\dot{\beta}}\mathcal{L} - \partial_\beta\mathcal{L} = 0$$

Wstawiając do powyższych równań nasz funkcjonał $\mathcal{L}$, dostajemy (**ćwiczenie**):

$$(a + 2d + 2c\cos\beta)\ddot{\alpha} + (d + c\cos\beta)\ddot{\beta} - 2c\sin\beta\dot{\alpha}\dot{\beta} - c\sin\beta\dot{\beta}^2 - e\sin\alpha - f\sin(\alpha+\beta) = 0$$
$$b\ddot{\beta} + (d + c\cos\beta)\ddot{\alpha} - c\sin\beta\dot{\alpha}\dot{\beta} - f\sin(\alpha+\beta) = 0$$

Dla kąta siłą uogólnioną jest moment siły, dlatego zera po prawej stronie możemy zastąpić przez momenty na przegubach. Zakładamy, że kontrolujemy tylko moment na przegubie wewnętrznym:

$$(a + 2d + 2c\cos\beta)\ddot{\alpha} + (d + c\cos\beta)\ddot{\beta} - 2c\sin\beta\dot{\alpha}\dot{\beta} - c\sin\beta\dot{\beta}^2 - e\sin\alpha - f\sin(\alpha+\beta) = 0$$
$$b\ddot{\beta} + (d + c\cos\beta)\ddot{\alpha} - c\sin\beta\dot{\alpha}\dot{\beta} - f\sin(\alpha+\beta) = \tau$$

Możemy te równania zapisać w postaci macierzowej:

$$M \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} = V(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}) + \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$M = \begin{bmatrix} a + 2d + 2c\cos\beta & d + c\cos\beta \\ d + c\cos\beta & b \end{bmatrix}, \qquad V = \begin{bmatrix} 2c\sin\beta\ \dot{\alpha}\dot{\beta} + c\sin\beta\ \dot{\beta}^2 + e\sin\alpha + f\sin(\alpha+\beta) \\ c\sin\beta\ \dot{\alpha}\dot{\beta} + f\sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

Możemy przerzucić macierz M na drugą stronę i zredukować równanie do I rzędu wprowadzając $\omega_\alpha = \dot{\alpha}, \omega_\beta = \dot{\beta}$:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\omega}_\alpha \\ \dot{\omega}_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_\alpha \\ \omega_\beta \\ M^{-1} \begin{bmatrix} 2c\sin\beta\ \omega_\alpha\omega_\beta + c\sin\beta\ \omega_\beta^2 + e\sin\alpha + f\sin(\alpha+\beta) \\ c\sin\beta\ \omega_\alpha\omega_\beta + f\sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Przestrzeń fazowa układu jest czterowymiarowa, a równanie jest nieliniowe (dlaczego?). Dla zadanej stałej wartości τ będziemy znajdować położenie równowagi.

Szukamy linearyzacji prawej strony równania: $f(\alpha, \beta, \omega_\alpha, \omega_\beta) + g(\alpha, \beta, \omega_\alpha, \omega_\beta)\tau)$. Macierzą stanu zlinearyzowanego układu będzie ∇f, a macierzą wejścia będzie $\partial_\tau g$.

Ćwiczenie: $\partial_{\omega_\alpha} f\Big|_{\omega_\beta, \omega_\alpha = 0} = [1, 0, 0, 0]^T$, $\partial_{\omega_\beta} f\Big|_{\omega_\beta, \omega_\alpha = 0} = [0, 1, 0, 0]^T$

Ćwiczenie:

$$\partial_\alpha f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M^{-1} \begin{bmatrix} e\cos\alpha + f\cos(\alpha+\beta) \\ f\cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Ćwiczenie: Oblicz $\partial_\beta M^{-1}$. Wskazówka: wprowadzając $x = d + c\cos\beta$, $\partial_\beta M^{-1} = \partial_x M^{-1} \cdot \partial_\beta x$.

Ćwiczenie: Oblicz $\partial_\beta V\Big|_{\omega_\alpha, \omega_\beta = 0}$.