1 Kombinatoryka

1. Na ile sposobów można włożyć k kulek do n przegródek, jeżeli:

- W jednej przegródce może być najwyżej jedna kulka
- W jednej przegródce może być dowolna ilość kulek

2. Udowodnij własności trójkąta Pascala:

- symetryczność:
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
- wartość elementu jest równa sumie elementów nad nim:
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$
- suma elementów w n-tym wierszu jest równa 2^n (wierzchołek trójkąta to wiersz 0)
- Suma elementów w wierszu z naprzemiennymi znakami wynosi 0
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$
- $$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$
- $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} = 0$$

3. Wśród funkcji $f : \{-5, -2, 0, 2, 5\} \to \{-5, -2, 0, 2, 5\}$ ile jest funkcji:

- wszystkich
- malejących
- rosnących
- o wartościach ujemnych
- o wartościach dodatnich
- o wartościach nieujemnych
- o wartościach niedodatnich
- różnowartościowych
- różnowartościowych o wyrazach ujemnych
- bez miejsc zerowych
- o dokładnie jednych miejscu zerowym
- o dokładnie dwóch miejscach zerowych
- o dokładnie k miejscach zerowych
- parzystych
- nieparzystych
- rosnących
- malejących
- stałych
- niemalejących
- nierosnących
- niemalejących o wyrazach dodatnich
- niemalejących o wyrazach nieujemnych

4. Udowodnić rachunkowo, że suma ilości funkcji z zadania poprzedniego o dokładnie k miejscach zerowych dla $k \in \{0, \dots k\}$ jest równa sumie wszystkich funkcji.

5. Jaki jest wymiar przestrzeni wielomianów (nad pierścieniem przemiennym, np. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$):

- n-tego stopnia jednej zmiennej
- 3-go stopnia dwóch zmiennych
- jednorodnych 3-go stopnia dwóch zmiennych
- jednorodnych 3-go stopnia trzech zmiennych
- jednorodnych n-go stopnia k zmiennych
- wszystkich n-go stopnia k zmiennych

6. Ile jest różnych rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ w zbiorze liczb naturalnych?

7. Ile jest możliwych podziałów na dwie części zbioru n kul czerwonych i n kul czarnych? Zadanie rozwiązać dwoma sposobami i udowodnić ich równość:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{k}$$

2 Klasyczna teoria prawdopodobieństwa

8. Jakie jest prawdopodobieństwo, że sadzając przy okrągłym stole 3 mężczyzn i 3 kobiety, nie siądą przy sobie osoby tej samej płci?

9. W urnie są 4 kule czarne i 2 białe. Losujemy dwie kule bez zwracania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy dwie kule:

- tego samego koloru
- dwóch różnych kolorów

10. Spośród 52 kart w tali wylosowano 13. Jakie jest prawdopodobieństwo:

- Otrzymania wszystkich wartości
- Otrzymania wszystkich kolorów
- 5 pików, 4 kierów, 3 trefli i 1 karo
- dokładnie 5 pików

11. W górskim schronisku są 3 pokoje - 4,3 i 2 osobowy. Do pustego schroniska trafia grupa turystów i zajmuje miejsca losowo. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jeden pokój pozostanie wolny?

12. Losujemy prostokąt, którego wierzchołkami są punkty kraty $\{1, \dots n\} \times \{1, \dots m\}$, o bokach równoległych

do osi kraty. Jakie jest prawdopodobieńtwo, że będzie on kwadratem?
Wskazówka: Liczba kwadratów o boku k i bokach równoległych do osi kraty jest równa $(n-k)(m-k)$

13. Losujemy kwadrat, którego wierzchołkami są punkty kraty $\{1, \dots n\} \times \{1, \dots m\}$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jego boki będą równoległe do osi kraty?
Wskazówka: Ilość kwadratów wpisanych w kwadrat o boku k i osiach równoległych do osi kraty wynosi k.

14. Losując bez zwracania kolejne litery ze zbioru $AAAEKMMTTY$, jakie jest prawdopodobieństwo ułożenia słowa:

- $MATEMATYKA$
- dowolnego zaczynającego się na M
- dowolnego zaczynającego się na E

(każdy ciąg znaków traktujemy jako słowo).

3 Prawdopodobieństwo geometryczne

15. Każda z dwóch osób trafia w losowym momencie między 16 i 17 do baru i przebywa tam 20 minut. Jaka jest szansa, że się spotkają?

16. Z przedziału $[0, 1]$ wybrano dwa punkty, które podzieliły go na trzy odcinki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że da się z nich skonstruować trójkąt?

17. Na odcinku $[0, 1]$ umieszczono losowo punkty L i M. Jaka jest szansa, że:

- środek odcinka LM należy do odcinka $[0, 1/3]$?
- L jest bliżej M niż zera?

18. Na nieskończoną szachownicę o boku a rzuca się monetę o średnicy $2r < a$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że :

- moneta spadnie na tylko jedno pole
- moneta spadnie na obszar trzech pól
- moneta spadnie na obszar dwóch pól
- moneta spadnie na obszar czterech pól

19. Rozwiązać powyższe zadanie dla monety o średnicy $a < 2r < 2a$. Jakie są możliwe wyniki liczby pól w obszarze monety? Jak wygląda rozbicie przestrzeni zdarzeń na podzbiory odpowiadające różnym wynikom?

20. Rozwiązać powyższe zadanie dla szachownicy prostokątnej $a < 2r < b$.

21. Na kratę prostopadłych równoodległych o a (odległość między środami linii) linii grubości c rzucono monetę

o promieniu $r < a - c$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że moneta nie spadnie na linię?

22. Igłę długości l rzucono na podłogę z desek o szerokości $a > l$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła przetnie którąś krawędź deski?

23. Igłę długości l rzucono na podłogę z desek o szerokości $a = l/2$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła przetnie: 0, 1, 2 krawędzie deski?

24. Na podłogę z desek o szerokości a rzucono igłę długości $l = 3.5a$. Narysuj w przestrzeni probabilistycznej zbiory odpowiadające różnym wynikom liczby przecięć igły z krawędziami podłogi.

25. Z przedziału $[0, 1]$ wybrano losowo liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to liczba wymierna?

4 Niezależność zdarzeń i schemat Bernoulliego

26. W urnie są cztery kule: czerwona, zielona, niebieska i czerwono-zielono-niebieska. Rozpatrujemy 3 zdarzenia polegające na wyciągnięciu kuli zawierającej określony kolor. Czy zadarzenia są:

- niezależne parami
- niezależne

27. Rzucono 10 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania:

- 6 oczek co najmniej raz
- 5 oczek dokładnie 3 razy
- wszystkich wyników nieparzystych
- dokładnie 4 wyników nieparzystych

28. Rzucamy n razy dwiema kostkami. Dla jakiego n prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej raz parzystej liczby na obu kostkach przekroczy $3/4$?

29. Dwie osoby rzucają 10 razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania przez nie tej samej liczby orłów.

30. Żeby oszacować populację okonia w jeziorze (ważne by nie była to ryba osiadła, jak np. szczupak), dokonano połowu siecią, w kórym złapano 200 okoni. Wszystkie je oznaczono i wypuszczono. Po czasie dostatecznie długim by okonie w jeziorze się losowo przemieszały (zakładamy że nie tworzą trwałych stad), ponowiono połów, tym razem wędką, w którym za każdym razem sprawdzano, czy okoń był oznaczony i go wypuszczano. Złapano 100 okoni, z czego 8 było oznaczonych.

- Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba okoni w jeziorze?
- Jaką problem napotkalibyśmy, gdybyśmy drugi połow wykonali siecią, lub nie wypuszczali z powrotem złapanych ryb? (pomijamy kwestie prawne)

31. Cząstka porusza się po kracie całkowitoliczbowej. W każdej sekundzie wykonuje skok o 1 na x **i** o 1 na y. Skok z równym prawdopodobieństwem zmniejsza i zwiększa współrzędną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że cząstka w n-tej sekundzie znajdzie się na współrzędnej (n, k)?

32. Cząstka porusza się po kracie całkowitoliczbowej. W każdej sekundzie wykonuje skok o 1 na x **i** o 1 na y. Skok z prawdopodobieństwem $1/3$ zmniejsza, a z prawdopodobieństwem $2/3$ zwiększa współrzędną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że cząstka w n-tej sekundzie znajdzie się na współrzędnej (n, k)?

33. Cząstka porusza się po kracie całkowitoliczbowej. W każdej sekundzie wykonuje skok o 1 na x **lub** o 1 na y. Skok z równym prawdopodobieństwem zmniejsza i zwiększa współrzędną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że cząstka w n-tej sekundzie znajdzie się na współrzędnej (n, k)?

34. **Banacha o zapałkach** Pewien matematyk nosi w kieszeni lewej i prawej pudełko zapałek. Jak chce zapalić papierosa sięga z równym prawdopodobieństwem do jednej kieszeni i wykorzystuje zapałkę z pudełka. W chwili początkowej ma N zapałek w obu pudełkach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że:

- przy n-tym papierosie wyciągnie puste pudełko
- gdy wyciągnie puste pudełko, w drugim będzie k zapałek?

5 Prawdopodobieństwo warunkowe

35. Na nieskończoną szachownicę o boku a rzuca się monetę o średnicy $2r < a$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że moneta spadnie na obszar 4 pól, pod warunkiem że przecina przynajmniej dwie krawędzie szachownicy?

36. Rzucamy trzema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na żadnej kostce nie wypadnie szóstka, jeżeli na każdej kostce wypadła inna liczba oczek? Czy niewyrzucenie szóstki i wyrzucenie innych liczb oczek są zdarzeniami niezależnymi?

37. Jakie jest prawdopodobieństwo losując z talii 13 kart wylosowania dokładnie 5 pików, pod warunkiem, że wylosowano przynajmniej jedną kartę z każdego koloru?

38. Jakie jest prawdopodobieństwo losując z talii 13 kart wylosowania przynajmniej jednej karty z każdego koloru, pod warunkiem, że wylosowano 5 pików?

39. Gracz dostał 13 kart z 52 i po obejrzeniu 8 z nich stwierdził, że nie mam asa. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ogóle nie ma asa?

40. W partii brydża przed licytacją gracz widzi, że nie ma asa.

- Jakie jest prawdopodobieństwo, że jego partner ma 2 asy?

- Jakie jest prawdopodobieństwo, że każdy pozostały gracz ma przynajmniej jednego asa?

41. Kiedyś w telewizji emitowano następujący teleturniej. W jednej z trzech bramek ukryta była nagroda. Uczestnik wybierał numer bramki, a wtedy prowadzący odkrywał przed nim jedną z pozostałych dwóch, która była pusta i pytał, czy uczestnik chce zmienić swój wybór bramki na drugą jeszcze nie odsłoniętą. Co się bardziej opłaca uczestnikowi? Zmienić swój wybór, czy pozostać przy nim?

42. (**Paradoks Simpsona**) W mieście A umieralność na gruźlicę jest wyższa zarówno w grupie kobiet jak i w grupie mężczyzn niż w mieście B. Natomiast umieraność na gruźlicę w całej populacji jest wyższa w mieście B. Jak to możliwe?

43. Sytuacja jak w zadaniu z okoniami. Jeżeli za pierwszym razem złapano ich 200 i oznaczono, a po czasie na 100 złapanych 8 było oznaczonych, jaki jest rozkład prawdopodobieństwa liczby okoni w jeziorze? (podać wzór, nie liczyć trudnych sum).

44. Wśród 65 monet jest jedna z dwoma orłami. Na wybranej losowo monecie wypadł orzeł n razy z rzędzu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to moneta z dwoma orłami?

45. Podczas klasówki z historii Jan i Paweł siedzieli obok siebie. Mieli przyporządkować dwóm datom. Jan nie znał odpowiedzi i postanowił zapytać Pawła wiedząc, że w 3 przypadkach na 4 zna on prawidłową odpowiedź, ale w 1 przypadku na 4 oszukuje. Co jest lepsze dla Jana - odpowiedzieć losowo, czy zapytać Pawła?

46. Król Artur urządza turniej rycerski, w którym zwycięzca pojedynku przechodzi dalej. Wśród 2^n uczestników jest dwóch braci. Zakładając, że każdy uczestnik wygrywa pojedynek z prawdopodobieństwem 1/2, obliczyć prawdopodobieństwo, że bracia spotkają się w pojedynku.

47. W mieście działają dwie korporacje taksówkowe: Zielone Taxi (85% taksówek) i Niebieskie Taxi (15% taksówek). Świadek nocnego wypadku zakończonego ucieczką kierowcy zeznał, że samochód był niebieski. Eksperyment wykazał, że świadek rozpoznaje w tych warunkach kolor poprawnie w 80% przypadków. Jakie jest prawdopodobieństwo, że samochód rzeczywiście był niebieski?
(Zauważmy, że świadek myli się w obu kierunkach z tym samym prawdopodobieństwem, co jest sytuacją szczególną)

48. Test na chorobę, która dotyka jednego człowieka na tysiąc, daje fałszywą pozytywną odpowiedź w 5% przypadków, a odpowiedź negatywna jest zawsze prawdziwa. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba u której test dał pozytywną odpowiedź jest rzeczywiście chora?

6 Ważne rozkłady i ich własności

49. Dla rozkładu Poissona danego wzorem:

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

- sprawdź czy jest to rozkład
- oblicz wartość maksymalną
- oblicz wartość średnią
- oblicz wariancję

50. Dla rozkładu geometrycznego danego wzorem:

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$$

- sprawdź czy jest to rozkład
- oblicz wartość maksymalną
- oblicz wartość średnią
- oblicz wariancję
- wyznacz dystrybuantę
- oblicz medianę

51. Dla rozkładu jednostajnego na odcinku $[a, b]$:

- unormuj rozkład
- oblicz wartość średnią
- oblicz wariancję
- wyznacz dystrybuantę
- oblicz medianę

52. Dla rozkładu trójkątnego na odcinku $[-a, b]$ o wartości maksymalnej w 0:

- unormuj rozkład
- oblicz wartość średnią
- oblicz wariancję
- wyznacz dystrybuantę
- oblicz medianę

53. Dla rozkładu wykładniczego danego wzorem:

$$\rho(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$$

- sprawdź czy jest to rozkład
- oblicz wartość maksymalną
- oblicz wartość średnią
- oblicz wariancję
- wyznacz dystrybuantę
- oblicz medianę

54. Dla rozkładu Cauchy'ego danego wzorem:

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi}\frac{h}{(x-m)^2 + h^2}$$

- oblicz wartość maksymalną
- oblicz wartość średnią
- oblicz wariancję
- *wyznacz dystrybuantę
- *oblicz medianę

7 Rozkłady funkcji zmiennej losowej

55. Bok kwadratu ma rozkład jednostajny na zbiorze $\{0, \ldots, 5\}$. Jak wygląda rozkład pola kwadratu?

56. Pewna wielkość ma rozkład jednostajny na zbiorze $\{-2, \ldots, 2\}$. Jak wygląda rozkład jej wartości bezwzględnej?

57. Bok kwadratu ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, a]$. Jak wygląda rozkład pola kwadratu?

58. Bok kwadratu ma rozkład wykładniczy z parametem λ. Jak wygląda rozkład pola kwadratu?

59. Bok sześcianu ma rozkład wykładniczy z parametem λ. Jak wygląda rozkład objętości i pola powierzchni bocznej sześcianu?

60. Automat produkuje kulki, których rozkład promienia jest jednostajny na odcinku $[a, b]$. Jak wygląda rozkład ich powierzchni i objętości?

61. Automat produkuje kulki, których rozkład objętości jest jednostajny na odcinku $[a, b]$. Jak wygląda rozkład ich promienia i powierzchni?

62. Jak wygląda rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej, której logarytm ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$?

Odp:

$$\ln N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\ln x^2 - \mu}{2\sigma^2}}$$

Rozkład ten opisuje m.in. rozmiary narządów roślin i zwierząt w biologii oraz wielkość miast.

63. Jak wygląda rozkład położenia oscylatora harmonicznego o amplitudzie drgań A?

64. Rozkład położenia oscylatora harmonicznego o amplitudzie drgań A dany jest wzorem

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi(A^2 - x^2)}$$

Jak wygląda rozkład jego energii potencjalnej i kinetycznej?

8 Sploty rozkładów

65. Znajdź splot rozkładu jednostajnego o nośniku $[0, 1]$ z samym sobą.

66. Znajdź splot symetrycznego rozkładu trójkątnego o nośniku $[0, 2]$ z rozkładem jednostajnym o nośniku $[0, 1]$.

67. Znajdź splot dwóch rozkładów Poissona o średnich λ i μ.

68. Udowodnij, że splot dwóch rozkładów normalnych $N(0, 1)$ będzie rozkłądem normalnym $N(0, 2)$.

69. Udowodnij, że wartość średnia splotu dwóch rozkładów jest równa sumie ich wartości średnich.

70. Udowodnij, że wariancja splotu dwóch rozkładów jest równa sumie ich wariancji.

71. * Wyprowadź wzór na rozkład χ_{XY} iloczynu zmiennych losowych X, Y o rozkładach ρ_X, η_Y:

$$\chi_{XY}(z) = \int \rho_X(x)\rho_Y\left(\frac{z}{x}\right)\frac{dx}{x}$$

W tym celu znajdź rozkłady logarytmów zmiennych X i Y oraz ich splot. Następnie znajdź rozkład eksponentu otrzymanej zmiennej losowej.

72. Losujemy punkt w kwadracie $[a, b] \in [0, 1] \times [0, 1]$ i tworzymy prostokąt o bokach równoległych do boków kwadratu o wierzchołkach $[0, 0]$ i $[a, b]$. Jaki jest rozkład pola prostokąta?

73. Udowodnij, że rozkład iloczynu $n > 1$ zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 1]$ dany jest wzorem:

$$\rho_{\Pi_i x_i} = \frac{(-\ln(x))^{n-1}}{(n-1)!}$$

74. Udowodnij, że iloczyn zmiennych losowych o rozkładzie logarytmicznym normalnym $\ln N(0, 1)$ jest rozkładem logarytmicznym normalnym $\ln N(0, 2)$.

9 Testowanie hipotez

75. (Weryfikacja hipotezy o wartości średniej w rozkładzie normalnym, gdy σ jest znane) Wiadomo, że odchylenie standartowe oporu dla oporników w danym procesie produkcyjnym wynosi $0.2k\Omega$. W celu zweryfikowania hipotezy, że wartość oczekiwana rezystancji jest równa wartości znamionowej, pobrano próbkę 9 oporników i otrzymano następujące odchylenia od wartości znamionowej:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_k[k\Omega]$	-1.8	0.9	-1.0	4.5	-3.5	1.9	2.7	-0.8	-2.0

Zweryfikuj na poziomie istotności 0.05 hipotezę, że wartość średnia jest równa wartości znamionowej, wobec hipotezy alternatywnej, że jest różna.

76. (Weryfikacja hipotezy o wartości średniej w rozkładzie normalnym, gdy σ nie jest znane) Załóżmy że dla danych z poprzedniego przykładu nie znamy odchylenia standartowego. Zweryfikuj na poziomie istotności 0.05 hipotezę, że wartość średnia jest równa wartości znamionowej, wobec hipotezy alternatywnej, że jest różna.

77. Załóżmy że dla danych z poprzedniego przykładu nie znamy odchylenia standartowego. Zweryfikuj na poziomie istotności 0.05 hipotezę, że wartość średnia jest równa wartości znamionowej, wobec hipotezy alternatywnej, że jest większa.

78. Producent twierdzi, że średni czas świecenia żarówki t_{sr} wynosi 1000 godzin. Aby zweryfikować hipotezę "$t_{sr} = 1000$" wobec hipotezy alternatywnej, że "$t_{sr} \neq 1000$" zmierzono czas dla próbki o liczności 100 i otrzymano $\bar{t} = 995$, $\sigma^2 = 36$. Zweryfikuj hipotezę zerową wobec hipotezy alternatywnej na poziomie istotności $\alpha = 0.02$.

79. Producent twierdzi, że średni czas świecenia żarówki t_{sr} wynosi 1000 godzin. Aby zweryfikować hipotezę "$t_{sr} = 1000$" wobec hipotezy alternatywnej, że "$t_{sr} < 1000$" zmierzono czas dla próbki o liczności 100 i otrzymano $\bar{t} = 995$, $\sigma^2 = 36$. Zweryfikuj hipotezę zerową wobec hipotezy alternatywnej na poziomie istotności $\alpha = 0.02$.

80. (Weryfikacja hipotezy o wartości średniej, gdy σ nie jest znane, dla próbek o dużej liczności) Dzienne zużycie wody przez zakład przemysłowy zostało zmierzone dla 256 dni i otrzymano wyniki $\bar{x} = 102hl$, $\sigma^2 = 64hl$. Przetestuj na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ hipotezę że średnie dzienne zużycie wody wynosi $100hl$, wobec hipotezy alternatywnej, że jest większe od tej wartości.

81. Dzienne zużycie wody przez zakład przemysłowy zostało zmierzone dla 256 dni i otrzymano wyniki $\bar{x} = 102hl$, $\sigma^2 = 64hl$. Przetestuj na poziomie istotności $\alpha = 0.02$ hipotezę że średnie dzienne zużycie wody wynosi $100hl$, wobec hipotezy alternatywnej, że jest większe od tej wartości.

82. Na pudełkach zapałek jest napis "średnio 64 zapałki". By zweryfikować tę hipotezę, wobec hipotezy alternatywnej, że średnia liczba zapałek w pudełku jest różna od 64, przeliczono zapałki w 100 losowo wybranych pudełkach i otrzymano $\bar{x} = 66$, $\sigma^2 = 25$. Zweryfikuj hipotezę na poziomie istotności $\alpha = 0.02$.