Rozwiązania zadań

Zadanie 2.1 Udowodnij, że w trójkącie Pascala wartość elementu jest równa sumie elementów nad nim
Rozwiązanie (Mariusz Urbański):

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}) =$$

$$\frac{n!}{k!(n-k-1)!}(\frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)}) = \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\frac{(n+1)}{(n-k)(k+1)} = \frac{n!(n+1)}{k!(k+1)(n-k-1)!(n-k)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}$$

Zadanie 2.4 Udowodnij, że w trójkącie Pascala suma elementów w wierszu z naprzemiennymi znakami wynosi 0
Rozwiązanie (Błażej Muszyński):
Wiadomo, że:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * x^{n-k} * y^k$$

Niech x=1, a y=-1, mamy wówczas:

$$(1+(-1))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * 1^{n-k} * (-1)^k$$

Stąd:

$$0^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * 1 * (-1)^k$$

Zatem:

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * (-1)^k$$

Zadanie 3 Wśród funkcji $f : \{-5,-2,0,2,5\} \to \{-5,-2,0,2,5\}$ ile jest funkcji niemalejących
Rozwiązanie (Michał Bethke):
Istnieje dokładnie $\binom{n+k-1}{k}$ funkcji niemalejących $f : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,k\}$.

Dane: $n = 5, k = 5$

Podstawiamy wartości do powyższego wzoru otrzymując rozwiązanie:

$$\binom{9}{5} = 126$$

Odpowiedź: Istnieje 126 funkcji niemalejących.

<u>Dowód wzoru:</u>

Generujemy ciąg składający się z kropek $\cdot$ oraz separatorów $|$.

Algorytm postępowania (funkcja na ciąg)

1. zainicjuj zmienną i, nadaj jej najmniejszą wartość
2. ile razy występuje i, tyle razy napisz $\cdot$
3. napisz separator
4. przejdź do następnej wartości, jeśli nie ma kolejnej wartości zakończ,
5. wróć do punktu 2.

Algorytm postępowania (ciąg na funkcję)

1. zainicjuj zmienną i, nadaj jej najmniejszą wartość
2. ile kropek występuje przed pierwszym separatorem, tyle wartości i - wpisz do kolejnych pustych pól tabeli
3. odrzuć ciąg początkowych kropek i separator, i = kolejna wartość, jeśli nie ma kolejnej wartości zakończ,
4. wróć do punktu 1.

Przykład: Zdefiniujmy funkcję:

x	-5	-2	0	2	5
y	-5	-2	0	2	5

Patrząc na powyższe algorytmy wygenerujemy przykładowy ciąg, który będzie tą funkcję reprezentował: $\cdot|\cdot|\cdot|\cdot|\cdot|\cdot$ Jest to tylko przykładowy ciąg, jednak KAŻDA funkcja niemalejąca może zostać w taki sposób przedstawiona.

Funkcja przekształcająca F jest bijekcją (czyli funkcją jednoznacznie określoną), ponieważ istnieje funkcja odwrotna F^{-1}. Bijektywność wynika z konstrukcji powyższego algorytmu - możemy przekształcić funkcję na ciąg oraz ciąg na funkcję. Z tego z kolei wynika równość liczby elementów w zbiorach funkcji niemalejących i ciągów.

Pozostaje nam tylko wyliczyć ile mamy kombinacji kropek i separatorów. Patrząc na samą reprezentację ciągu widać, że jest on jednoznacznie określony przez $k-1$ elementowy podzbiór zbioru $n+k-1$ elementowego (podzbiór pozycji, na których stoją separatory).

Wniosek: Istnieje więc $\binom{n+k-1}{k}$ takich ciągów co jest jednoznaczne z $\binom{n+k-1}{n-1}$.

Zadanie 15 Każda z dwóch osób trafia w losowym momencie między 16 i 17 do baru i przebywa tam 20 minut. Jaka jest szansa, że się spotkają?
Rozwiązanie (Mariusz Urbański):
Jest to typowe zadanie na prawdopodobieństwo geometryczne. Wprowadzamy następujące oznaczenia:
x - minuta w któej zjawia się w barze pierwsza osoba, czyli $x \in [0,60]$, dalej y - minuta pojawienia się drugiej osoby, czyli $y \in [0,60]$.
Przestrzeń zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \{(x,y) \ : \ R^2 \ : \ 0 \leqslant x \leqslant 60, 0 \leqslant x \leqslant 60\} \tag{1}$$

Zdarzenie nam sprzyjające, polega na tym, że mają się spotkać (każda osoba przebywa 20 minut), więc różnica w minutach wejścia tych osób musi spełniać warunek:

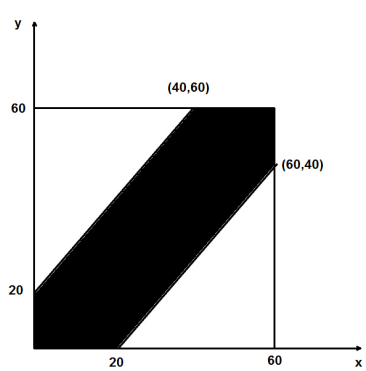
$$|x-y| \leqslant 20. \tag{2}$$

Uwzględniając powyższy warunek otrzymujemy zbiór opisujący nasze zdarzenie elementarne:

$$A = \{(x,y) \ : \ R^2 \ : \ 0 \leqslant x \leqslant 60, 0 \leqslant x \leqslant 60, |x-y| \leqslant 20\}, \tag{3}$$

lub inaczej:

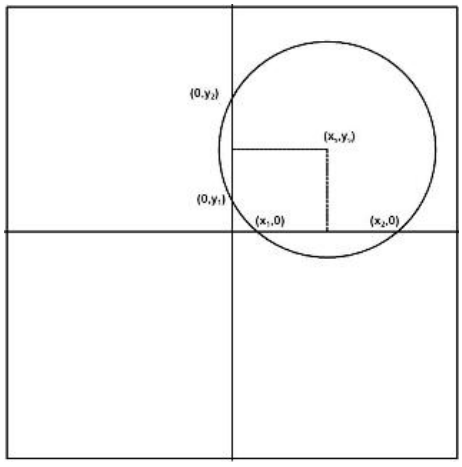
$$A = \{(x,y) \ : \ R^2 \ : \ 0 \leqslant x \leqslant 60, 0 \leqslant x \leqslant 60, \ x-y \leqslant 20 \ \wedge \ x-y \geqslant -20\}. \tag{4}$$



Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest więc zadane wzorem:

$$P(A) = \frac{60*60 - 2*\frac{40*40}{2}}{60*60} = \frac{3600 = 1600}{3600} = \frac{2000}{3600} = \frac{5}{9} \tag{5}$$

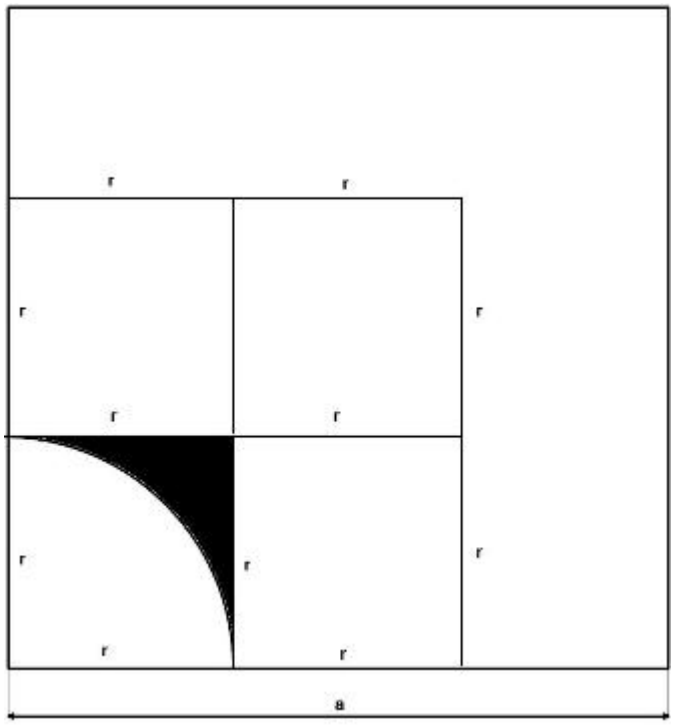
Zadanie 18 Na nieskończoną szachownicę o boku a rzuca sie monetę o średnicy $2r < a$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że moneta spadnie na obszar trzech pól?
Rozwiązanie (Tomasz Wrzesiński):



Rozważamy na początku sytuację skończonej szachownicy wymiaru 2×2, umieszczonej w kartezjańskim układzie współrzędnych (później przejdziemy do sytuacji szachownicy nieskończonej).

Analizując jeden wierzchołek kwadratu szachownicy:
1) środki kół, które obejmują 3 lub 4 pola należą do kwadratu o boku r, z jednym z wierzchołków pokrywających się z analizowanym wierzchołkiem,
2) środki kół obejmujących 4 pola należą do ćwierćokręgu o promieniu r i środku w analizowanym wierzchołku,
3) obszar, wktórym leżą środki kół obejmujących dokładnie 3 kwadraty to różnica punktu 1 i 2

Zilustrujemy teraz powyższe warunki.



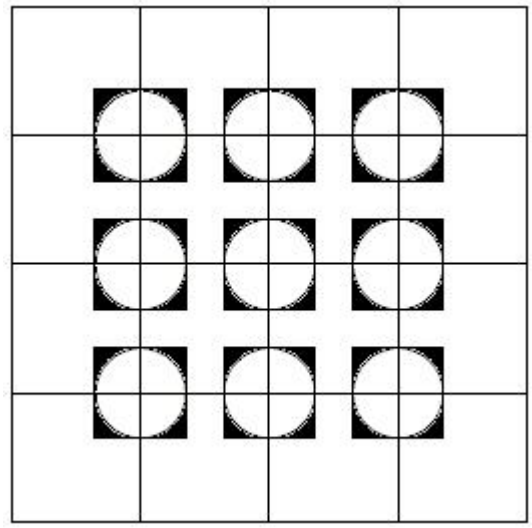
Na rysunku otrzymujemy obszar (zaznaczony na czarno) na którym musi znajdować sie środek monety, aby spełnić warunki zadania. Pole tego obszaru to różnica pola kwadratu o boku r oraz $\frac{1}{4}$ pola kola o promieniu r:

$r^2 - \frac{\pi r^2}{4}$

Na szachownicy 2×2 możemy znaleźć 4 takie obszary. Zatem prawdopodobieństwo upadku naszej monety na szachownice o całkowitej powierzchni $(2a)^2$, możemy obliczyć następująco:

$$p_{2\times 2} = 4(\frac{r^2 - \frac{\pi r^2}{4}}{(2a)^2}) = \frac{(4-\pi)r^2}{4a^2}$$

Tak jest w przypadku szachownicy 2×2, a co gdy mamy szachownice 3×3, 4×4, $n \times n$ lub jak w naszym przykładzie szachownica jest nieskończona?



Jak sie okazuje jest to bardzo proste i tak dla szachownicy 3×3 mamy 16 takich pól, dla szachownicy 4×4 jest ich 36, a dla $n \times n$ jest ich $4n^2 - 8n + 4$.

wymiar	ilość czarnych obszarów
2	$4(2-1)(2-1)$
3	$4(3-1)(3-1)$
4	$4(4-1)(4-1)$
$\vdots$	$\vdots$
n	$4(n-1)(n-1)$

Obliczmy teraz prawdopodobieństwo dla szachownicy o wymiarze $n \times n$

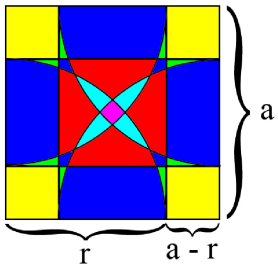
$$p_{n\times n} = 4(n-1)^2(\frac{r^2 - \frac{\pi r^2}{4}}{(na)^2}) = 4\frac{(n-1)^2}{n^2}\frac{(4-\pi)r^2}{4a^2} = (\frac{n-1}{n})^2(\frac{(4-\pi)r^2}{a^2})$$

W przypadku nieskończonej szachownicy należy przyjąć, ze $n \longrightarrow \infty$ zatem liczymy granice:

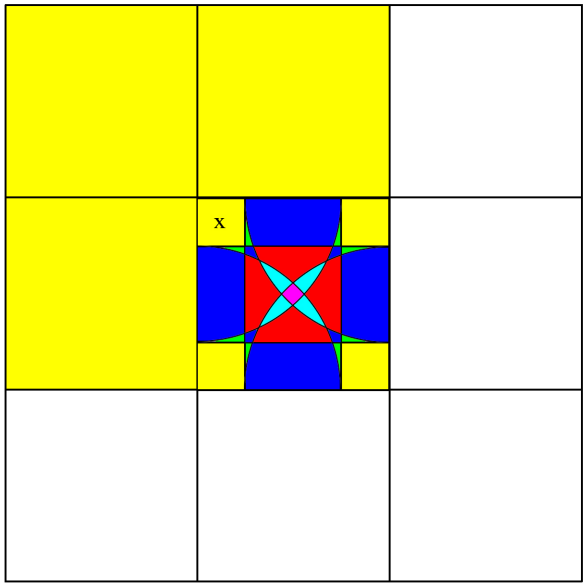
$$p_\infty = \lim_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n})^2(\frac{(4-\pi)r^2}{a^2}) = (\frac{(4-\pi)r^2}{a^2})\underbrace{\lim_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n})^2}_{\longrightarrow 1} = \frac{(4-\pi)r^2}{a^2}$$

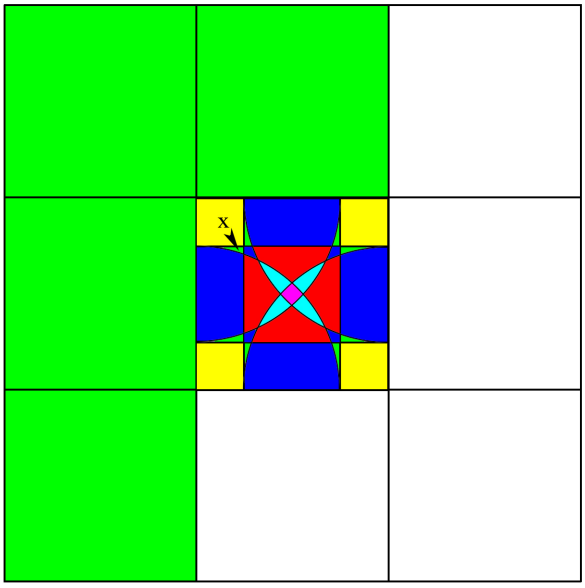
Zadanie 19.4 Na nieskończoną szachownicę o boku a rzuca się monetę o średnicy $r \in (\frac{a}{\sqrt{2}}, a)$. Jakie są możliwe wyniki liczby pól w obszarze monety? Jak wygląda rozbicie przestrzeni zdarzeń na podzbiory odpowiadające różnym wynikom?

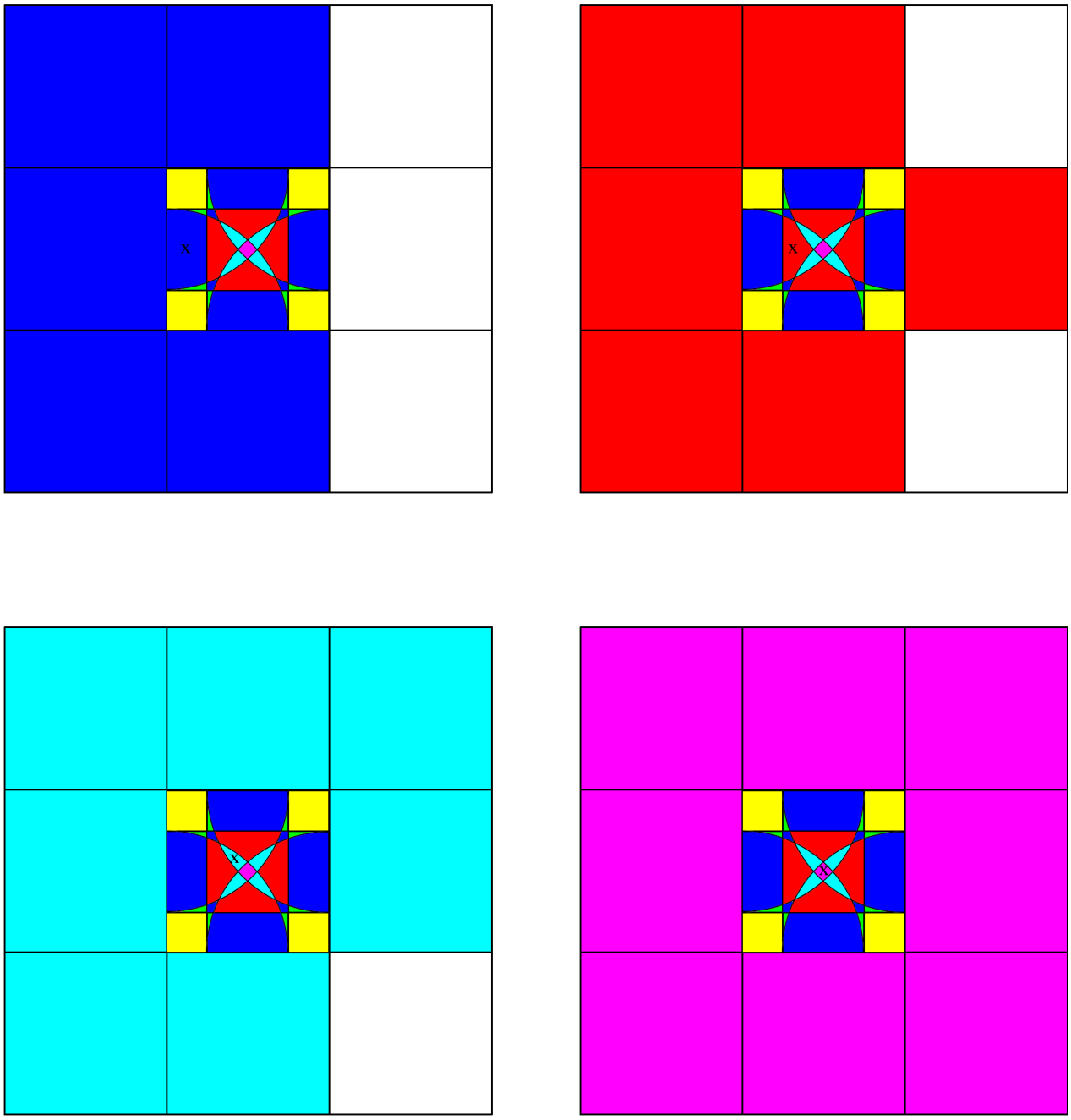
Rowiązanie (Błażej Muszyński):



Kolory odpowiadające liczbom pokrytych pól szachownicy:
Żółty - 4 przykryte pola szachownicy
Zielony - 5 przykrytych pól szachownicy
Niebieski - 6 przykrytych pól szachownicy
Czerwony - 7 przykrytych pól szachownicy
Błękitny - 8 przykrytych pól szachownicy
Różowy - 9 przykrytych pól szachownicy
Jeżeli przyjmiemy, że $r \in (a/\sqrt{2}, a)$ to moneta spadając na dany obszar oznaczony "x" będzie zajmować następujace pola





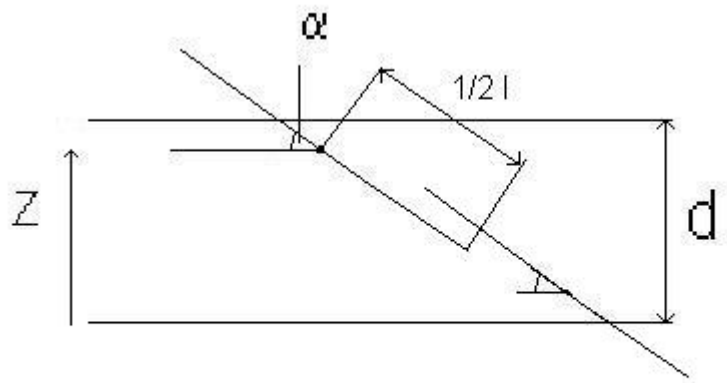


Zadanie 23 Igłę długości l rzucono na podłogę z desek o szerokości $a = l/2$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła przetnie: 0, 1, 2 krawędzie deski?

Rozwiązanie (Krzysztof Mazurowski):

Przestrzeń zdarzeń elementarnych, oznaczana tradycyjnie grecką literą Ω, jest jednym z podstawowych pojęć rachunku prawdopodobieństwa. Zbiór zdarzeń elementarnych jest zbiorem wszystkich możliwych wyników eksperymentu losowego lub próby losowej.W tym przypadku przestrzenią zdarzeń zawiera nieskończenie wiele elementów.

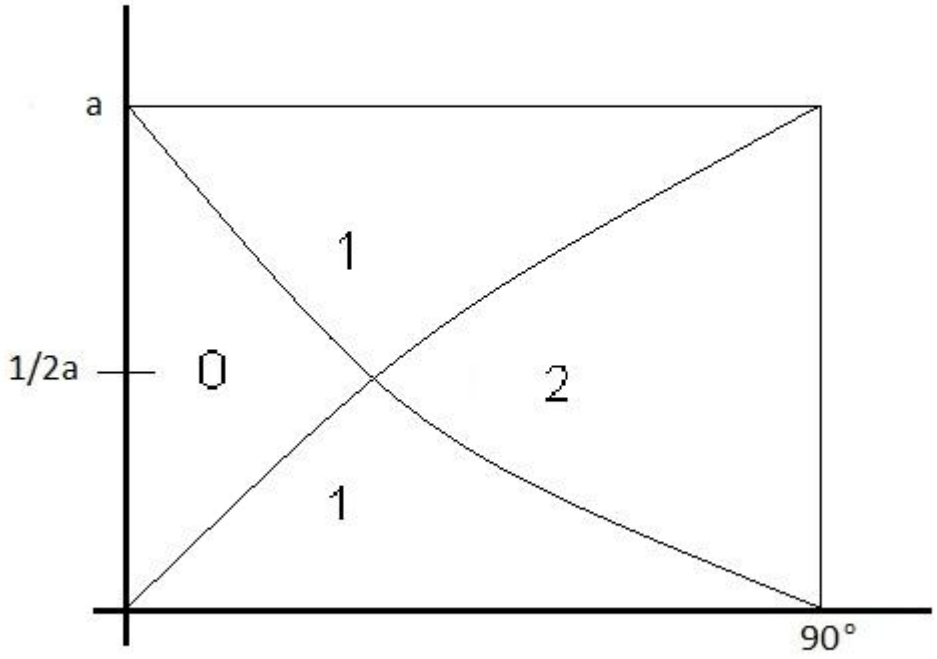
Teraz na rysunku zaprezentuję przykładowy rzut igłą wraz z warunkami na przecięcie krawędzi.



$d - z > \frac{l}{2} sin\alpha$
$z > \frac{l}{2} sin\alpha$
$\frac{l}{2} sin\alpha < z < d - \frac{l}{2} sin\alpha$

Powyżej mam przedstawione warunki żeby igła przecięła jedną lub dwie krawędzie na podstawie rysunku który jest widoczny powyżej.Jeśli nie jest spełniony którykolwiek z warunków to igła nie przetnie żadnej krawędzi, jeśli jest spełniony jeden warunek igła przetnie jedną krawędź. Natomiast jeśli są spełnione obydwa warunki igła przetnie dwie krawędzie.

Dzięki powyższym warunkom mogę stwierdzić jak rozbija się przestrzeń zdarzeń. Rozbija się ona na obszary ze względu na ilość przeciętych krawędzi podłogi przez igłę. Przedstawia to rysunek poniżej.



gdzie:

0-oznacza pole gdy igła nie przecina żadnej krawędzi
1- oznacza pole gdy igła przecina jedną krawędź
2- oznacza pole gdy igła przecina dwie krawędzie

Granice miedzy obszarami różnych przecięć wyglądają w ten sposób ponieważ: im bliżej środek igły upadnie środka deski i bliżej będzie utworzenia kąta prostego z krawędzią deski tym większe jest prawdopodobieństwo że igła przetnie dwie krawędzi. Na wykresie przedstawione są dwie linie ponieważ reprezentują one końce igły.

Przyjmijmy że losowy kąt jest w przedziale $[0, \frac{\pi}{2}]$ wtedy:

$$f(z) = \frac{1}{d}\ dla\ z\epsilon[0,d], \qquad f(\alpha) = \frac{2}{\pi}\ dla\ \alpha\epsilon[0,\frac{\pi}{2}], \qquad f(z,\alpha) = \frac{2}{d\pi}$$

gdzie:
z - jest to odległość środka igły od najbliższej krawędzi w dół
α - jest to kąt wyznaczony przez igłę i krawędź między deskami
f(α) - jest to rozkład prawdopodobieństwa kąta z jakim upada igła na podłogę
f(z) - jest to rozkład prawdopodobieństwa położenia igły na podłodze
f(z,α) - jest to łączny rozkład prawdopodobieństwa kąta i położenia

Dochodzę do wniosku ze rozkład jest jednostajny w prostokącie co jest ważne. Funkcja rozkładu w rozkładnie jednostajnym w prostokącie zachodzi w całym nośniku rozkładu, natomiast gęstość prawdopodobieństwa w przedziale $[0, \frac{2}{\pi}]$ jest stała a poza nim wynosi zero!!

Następnie przechodzę do obliczeń pól obszarów które są znaczone na drugim rysunku a później obliczę prawdopodobieństwa.

Obliczam pola obszarów:

1.Pole obszaru oznaczonego na wykresie 0

$$P(A_0) = \frac{\pi}{6}d - 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} dsin\alpha d\alpha =$$

$$= \frac{\pi}{6}d - 2d\int_0^{\frac{\pi}{6}} sin\alpha d\alpha = \frac{\pi}{6}d - 2d[-cos\alpha]_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{\pi}{6}d - 2d[-cos\frac{\pi}{6} - (-cos0)] = \frac{\pi}{6}d - 2d(-\frac{\sqrt{3}}{2} - (-1)) =$$

$$= \frac{\pi}{6}d + d\sqrt{3} - 2d$$

2.Pole obszaru oznaczonego na wykresie 1

$$P(A_1) = 2(\int_0^{\frac{\pi}{6}} dsin\alpha d\alpha + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (d - dsin\alpha)d\alpha) =$$

$$= 2(d\int_0^{\frac{\pi}{6}} sin\alpha d\alpha + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (d)d\alpha - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (dsin\alpha)d\alpha) =$$

$$= 2(d[-cos\alpha]_0^{\frac{\pi}{6}} + [d\alpha]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - d[-cos]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}) =$$

$$= 2(d[-\frac{\sqrt{3}}{2} - (-1)] + (\frac{d\pi}{2} - \frac{d\pi}{6}) - \frac{d\sqrt{3}}{2}) =$$

$$= 2(d - \frac{d\sqrt{3}}{2} + \frac{3d\pi - d\pi}{6} - \frac{d\sqrt{3}}{2}) =$$

$$= 2d - 2d\sqrt{3} + d\frac{2}{3}\pi$$

3.Pole obszaru oznaczonego na wykresie 2

$$P(A_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dsin\alpha d\alpha - \frac{1}{2}P(A_1) =$$

$$= d[-cos]_0^{\frac{\pi}{2}} - (d - d\sqrt{3} + \frac{3d\pi - d\pi}{6}) =$$

$$= d - d + d\sqrt{3} - \frac{3d\pi - d\pi}{6} = d\sqrt{3} - d\frac{1}{3}\pi$$

Obliczam prawdopodobieństwa że igła przetnie lub nie przetnie krawędzi:
1.Prawdopodobieństwo że igła nie przetnie krawędzi

$$p_0 = \frac{P(A_0)}{P(\Omega)}$$

$$p_0 = \frac{\frac{\pi}{6}d + d\sqrt{3} - 2d}{\frac{\pi d}{2}} = \frac{2}{\pi d}(\frac{\pi}{6}d + d\sqrt{3} - 2d) =$$

$$= \frac{2\pi d}{6\pi d} + \frac{2d\sqrt{3}}{\pi d} - \frac{4d}{\pi d} = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3} - 4}{\pi}$$

$$p_0 \approx 0,17$$

2.Prawdopodobieństwo że igła przetnie jedną krawędź

$$p_1 = \frac{P(A_1)}{P(\Omega)}$$

$$p_1 = \frac{2d - 2d\sqrt{3} + \frac{3d\pi - d\pi}{3}}{\frac{\pi d}{2}} = \frac{2}{\pi d}(2d - 2d\sqrt{3} + \frac{3d\pi - d\pi}{3}) =$$

$$= \frac{4d}{\pi d} - \frac{4d\sqrt{3}}{\pi d} + \frac{2}{\pi d} \cdot \frac{\pi d(3-1)}{3} =$$

$$= \frac{4 - 4\sqrt{3}}{\pi} + \frac{4}{3}$$

$$p_1 \approx 0,40$$

3.Prawdopodobieństwo że igła przetnie dwie krawędzie

$$p_2 = \frac{P(A_2)}{P(\Omega)}$$

$$p_2 = \frac{d\sqrt{3} - \frac{3d\pi - d\pi}{6}}{\frac{\pi d}{2}} = \frac{2}{\pi d}(d\sqrt{3} - \frac{3d\pi - d\pi}{6}) =$$

$$= \frac{2d\sqrt{3}}{\pi d} - \frac{2}{\pi d} \cdot \frac{\pi d(3-1)}{6} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{3}$$

$$p_2 \approx 0,43$$

Zadanie 26 W urnie są cztery kule: czerwona, zielona, niebieska i czerwono-zielono-niebieska. Rozpatrujemy 3 zdarzenia polegające na wyciągnięciu kuli zawierającej określony kolor. Czy zdarzenia są:
- niezależne parami
- niezależne?

Rozwiązanie (Mariusz Urbański):
a) Kule losujemy niezależnie więc każdą z nich możemy wyciągnąci z prawdopodobieńswem $\frac{1}{4}$. Pytanie co to znaczy, że wylosowaliśmy kule czerwoną? Mówiąc krótko: wyciągneliśmy czerwoną lub 'kolorową', więc prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli czerwonej wynosi:

$$P(Cz) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Podobnie dla kuli zielonej i niebieskiej:

$$P(N) = \frac{1}{2} \qquad oraz \qquad P(Z) = \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Sprawdźmy teraz czy są niezależne parami:

$$P(Cz \cap Z) = P(Cz) * P(Z), \tag{8}$$

gdzie $P(Cz \cap Z)$, jest prawdopodobieństwem wyciągnięcia kuli czerwonej i zielonej, więc kuli 'kolorowej', więc $P(Cz \cap Z) = \frac{1}{4}$. Ale ze wzorów (6) i (7) wiemy, że:

$$P(Cz) = \frac{1}{2} \qquad oraz \qquad P(Z) = \frac{1}{2}' \tag{9}$$

więc wzór (8) jest spełniony, gdyż:

$$P(Cz \cap Z) = P(Cz) * P(Z), \frac{1}{4} = \frac{1}{2} * \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Podobnie dowodzimy $P(Cz \cap N)$ oraz $P(N \cap Z)$. Wniosek: zdarzenia są parami niezależne!

Teraz niezależność grupowa. Musimy sprawdzić czy spełniony jest wzór:

$$P(Cz \cap Z \cap N) = P(Cz) * P(Z) * P(N) \tag{11}$$

Odpowiedź na to pytanie brzmi: NIE!!!, gdzyż:

$$\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Zadanie 29 Dwie osoby rzucają 10 razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania przez nie tej samej liczby orłów?
Rozwiązanie (Krzysztof Małłek):
Ω- liczba wszystkich możliwych zdarzeń
A - liczba zdarzeń sprzyjających
p(A) - prawdopodobieństwo

W każdym rzucie są możliwe dwa wyniki, rzutów jest 10 a serii rzutów dwie więc:

$$\Omega = (2^{10})^2$$

Liczba zdarzeń sprzyjających A wynosi:

$A = \sum_{k=0}^{10}((\binom{10}{k}))^2$

Prawdopodobieostwo wynosi:

$p(A) = \sum_{k=0}^{10}(((\binom{10}{k}))(\frac{1}{2})^{10})^2 = \sum_{k=0}^{10}((\frac{1}{2}^{10})(\binom{10}{k}))^2 = (\frac{1}{2})^{20}\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\binom{10}{10-k} = (\frac{1}{2})^{20}\binom{10+10}{10} = (\frac{1}{2})^{20}\binom{20}{10} = (\frac{184756}{1048576}) \approx$ 0.176197052

Rozważamy problem jako ciąg 20 rzutów, gdzie orzeł jednej osoby i reszka u drugiej traktujemy jako suckes. Jeżeli liczba orłów jest równa to liczba sukcesów wynosi 10. Nasze dane podstawiam do wzoru na prawdopodobieństwo k-sukcesów w schemacie Bernoulliego.

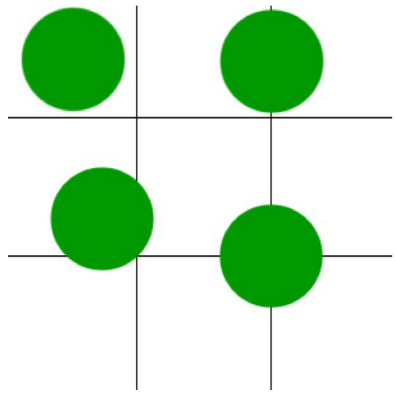
$P_n(k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$

k - liczba sukcesów
n - liczba rzutów
p - prawdopodobieństwo sukcesu
g - prawdopodobieństwo sukcesu

$P_n(10) = \binom{20}{10}(\frac{1}{2})^{10}(\frac{1}{2})^{20-10} = \binom{20}{10}(\frac{1}{2})^{20} \approx 0.176197052$

Zadanie 35 Na nieskończoną szachownicę o boku a rzuca się monetę o średnicy $2r < a$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że moneta spadnie na obszar 4 pól, pod warunkiem że przecina przynajmniej dwie krawędzie szachownicy?
Rozwiązanie (Rafał Molenda):
Na samym początku warto rozważyć możliwości, jak ta moneta może upaść na szachownicę. Oczywiście takich położeń w przestrzeni jest nieskończenie wiele, więc posłużyć się tu trzeba prawdopodobieństwem geometrycznym.

Pierwszy problem: Jak zależy ilość pól, które zajmuje moneta od ilości przeciętych krawędzi?



- Moneta nie przecina krawędzi - wynika z tego, że zajmuje jedno pole
- Moneta przecina jedną krawędź - zajmuje dwa pola
- Moneta przecina 2 krawędzie - zajmuje 3 pola
- Moneta przecina 4 krawędzie - zajmuje 4 pola

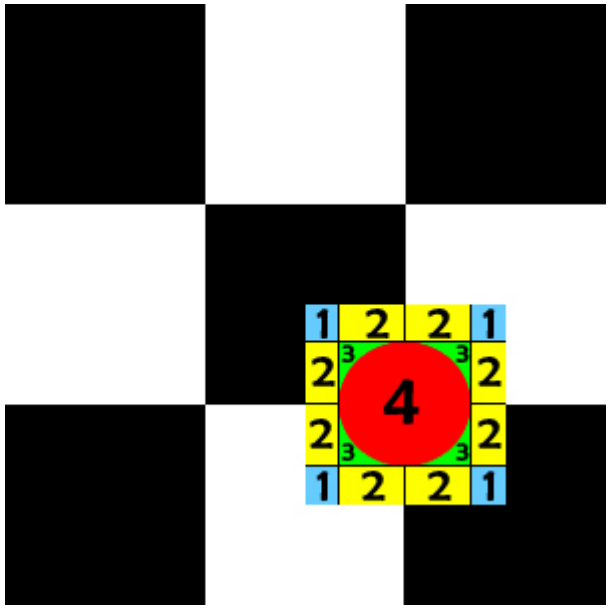
Nas interesuje przypadek, gdzie moneta zajmuje 4 pola.
Teraz należałoby określić pole pojedynczego kwadratu na szachownicy: zakładając, że jest to kwadrat o boku a:

$$P_{kwadratu} = a^2$$

Kolejna kwestia to pole monety. Zakładając, że jej promień to r:

$$P_{monety} = \pi r^2$$

Należy rozważyć jak wygląda pole poszczególnych częsci jednego kwadratu szachownicy, gdyż to właśnie od nich zależeć będzie prawdopodobieństwo:



Schemat przedstawia zależnośc położenia monety od ilości zajmowanych pól.

- 4 (czerwone pole) - moneta zajmuje 4 pola
- 3 (zielone pole) - moneta zajmuje 3 pola
- 2 (żółte pole) - moneta zajmuje 2 pola
- 1 (niebieskie pole) - moneta zajmuje 1 pole

Należy teraz skorzystać z definicji prawdopodobieństwa warunkowego:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

oraz

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Przyjmijmy oznaczenia:
$P(A)$ - moneta leży na 4 polach
$P(B)$ - moneta przecina co najmniej 2 krawędzie
$P(A \cap B)$ - moneta leży na 4 polach i przecina co najmniej 2 krawędzie $= P(A)$, bo moneta leżąca na 4 polach musi przeciąć 3 krawędzie, więc część wspólna zbiorów $A \cap B = A$
Korzystając z przedstawionego schematu można wyliczyć:

$$P(A \cap B) = P(A) = \frac{\pi r^2}{a^2}$$

$$P(B) = \frac{4r^2}{a^2}$$

$$P(A|B) = \frac{\pi}{4}$$

Zadanie 42 (**Paradoks Simpsona**) W mieście A umieralność na gruźlicę jest wyższa zarówno w grupie kobiet jak i w grupie mężczyzn niż w mieście B. Natomiast umieraność na gruźlicę w całej populacji jest wyższa w mieście B. Jak to możliwe?
Rozwiązanie (Dominik Kwiatkowski):
Paradoks Simpsona jest paradoksem statystycznym opisanym przez E. H. Simpsona w 1951 roku. Polega on na tym, że efekt działania kilku grup wydaje się być odwrócony, kiedy grupy są połączone. Ten pozornie niemożliwy efekt niespodziewanie pojawia się w naukach społecznych i statystyce związanej z medycyną, kiedy zmienna ważona, która różni się od wartości określonej indywidualnie dla poszczególnych grup, jest używana do oceny połączonych grup.

Przykładem paradoksu Simpsona może być następująca sytuacja:
Mamy dwa miasta, w których ludzie chorują na pewną chorobę. W mieście A procent zarażonych zarówno wśród kobiet, jak i wśród mężczyzn jest niższy niż w mieście B. Mimo to ogólny procent zachorowań jest w nim wyższy.

Miasto A
mężczyźni:
chorzy: 280; wszyscy: 600
procent chorych: 46,(6)%

kobiety:
chore: 20; wszystkie: 900
procent: 2,(2)%

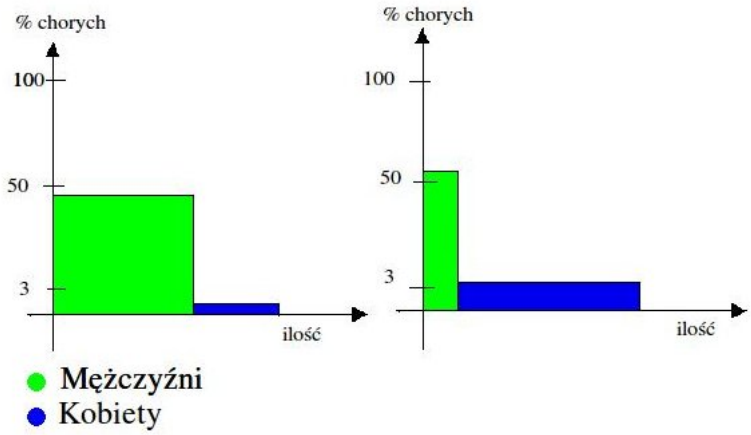
razem: 20%

Miasto B
mężczyźni:
chorzy: 100; wszyscy: 150

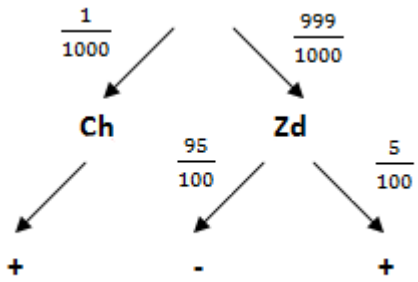
procent: 66,(6)%

kobiety:
chore: 50; wszystkie: 1350
procent: 3,7(037)%

razem: 10%



Zadanie 48 Test na chorobę, która dotyka jednego człowieka na tysiąc, daje fałszywą pozytywną odpowiedź w 5% przypadków, a odpowiedź negatywna jest zawsze prawdziwa. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba u której test dał pozytywną odpowiedź jest rzeczywiście chora?
Rozwiązanie (Michał Bethke):



Do zadania wykorzystujemy wzór na prawdopodobieństwo warunkowe.

Prawdopodobieństwo zachorowania i otrzymania pozytywnej odpowiedzi

$$P(chory \wedge +) = \frac{1}{1000}$$

Prawdopodobieństwo otrzymania pozytywnej odpowiedzi

$$P(+) = \frac{999}{1000} \cdot \frac{5}{100} + \frac{1}{1000}$$

Z definicji:

$$P(chory|+) = \frac{P(chory \wedge +)}{P(+)}$$

więc:

$$P(chory|+) = \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{999}{1000} \cdot \frac{5}{100} + \frac{1}{1000}} \approx 0.019$$

Odpowiedź: Szansa, że osoba u której test dał pozytywną odpowiedź jest rzeczywiście chora wynosi 1.9%.

Zadanie 49 Dla rozkładu Poissona danego wzorem:

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

- sprawdź czy jest to rozkład
- oblicz wartość średnią
- oblicz wariancję

Rozwiązanie (Krzysztof Małłek):
E(k) - wartość średnia
$\sigma^2 - wariancja$

$E(k) = \sum_{k=0}^{\infty} kp(k) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$

$E(k^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} + \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1)$

$\sigma^2 = E(k^2) - E^2(k) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Normowanie rozkładu:

$1 = \sum_{k=1}^{\infty} P_k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = e^0 = 1$

Równość zachodzi czyli jest to rozkład.

Zadanie 53 Dla rozkładu wykładniczego danego wzorem:

$$\rho(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$$

- oblicz wartość średnią
- oblicz wariancję

Rozwiązanie (Szymon Staszewski):
Wariancja rozkładu wykładniczego danego wzorem:

$$\rho(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x) \tag{13}$$

1. Wariancję D^2X (lub VarX) obliczamy ze wzoru:

$$D^2X = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2 \tag{14}$$

2. Wartość średnią EX obliczamy ze wzoru:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)dx$$

Dla rozkładu wykładniczego zadanego wzorem (13) mamy:

$$EX = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \left\{\begin{smallmatrix} f=x & dg=\lambda e^{-\lambda x}dx \\ df=1dx & g=-e^{-\lambda x}\end{smallmatrix}\right\} = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\left[e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{\lambda}(e^{-\infty} - e^0) = \frac{1}{\lambda}$$

Skoro mamy już policzone:

$$EX = \frac{1}{\lambda},$$

musimy jeszcze tylko obliczyć EX^2:

$$EX^2 = \int_0^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx = \left\{\begin{smallmatrix} f=x^2 & dg=\lambda e^{-\lambda x}dx \\ df=2xdx & g=-e^{-\lambda x}\end{smallmatrix}\right\} = \left[x^2e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} xe^{-\lambda x}dx$$

Tak więc:

$$EX^2 = 2\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx = \left\{ \begin{smallmatrix} f=x & dg=e^{-\lambda x}dx \\ df=1dx & g=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} \end{smallmatrix} \right\} = 2\left[-\frac{1}{\lambda}xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

Podstawiając otrzymane wzory do wzoru (14) otrzymujemy:

$$D^2X = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Wariancja rozkładu wykładniczego danego wzorem: $\rho(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$ wynosi: λ^{-2}.

Zadanie 57 Bok kwadratu ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, a]$. Jak wygląda rozkład pola kwadratu?
Rozwiązanie (Michał Bethke):
Z definicji:

$P(bok \in (x, x + dx)) = \rho(x)dx = \frac{1}{a}dx$
$P(pole \in (y, y + dy)) = \eta(y)dy = \frac{1}{a}dx$ (rozkład pola powierzchni)

Wyznaczamy wartość x ze względu na y (x - bok kwadratu, y - pole kwadratu):

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$$

Wyznaczamy pochodną po y:

$$dx = \frac{1}{2\sqrt{y}}dy$$

Podstawiając pochodną do rozkładu pola ostatecznie otrzymujemy:

$$\eta(y)dy = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}dy$$

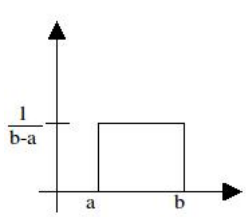
Czyli:

$$\eta(y) = \frac{1}{2a\sqrt{y}}$$

Odpowiedź: Rozkład pola kwadratu: $\eta(y) = \frac{1}{2a\sqrt{y}}$

Zadanie 61 Automat produkuje kulki, których rozkład objętości jest jednostajny na odcinku $[a, b]$. Jak wygląda rozkład ich promienia i powierzchni?
Rozwiązanie (Dominik Kwiatkowski):
Automat produkuje kulki, ktorych rozkład objętosci jest jednostajny na odcinku [a, b]. Jak wygląda rozkład ich promienia i powierzchni?

Rozkład objętości przedstawiamy w nastepujący sposób:
$P(obj \in (V, V + dV)) = \rho(V)dV$



Wykres przedstawia rozkład prawdopodobieństwa, że V znajduje się w danym przedziale, więc pole pod wykresem musi być równe 1. W takim razie wartość $\rho(V)$ wynosi $\frac{1}{b-a}$.

Rozkład promienia obliczamy z następującego wzoru:
$P(pr \in (r, r + dr)) = \eta(r)dr = \frac{1}{b-a}dV$
Aby obliczyć rozkład potrzebna jest wartość dV
$V = \frac{4}{3}\Pi r^3$
$\frac{dV}{dr} = 4\Pi r^2$

$dV = 4\Pi r^2 dr$

Znając dV wyznaczamy rozkład promienia ze wzoru:
$P(pr \in (r, r+dr)) = \eta(r)dr$
$\eta(r)dr = \frac{1}{b-a}4\Pi r^2 dr$
$\eta(r) = \frac{1}{b-a}4\Pi r^2$

Aby wyznaczyc rozklad pola ponownie korzystamy ze znanego rozkładu objętości
$P(pole \in (p, p+dp)) = \sigma(p)dp = \frac{1}{b-a}dV$
Musimy najpierw wyrazić V za pomocą p
$V = \frac{4}{3}\Pi(\sqrt{\frac{p}{4\Pi}})^3$
$dV = \frac{\sqrt{p}}{4\sqrt{\Pi}}dp$

Podstawiamy obliczoną wartość do wzoru na rozkład pola
$\sigma(p)dp = \frac{1}{b-a}\frac{\sqrt{p}}{4\sqrt{\Pi}}dp$
$\sigma(p) = \frac{1}{b-a}\frac{\sqrt{p}}{4\sqrt{\Pi}}$

Zadanie 63 Jak wygląda rozkład położenia oscylatora harmonicznego o amplitudzie drgań A?
Rozwiązanie (Błażej Muszyński):
W celu określenia prawdopodobieństwa dla oscylatora harmonicznego prostego potrzebujemy znaleźć stosunek czasu spędzonego przez punkt w przedziale $(x, x+dx)$ w stosunku do całego czasu spędzonego w odcinku $(-A, A)$ zatem mamy:

$$dP = \frac{2dt}{T} = \frac{2}{T*v}dx$$

T-okres

Prędkość wyraża się wzorem

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$x(t) = Acos(\omega t)$$

$$v(t) = -A\omega sin(\omega t)$$

Ponieważ:

$$x(t) = Acos(\omega t) \Longrightarrow t(x) = \frac{arccos(\frac{x}{A})}{\omega}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\omega\sqrt{A^2 - x^2}} = \frac{1}{v}$$

Stąd:

$$v(x) = \sqrt{A^2 - x^2} * \omega$$

Aby funkcja $f(x)$ była gęstością musi zachodzić warunek:

$$\int_{-A}^{A} dP = 1$$

Czyli:

$$\int_{-A}^{A} \frac{2}{Tv}\,dx = 1 \iff \int_{-A}^{A} \frac{2}{T\omega\sqrt{A^2 - x^2}}dx = 1$$

Zatem funkcja $f(x) = \frac{2}{T\omega\sqrt{A^2-x^2}}$ jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa dla oscylatora harmonicznego prostego.

Zadanie 65 Znajdź splot rozkładu jednostajnego o nośniku $[0,1]$ z samym sobą.
Rozwiązanie (Krzysztof Mazurowski):
Rozpatrujemy sumy rozkladów sumy rozkładów jednostajnych:

$$f_x(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

Rozpatrujemy sumę dwóch rozkładów

$$f(u) = \int_0^1 f_y(u-x)dx \begin{cases} v = u - x \\ dv = -dx \end{cases} \quad \Rightarrow f(u) = -\int_u^{u-1} f_y(v)dv = \int_{u-1}^u f_y(v)dv$$

Rozbijając na dwa przypadki otrzymujemy

$$0 \leqslant u \leqslant 1 \quad f_1(u) = \int_0^1 f_y(v)dv = \int_0^1 dv = u$$

$$1 \leqslant u \leqslant 2 \quad f_2(u) = \int_{u-1}^u f_y(v)dv = \int_{u-1}^u dv = 2 - u$$

Ostatecznie otrzymujemy ostateczny wzór który jest złożeniem wyników zamieszczonych wyżej całek oraz jednego wyniku kiedy to u jest mniejsze od zera i większe od dwóch wtedy splot wynosi 0

$$f(u) * f(u) = \begin{cases} 0, & u < 0 \; u > 2 \\ u, & u \epsilon (0,1) \\ 2-u, & u \epsilon (0,2) \end{cases}$$

Zadanie 67 Znajdź splot dwóch rozkładów Poissona o średnich λ i μ.
Rozwiązanie (Błażej Muszyński):
Niech dane będą dwie zmienne X i Y o rozkładzie Poissona z parametrem odpowiednio λ i μ. Szukamy splotu dwóch rozkładów Poissona. Zadanie sprowadza się do znalezienia rozkładu zmiennej X+Y. Rozkład Poissona jest rozkładem dyskretnym zatem:

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-i) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} * e^{-\mu}\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} =$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^i * \mu^{k-i} = e^{-\lambda+\mu}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}$$

Zatem zmienna X+Y ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda + \mu$

Zadanie 76 W celu zweryfikowania hipotezy, że wartość oczekiwana rezystancji jest równa wartości znamionowej, pobrano próbkę 9 oporników i otrzymano następujące odchylenia od wartości znamionowej:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_k[k\Omega]$	-1.8	0.9	-1.0	4.5	-3.5	1.9	2.7	-0.8	-2.0

Zweryfikuj na poziomie istotności 0.05 hipotezę, że wartość średnia jest równa wartości znamionowej, wobec hipotezy alternatywnej, że jest różna.
Rozwiązanie (Mariusz Urbański):
Nasza zmienna jest zmienną rozkładu normalnego $X \sim N(\mu, \sigma)$. Nie znamy ani μ ani σ. Stawiamy hipotezę zerową:

$$H_0 : \mu = \mu_0; \tag{15}$$

Przeciw hipotezie alternatywnej:

$$H_1 : \mu \neq \mu_0; \tag{16}$$

Obszary krytyczne dla hipotezy alternatywnej H_1:

$$\begin{aligned} \mu > \mu_0 \quad & (t_{1-\alpha}^{n-1}; \infty) \\ \mu < -\mu_0 \quad & (-\infty; -t_{1-\alpha}^{n-1}) \end{aligned} \tag{17}$$

Tworzymy statystykę testową:

$$T = \frac{x - \mu_0}{s}\sqrt{n} \tag{18}$$

sprawdzimy hipotezę alternatywną H_q dla:

$$n = 9, x = 0.1, s = 2.57, \alpha = 0.05, \mu_0 = 0.2[k\Omega] \tag{19}$$

Po podstawieniu danych (17) do wzoru (16):

$$T = \frac{0.1 - 0.2}{2.57} * 3 = -\frac{0.3}{2.57} = -0.11 \tag{20}$$

Odczytujemy z tablic kwartyl dla $t_0.975^8 = 2.306$, wię obszar krytyczny wynosi:

$$(-\infty, -2.306) \cup (2.306, \infty) \tag{21}$$

Ponieważ wartość statystyki nie należy do obszaru krytycznego, więc nie możemy odrzucić hipotezy H_0.

Zadanie 77 W celu zweryfikowania hipotezy, że wartość oczekiwana rezystancji jest równa wartości znamionowej, pobrano próbkę 9 oporników i otrzymano następujące odchylenia od wartości znamionowej:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_k[k\Omega]$	-1.8	0.9	-1.0	4.5	-3.5	1.9	2.7	-0.8	-2.0

Zweryfikuj na poziomie istotności 0.05 hipotezę, że wartość średnia jest równa wartości znamionowej, wobec hipotezy alternatywnej, że jest większa.

Rozwiązanie (Błażej Muszyński):

Średnia z próby $\bar{x} = 0,1$

Odchylenie standardowe z próby $s = 2,574$

$n = 9$

Zmienna X ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma)$ gdzie μ jest nieznane i σ jest nieznane.

Testujemy hipotezę:

H_0:$\mu = 0$ tzn. $\mu_0 = 0$ (tzn. nie ma odchyleo od wartości znamionowej) wobec hipotezy alternatywnej H_1:$\mu > 0$ statystyka testowa T jest postaci:

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{x} * \sqrt{n}$$

$$T = \frac{0,1 - 0}{2,574} * \sqrt{9} = \frac{0,1}{2,574} * 3 = 0,1165$$

Odczytujemy z rozkładu T - studenta kwantyl dla $t^8_{0,957} = 2,306$ obszar krytyczny jest postaci $(2,306; +\infty)$ Ponieważ wartośd statystyki testowej nie należy do obszaru krytycznego, nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy H_0

Zadanie 81 Dzienne zużycie wody przez zakład przemysłowy zostało zmierzone dla 256 dni i otrzymano wyniki $\bar{x} = 102hl$, $\sigma^2 = 64hl^2$. Przetestuj na poziomie istotności $\alpha = 0.02$ hipotezę że średnie dzienne zużycie wody wynosi $100hl$, wobec hipotezy alternatywnej, że jest większe od tej wartości.

Rozwiązanie (Rafał Molenda):

Dzienne zużycie wody przez zakład przemysłowy zostało zmierzone dla 256 dni i otrzymano wyniki $\bar{x} = 102hl$, $\sigma^2 = 64hl$. Przetestuj na poziomie istotnosci $\alpha = 0.02$ hipotezę że średnie dzienne zużycie wody wynosi $100hl$, wobec hipotezy alternatywnej, że jest większe od tej wartości.

Przyjęte oznaczenia:

- $\bar{x} = 102hl$
- $\sigma^2 = 64hl$
- $\alpha = 0.02$
- $\Theta_0 = 100hl$
- $n = 256$

Hipotezy:
H_0 - dzienne zużycie wody wynosi 100hl
H_1 - dzienne zużycie wody jest większe niż 100hl

Nie znamy wariancji, więc powinniśmy posłużyć się rozkładem T-Studenta. Jednak mając dane n = 256 (liczba pomiarów jest wystarczająco duża), możemy przyjąć, że rozkład jest rozkładem Gaussa, a parametr σ jest znany:

$$\frac{\bar{x} - \Theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{102 - 100}{8/16} = 4$$

Należy teraz skonstruować obszar krytyczny testu. Zgodnie z zasadami, wiedząc, że $\Theta > \Theta_0$:

$$K = (t_{1-\alpha}, \infty)$$

Odczytując z tablic rozkładu N(0,1): $t_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(0.98) \simeq 2.06$, więc:

$$K \simeq (2.06, \infty)$$

Analizując wyniki testu hipotezy, widać, że $4 \in K$, więc możemy odrzucić H_0 i przyjąć H_1