Równania wahadła podwójnego

Niech pierwszy człon wahadła tworzy z pionem kąt θ_1 a drugi θ_2, długości członów są równe odpowiednio: l_1 i l_2. Położenia środków ciężkości obu członów wynoszą:

$$x_1 = \frac{1}{2} l_1 \sin\theta_1 \tag{1}$$

$$y_1 = \frac{1}{2} l_1 \cos\theta_1 \tag{2}$$

$$x_1 = l_1 \sin\theta_1 + \frac{1}{2} l_2 \sin\theta_2 \tag{3}$$

$$y_1 = l_1 \cos\theta_1 + \frac{1}{2} l_2 \cos\theta_2 \tag{4}$$

Energia kinetyczna jest równa sumie energii kinetycznych ruchu postępowego środków ciężkości:

$$E_{KP1} = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) \tag{5}$$

$$E_{KP2} = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \tag{6}$$

i energii ruchu obrotowego obu członów wokół środków ciężkości:

$$E_{KR1} = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 \tag{7}$$

$$E_{KR2} = \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 \tag{8}$$

Momenty bezwładności wynoszą: $I_1 = \frac{1}{12} m_1 l_1^2, I_2 = \frac{1}{12} m_2 l_2^2$. Po wstawieniu ich do (7,8), po wstawieniu (2..4) do (5..6) i po dodaniu wszystkich czterech członów (5..8) dostaniemy wzór na energię kinetyczną całego wahadła:

$$E_K = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b\cos(\theta_2 - \theta_1) \\ b\cos(\theta_2 - \theta_1) & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

gdzie:

$$a = \left(\frac{1}{3} m_1 + m_2\right) l_1^2$$

$$c = \frac{1}{3} m_2 l_2^2$$

$$b = \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2$$

Energia potencjalna jest równa sumie energii potencjalnych środków ciężkości obu członów:

$$E_P = -m_1 g \frac{1}{2} l_1 \cos\theta_1 - m_2 g \left(l_1 \cos\theta_1 + \frac{1}{2} l_2 \cos\theta_2\right) = -p\cos\theta_1 - q\cos\theta_2, \tag{10}$$

gdzie $p = (\frac{1}{2} m_1 + m_2) g l_1, q = \frac{1}{2} m_2 g l_2$.

Pędy dla układu wynoszą:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{\dot\theta_1} E_K \\ \partial_{\dot\theta_2} E_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b\cos(\theta_2-\theta_1) \\ b\cos(\theta_2-\theta_1) & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot\theta_1 \\ \dot\theta_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \dot\theta_1 \\ \dot\theta_2 \end{bmatrix}$$

(dlatego, że energia potencjalna nie zależy od pochodnych współrzędnych). Pozwala to zapisać energię kinetyczną jako:

$$E_K = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} M^{-1} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

Z równań Hamiltona wiemy, że $\dot\theta_i = \partial_{p_i} E_K = M^{-1} p_i$, co daje:

$$\dot\theta_1 = \frac{cp_1 - b\cos(\theta_2-\theta_1)p_2}{ac - b^2\cos^2(\theta_2-\theta_1)} \tag{11}$$

$$\dot\theta_1 = \frac{ap_2 - b\cos(\theta_2-\theta_1)p_1}{ac - b^2\cos^2(\theta_2-\theta_1)} \tag{12}$$

Definicja pędu daje: $\dot p_i = \frac{d}{dt}\partial_{\dot\theta_i} L = \partial_{\theta_i} L$ (gdzie $L = E_K - E_P$). Stąd mamy równania:

$$\begin{aligned} \dot p_1 &= -\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_2-\theta_1)\dot\theta_1\dot\theta_2 - \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right) g l_1 \sin\theta_1 \\ &= -b\sin(\theta_2-\theta_1)\dot\theta_1\dot\theta_2 - p\sin\theta_1 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \dot p_2 &= -\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_2-\theta_1)\dot\theta_1\dot\theta_2 - m_2 g l_2 \sin\theta_2 \\ &= -b\sin(\theta_2-\theta_1)\dot\theta_1\dot\theta_2 - q\sin\theta_2 \end{aligned} \tag{14}$$

Równania (11..14) można zapisać jako funkcję przyporządkowującą każdemu punktowi przestrzeni fazowej czterowymiarowy wektor pochodnych (czyli definiującą pole wektorowe - vector field). Rozwiązanie równania różniczkowego oznacza znalezienie krzywej przechodzącej przez zdefiniowany punkt początkowy i w każdym swoim punkcie stycznej do pola wektorowego. Pole wektorowe definiuje funkcja:

```
m1=2
m2=0.5
l1=1
l2=0.6
g=9.81
td=50
ts=0.01

a=m1*l1**2/3+m2*l1**2
c=m2*l2**2/3
b=m2*l1*l2/2
p=(m1/2+m2)*g*l1
q=m2*l2*g/2

def vf(X,t=0):
```

```
dteta1 = (c*X[2]-b*X[3])/(a*c-b*b*(cos(X[1]-X[0]))**2)
dteta2 = (a*X[3]-b*X[2])/(a*c-b*b*(cos(X[1]-X[0]))**2)
dp1=-b*sin(X[1]-X[0])*dteta1*dteta2 - p*sin(X[0])
dp2=-b*sin(X[1]-X[0])*dteta1*dteta2 - q*sin(X[1])
return [dteta1, dteta2, dp1, dp2]
```

Funkcję tę podamy do scipy.integrate by dostać trajektorię.

Alternatywny układ równań: Mając Langrangian ($L = E_K - E_P$) możemy uzyskać dla niego dwa równania Eulera-Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2$$

Są to równania drugiego rzędu. Każde z nich możemy przekształcić na dwa równania pierwszego rzędu przez podstawienie $\omega_i = \dot{\theta}_i$.

Do zrobienia animacji wykorzystamy z modułu `Tkinter` klasy `Tk` i `Canvas` (metody: `pack,after,update,create_line,coords`)