1. Rozwiązać układ równań metodą eliminacji Gaussa (i metodą Kramera):

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 = 10 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 11 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = -3 \\ 4x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 10 \\ -2x_1 + 3x_3 - x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 + 2i \\ 2x_1 - i\ x_2 + i\ x_3 = 3 - i \\ x_1 - 2x_2 + i\ x_3 = 1 - 3i \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - i\ x_3 = -i \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 = -3 \\ x_2 - x_3 = 1 + 2i \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = -5 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 - 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

2. Obliczyć macierz odwrotną do podanych macierzy metodą eliminacji Gaussa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Rozwiązać układ równań metodą Kramera:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = i \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 - i \\ x_1 - 2ix_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ -9x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -6 \\ 6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$$

4. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x^4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x^4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = -7 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 5x_4 = -7 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ -3x_1 + x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -14 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 10 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 5 \\ 4x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -14 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i\ x_1 + x_2 - 2i\ x_3 = -3 \\ 3x_1 - 2i\ x_2 - x_3 = 4i \\ 2x_1 - i\ x_2 + x_3 = i \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + i\ x_2 - 3x_3 = 4 \\ i\ x_1 - x_2 + 4i\ x_3 = 0 \\ x_1 - 7x_3 = 4i \end{cases}$$

5. Odwzorowanie jest zadane macierzą:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

w bazie $\{e_1, e_2, e_3\}$. Znaleźć jego macierz w nowej bazie: $\{f_1 = 2e_1 - e_2, f_2 = e_1 - 2e_2, f_3 = e_1 + e_2 + e_3\}$.

6. Udowodnić, że macierz dowolnego odwzorowania zachowującego iloczyn skalarny musi mieć prostopadłe wiersze i prostopadłe kolumny.

7. Udowodnić, że jedynymi macierzami ortogonalnymi wymiaru 2×2 o dodatnim wyznaczniku są macierze obrotu.

8. Znaleźć wartości własne i wektory własne macierzy 2×2:

1.
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2.
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

3.
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

9. O jaki kąt należy obrócić układ współrzędnych by zdiagonalizować macierz

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

jakie współrzędne w nowej bazie będzie miał wektor

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}?$$

10. Zortogonalizować bazę metodą Gramma-Schmidta:

1.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

2.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

3. $1, x, x^2, x^3$ dla przestrzeni $W_{\mathbb{R}}(3)$ z iloczynem skalarnym: $a \cdot b = \int_{-1}^{1} ab\, dx$

4. $1, x, x^2, x^3$ dla przestrzeni $W_{\mathbb{R}}(3)$ z iloczynem skalarnym: $a \cdot b = \int_{0}^{1} ab\, dx$

11. Znaleźć wartości własne i wektory własne macierzy 3×3:

1.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

12. Znaleźć wartości własne i wektory własne macierzy 3×3 (przypadek z degeneracją widma):

1.

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} & \frac{3\sqrt{2}}{4} & \frac{2}{4} \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

4.

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

5.

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

6.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

7.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

8.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

9.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

10.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Zad 14. Jak wygląda postać Jordana macierzy obrotu rozmiaru 2×2? Jak wygląda macierz przejścia do nowej bazy?

Zad 15. Znaleźć wartości własne, wektory własne oraz wektory dołaczone macierzy:

1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

5.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jak wygląda macierz przejścia do bazy, w której zadana macierz ma postać Jordana?