1. Dla macierzy

$$a) \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b) \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c) \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d) \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1+2i \\ 1-2i & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1+2i \\ 1-2i & 2 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierze spełniające własność komutacji: $[A, X] = B$

2. Obliczyć pierwiaski z macierzy:

$$A = \sqrt{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \qquad A = \sqrt{\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}}$$

$$A = \sqrt{\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}}$$

3. Znaleźć wzór na n-tą potęgę macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) & 0 \\ \sin(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Pokazać, że:

1. Dla dowolnej macierzy kwadratowej A, macierz $A + A^T$ jest symetryczna, a $A - A^T$ jest antysymetryczna.
2. Dowolną macierz kwadratową można przedstawić jako sumę macierzy symetrycznej i antysymetrycznej.

Przedstawić macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

jako sumę macierzy symetrycznej i antysymetrycznej.

5. W zbiorze $V = (0, \infty)$ definiujemy działania:

$$\begin{aligned} &\oplus : a, b \to a \cdot b \\ &\lambda\odot : \lambda \odot a = a^{\lambda} \end{aligned}$$

Czy $(V, \oplus, \odot)$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$?

6. W zbiorze $\mathbb{R}^2$ definiujemy działania:

$$\begin{aligned} &(a, b) \oplus (c, d) = (a + b, c + d) \\ &\lambda \odot (a, b) = (\lambda a, -\lambda b) \end{aligned}$$

Czy $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$?

7. Które z poniższych zbiorów są przestrzeniami liniowymi?

1. liczby zespolone
2. pary liczb zespolonych wraz z działaniami:

$$\begin{aligned} &+ : (a, b), (c, d) \to (a + b, c + d) \\ &\lambda\cdot : \lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b) \end{aligned}$$

3. liczby zespolone o argumencie $\frac{\pi}{4}$
4. liczby zespolone o części rzeczywistej równej 0
5. liczby zespolone o części rzeczywistej równej 2
6. liczby zespolone o module mniejszym od 1
7. wektory w $\mathbb{R}^3$ równoległe do zadanego wektora $\vec{a}$
8. wektory w $\mathbb{R}^3$ prostopadłe do zadanego wektora $\vec{a}$
9. pary wektorów w $\mathbb{R}^3$ wraz z działaniami:

$$\begin{aligned} &+ : (a, b), (c, d) \to (a + b, c + d) \\ &\lambda\cdot : \lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b) \end{aligned}$$

10. pary wektorów do siebie równoległych wraz z działaniami:

$$\begin{aligned} &+ : (a, b), (c, d) \to (a + b, c + d) \\ &\lambda\cdot : \lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b) \end{aligned}$$

11. pary wektorów do siebie prostopadłych wraz z działaniami:

$$+ : (a, b), (c, d) \to (a + b, c + d)$$
$$\lambda\cdot : \lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$$

8. Które z poniższych zbiorów funkcji tworzą przestrzeń liniową?

1. wielomiany stopnia równego 2
2. wielomiany stopnia mniejszego równego 2
3. wielomiany stopnia mniejszego równego 2, dla których wartość w 0 wynosi 0.
4. wielomiany stopnia mniejszego równego 2, dla których wartość w 0 wynosi 1.
5. wielomiany dowolnego stopnia
6. funkcje wymierne (iloraz dwóch wielomianów)
7. funkcje przyjmujące wartość 0 na końcach przedziału $[-1, 1]$
8. funkcje przyjmujące wartości nieujemne na przedziale $[-1, 1]$
9. funkcje parzyste
10. funkcje nieparzyste

9. Które z poniższych zbiorów macierzy są przestrzeniami liniowymi?

1. macierze symetryczne rozmiaru 2×2
2. macierze antysymetryczne rozmiaru 3×3
3. macierze symetryczne rozmiaru 3×3, których wyrazy na przekątnej są równe.
4. macierze rozmiaru 3×4, których ostatnia kolumna zawiera same zera
5. macierze kwadratowe rozmiaru 2×2 o wyznaczniku równym 0.
6. macierze kwadratowe rozmiaru 2×2 o wyznaczniku równym 1.
7. macierze kwadratowe rozmiaru 3×3 o śladzie równym 0
   Ślad - suma wyrazów na przekątnej macierzy
8. macierze symetryczne rozmiaru 3×3 o śladzie równym 0
   Ślad - suma wyrazów na przekątnej macierzy

10. Które z poniższych zbiorów wektorów są liniowo niezależne:

1. $(1,1),\ (-1,2),\ (2,0)$
2. $(1,1,0),\ (0,-2,0),\ (-1,2,4)$
3. $(1,2,0),\ (1,0,-1),\ (1,4,1)$

11. Które z poniższych zbiorów wielomianów są liniowo niezależne:

1. $x^2+1,\ 2x-1,\ x^2-1$
2. $2x+1,\ x^2+2x,\ x$
3. $(x+1)^2,\ (x-1)^2,\ x$

12. Niech V będzie przestrzenią liniową nad pewnym ciałem liczbowym. Załóżmy że wektory $u_1,\ldots,u_n \in V$ są liniowo niezależne. Pokazać, że wektory:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_2 &= u_1 + u_2 \\ &\vdots \\ v_n &= u_1 + \ldots + u_n \end{aligned}$$

są liniowo niezależne.

13. Wykazać, że poniższe zbiory funkcji są liniowo niezależne nad $\mathbb{R}$:

1. $\{1, t, t^2\}$
2. $\{\sin t, \cos t\}$
3. $\{1, \sin t, \cos t\}$

14. Znaleźć bazy dla tych zbiorów z zadania 14, które są przestrzeniami liniowymi. Jakie są wymiary tych przestrzeni?

15. Korzystając ze wzoru definiującego wyznacznik macierzy:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

wyprowadzić wzory na wyznacznik macierzy rozmiaru 2×2 i 3×3.

16. Mamy dany równoległościan, którego jeden wierzchołek leży w początku układu współrzędnych, a wierzchołki A, B, C, które mają z nim wspólną krawędź mają współrzędne:

1. $A = [1,2,-1], B = [-1,0,2], C = [-1,1,-2]$

2. $A = [-2, 2, 1], B = [1, 1, 0], C = [1, 0, -1]$

Jaka jest objętość równoległościanu?

17. Wyznaczyć rząd macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & -9 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

18. Jaki jest wymiar podprzestrzeni napinanej przez wektory:

$$(1) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (2) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

19. Rozwiąż równanie macierzowe:

$$\text{a) rz} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & x \\ 3 & 0 & y \end{bmatrix} = 2 \qquad \text{b) rz} \begin{bmatrix} y & 1 & 3 \\ 2 & x & 4 \end{bmatrix} = 1$$

20. Które z poniższych odwzorowań są odwzorowaniami liniowymi:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = -3x$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = 2x - 3$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x, y) = 2x - 3y$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x, y) = 2x - 3y + 5$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x, y) = x + 2xy + y$
- $F : C^\infty[0, 1] \to C^\infty[0, 1] \quad F(f) = f'$
- $F : C^\infty[0, 1] \to C^\infty[0, 1] \quad F(f) = x \mapsto \int_0^x f(x)dx$
- $F : C^\infty[0, 1] \to \mathbb{R} \quad F(f) = \int_0^1 f(x)dx$
- $F : C^\infty([0, 1] \times [0, 1]) \to C^\infty([0, 1] \times [0, 1]) \quad F(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

21. Znaleźć macierz odwzorowania:

- obrót na płaszczyźnie o kąt α
- obrót w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ o kąt α wokół osi z.

22. Niech $W_{\mathbb{R}}(n)$ oznacza przestrzeń wielomianów stopnia mniejszego równego n o współczynnikach rzeczywistych. Znaleźć macierze odwzorowań:

- $\frac{d}{dx} : W_{\mathbb{R}}(3) \to W_{\mathbb{R}}(2)$, dla baz przestrzeni odpowiednio $\{1, x, x^2, x^3\}$ oraz $\{1, x, x^2\}$.
- $\frac{d}{dx} : W_{\mathbb{R}}(3) \to W_{\mathbb{R}}(3)$, dla baz przestrzeni odpowiednio $\{1, x, x^2, x^3\}$ oraz $\{1, x, x^2, x^3\}$.
- $\frac{d}{dx} : W_{\mathbb{R}}(3) \to W_{\mathbb{R}}(2)$, dla baz przestrzeni odpowiednio $\{1+x, 1-x, x^2+x^3, x^2-x^3\}$ oraz $\{1+x, x, x^2-x\}$.
- $\int_0^x dx : W_{\mathbb{R}}(2) \to W_{\mathbb{R}}(3)$, dla baz przestrzeni odpowiednio $\{1, x, x^2\}$ oraz $\{1, x, x^2, x^3\}$.
- $\int_0^x dx : W_{\mathbb{R}}(2) \to W_{\mathbb{R}}(3)$dla baz przestrzeni odpowiednio $\{1+x, 1-x, x^2+x^3, x^2-x^3\}$ oraz $\{1+x, x, x^2-x\}$.

23. Znaleźć macierz odwzorowania działającego z przestrzeni X wielomianów stopnia 2 dwóch zmiennych w tą samą przestrzeń. Za bazę przyjmijmy zbiór $\{1, x, y, x^2, y^2, xy\}$, a odwzorowaniem niech będzie:

- $\frac{\partial}{\partial x} : X \to X$
- $\frac{\partial}{\partial y} : X \to X$
- $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} : X \to X$
- $\frac{\partial^2}{\partial x^2} : X \to X$
- $\frac{\partial^2}{\partial y^2} : X \to X$

24. Znaleźć macierze odwzorowań z poprzedniego zadania dla bazy $\{1, x+y, x-y, x^2+y^2, x^2-y^2, xy\}$

25. Sprawdzić, że funkcje postaci $f(x) = \sum_{n=0}^{N}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ tworzą przestrzeń liniową. Jaki jest jej wymiar? Znaleźć macierze odwzorowań (w dowolnie wybranej bazie):

- $f(x) \to f'(x)$
- $f(x) \to \int_0^x f(x)dx$
- $f(x) \to \int_\pi^x f(x)dx$

- $f(x) \to \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$

26. Udowodnić, że odwzorowanie transpozycji $\cdot^T$ działające w przestrzeni $M_{\mathbb{R}}(2,2)$ (macierzy rozmiaru 2×2 o wyrazach rzeczywistych) jest odwzorowaniem liniowym. Dla dowolnie wybranej bazy w tej przestrzeni znaleźć macierz odwzorowania.

27. Operator symetryzacji S i antysymetryzacji A działające w przestrzeni przestrzeni $M_{\mathbb{R}}(2,2)$ dane są wzorami:

$$S(X) = \tfrac{X+X^T}{2} \qquad A(X) = \tfrac{X-X^T}{2}$$

są odwzorowaniami liniowymi. Znaleźć macierze tych odwzorowań w dowolnej bazie przestrzeni $M_{\mathbb{R}}(2,2)$.

Zad 5. Udowodnić, że jądro i obraz odwzorowania są podprzestrzeniami liniowymi.

Zad 6. Wyznaczyć jądro i obraz odwzorowania zadanego macierzą:

1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

Zad 7. Znaleźć jądro i obraz odwzorowania:

- $\frac{d}{dx} : W_{\mathbb{R}}(3) \to W_{\mathbb{R}}(3)$
- $\frac{d}{dx} : W_{\mathbb{R}}(3) \to W_{\mathbb{R}}(2)$
- $\int_0^x dx : W_{\mathbb{R}}(2) \to W_{\mathbb{R}}(3)$

Zad 8. Znaleźć obraz i jądro odwzorowania:

- $\cdot^T : M_{\mathbb{R}}(2,2) \to M_{\mathbb{R}}(2,2)$
- $S : M_{\mathbb{R}}(2,2) \to M_{\mathbb{R}}(2,2)$
- $A : M_{\mathbb{R}}(2,2) \to M_{\mathbb{R}}(2,2)$

Zad 8. Podać przykład endomorfizmu $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dla którego jądro jest równe obrazowi. Udowodnić, że kwadrat każdego odwzorowania (w przestrzeni o dowolnym wymiarze) o tej własności jest równy zero.