Blok II: Własności funkcji

II.1 Dane są funkcje określone tabelami. Dla każdej funkcji podaj jej miejsca zerowe (o ile istnieją) oraz współrzędne punktu, w którym wykres przecina oś OY.

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	1	0	1	1	3	1

b)

x	-4	-3	-1	0	2	4	5
$f(x)$	4	4	4	4	4	4	4

c)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

II.2 Dany jest zbiór $X = \{-5, -2, 0, 2, 5\}$. Podaj za pomocą tabelek funkcje, z których każda odwzorowuje zbiór X w zbiór X oraz

a) jest malejąca

b) jest rosnąca

c) przyjmuje tylko wartości ujemne

d) ma jedno miejsce zerowe: 5

e) jest parzysta

f) jest nieparzysta

g) jest różnowartościowa

II.3 Dana jest funkcja określona wzorem:

a) $f(x) = 2x + 1$; oblicz: $f(0)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$,$f\left(-\frac{1}{2}\right)$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$; oblicz (jeżeli można): $f(0)$, $f(-1)$, $f(1)$

c) $f(x) = 4^x + 2$; oblicz: $f(0)$, $f(2)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(-\frac{1}{2})$

d) $f(x) = \dfrac{1}{|x-2| - 5}$; oblicz (jeżeli można): $f(3)$, $f(0)$, $f(7)$

e) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; oblicz (jeżeli można): $f(-1)$, $f(1)$, $f(\sqrt{2} - 1)$, $f(\sqrt{2} + 1)$, $f(1/x)$.

f) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$; oblicz (jeżeli można): $f(0)$, $f(1)$, $f(-x)$, $f(1/x)$.

II.4* Znajdź $f(x)$, jeśli $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = x^2$.

II.5 Sprawdź czy punkty P_1, P_2, P_3 należą do wykresu funkcji:

a) $f(x) = x + 3$, $x \in \mathbb{N}$, $P_1 = (2, -5)$, $P_2 = (-1, 2)$, $P_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{9}\right)$

b) $f(x) = x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$, $P_1 = (\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$, $P_2 = (-1, 0)$, $P_3 = (3, 12)$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $P_1 = (2, 0)$, $P_2 = (1, -1)$, $P_3 = (\sqrt{5}, 2 + \sqrt{5})$

II.6 Wyznacz dziedziny naturalne następujących funkcji:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x-1)(x+4)}$

c) $f(x) = \dfrac{3x+1}{(x+2)(x-3)}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{x^2 + 2x + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 + x - 12}$

f) $f(x) = \sqrt{1-x} + \dfrac{2}{x}$

g) $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x-1}$

h) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$

i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}}$

j) $f(x) = \sqrt{|x-5| + 1}$

k) $f(x) = \sqrt{-6 - |x+1|}$

l) $f(x) = \sqrt{2|x+2| - 6}$

m) $f(x) = \dfrac{x}{|x| - 1}$

n*) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3|x-1| - 6}{5 - |x|}}$

II.7* Wyznacz zbiór wartości funkcji:

a) $f(x) = 3x - 5, \quad x \in [-7, -2)$,

b) $f(x) = x^2 + 1, \quad x \in \{0, 1, 4, 6\}$,

c) $f(x) = x^2 + 2, \quad x \in [-3, 3]$,

d) $f(x) = |x| - 1, \quad x \in [-2, -1] \cup [0, 1]$,

e) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

f) $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

II.8 Dla każdej z podanych funkcji sprawdź, czy podane obok liczby należą do zbioru jej wartości:

a) $f(x) = x + 5$, $x \in \mathbb{R}$; liczby 2, $\frac{1}{2}$, 3, $-\frac{2}{5}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; liczby 0, -1, 6

II.9 Naszkicuj wykres funkcji $f : [0, 8] \longrightarrow [0, 6]$, która ma następujące własności:

a) f odwzorowuje przedział $[0, 8]$ na przedział $[0, 6]$,

b) f jest malejąca w przedziale $[0, 3]$, stała w przedziale $(3, 5)$ i rosnąca w przedziale $[5, 8]$,

c) $f(8) = 3$. Czy istnieje tylko jedna taka funkcja?

II.10 Podaj przykład dowolnej funkcji wymiernej, której dziedziną jest zbiór:

a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

c) $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

d) $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 0\}$

II.11 Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$, a jej miejscami zerowymi są liczby 5 i 2. Podaj przykład funkcji wymiernej, która posiada takie własności.

II.12 Dziedziną funkcji f jest zbiór $[-4; +\infty)$, a jej miejscami zerowymi są liczby -3, -1 i 2. Jakim wzorem może być opisana ta funkcja?

II.13 Wyznacz miejsca zerowe funkcji (o ile istnieją):

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $f(x) = |x + 2| - 5$

c) $f(x) = |2x - 1| - |x - 3|$

d) $f(x) = \dfrac{\frac{3}{4}x - 3}{x^2 - 16}$

e) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{\sqrt{x - 2}}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9}$

g) $f(x) = \dfrac{|x| - 2}{(x + 2)(x - 1)}$

h) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{|x - 1|}$

i) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x - 1}{\sqrt{|x| - 2}}$

j) $f(x) = \dfrac{|x + 2| - 2}{x^3 - 9x}$

k) $f(x) = \dfrac{x^4 - 6x^2}{|x|}$

l) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{\sqrt{3 - x}}$

m) $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 9}{\sqrt{4 - |x + 5|}}$

n) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

o) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

II.14 Dla jakich wartości parametru m funkcja $y = (2m - 3)x + 1$ jest:

a) rosnąca

b) malejąca

c) stała

II.15 Wyznacz dla jakich x wartości funkcji $y = 2x - 5$ są:

a) dodatnie

b) ujemne

c) większe od 1

d) mniejsze od 3

II.16 Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji:

a) $f(x) = -2x + 4$, gdy $x \in [-7, 5]$,

b) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$, gdy $x \in [-1, 2]$,

c) $f(x) = 2 - |x - 1|$, gdy $x \in [-1, 1] \cup [2, 4]$,

d) $f(x) = 2 - x^2$, gdy $x \in [0, 3]$,

e*) $f(x) = x^2 - x^4$, gdy $x \in [0, 1]$,

f*) $f(x) = |x|\sqrt{1 - x^2}$, gdy $x \in [-1, 1]$.

II.17 Wykaż, że poniższe funkcje są różnowartościowe w swoich dziedzinach:

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = -\sqrt{2}x + 3$

c) $f(x) = \sqrt{5x}$

d) $f(x) = -5\sqrt{x - 3}$

e) $y = \dfrac{1}{x}$

f) $y = \dfrac{3 - x}{x + 1}$

II.18 Napisz wzór określający funkcję $f^{-1}(x)$ — odwrotną do funkcji $f(x)$:

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = 2x$

c) $f(x) = -x + 1$

d) $f(x) = 1 - 4x$

e) $f(x) = x^2,\ x \in (-\infty, 0]$

II.19* Wiedząc, że poniżej podane funkcje są różnowartościowe wyznacz do nich funkcje odwrotne:

a) $f : [2; +\infty) \to [-1; +\infty);\ f(x) = x^2 - 4x + 3$

b) $f : [0; +\infty) \to (0; 1];\ f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

II.20 Wykazać, że funkcja:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$, gdzie $x \in (0, +\infty)$ jest malejąca,

b) $f(x) = \dfrac{4}{3x}$, gdzie $x \in (0, +\infty)$ jest malejąca,

c) $f(x) = -\dfrac{5}{x}$, gdzie $x \in (0, +\infty)$ jest rosnąca,

d) $f(x) = -\dfrac{7}{x}$, gdzie $x \in (0, +\infty)$ jest rosnąca,

e) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$, gdzie $x \in [0, +\infty)$ jest rosnąca,

f) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 1}$, gdzie $x \in (1, +\infty)$ jest malejąca,

g) $f(x) = \sqrt{3x}$ jest rosnąca w całej dziedzinie,

h) $f(x) = \sqrt{5 - x}$ jest malejąca w swojej dziedzinie.

II.21 Zbadaj monotoniczność funkcji w zbiorze $\mathbb{R}$

a) $f(x) = -2009x + \sqrt{2009}$,

b) $f(x) = 2010x - \sqrt{2010}$,

c) $f(x) = -\frac{1}{4}|x| + 7$,

d) $f(x) = -6|x| - 7$, gdy $x < 0$.

II.22 Zbadać parzystość następujących funkcji:

a) $f(x) = 2x - 6$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 5$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

d) $f(x) = \frac{2}{x}$

e) $f(x) = \frac{2}{|x|}$

f) $f(x) = \frac{|x|}{x^3}$

g) $f(x) = \frac{3x^4}{(x-2)(x+1)}$

h) $f(x) = \frac{|x|}{|x^3|+1}$

i) $f(x) = x|x|$

j) $f(x) = \sqrt{2x} - \sqrt{-2x}$

II.23 Naszkicuj wykres funkcji $y = 2x$, a następnie przekształcając go odpowiednio naszkicuj wykresy funkcji:

a) $y = 2x - 4$

b) $y = 2x + 1$

c) $y = -2x$

d) $y = |2x|$

II.24 Przekształcając odpowiednio wykres funkcji $f(x) = x^2$, naszkicuj wykres:

a) $g(x) = -x^2$

b) $g(x) = x^2 + 1$

c) $g(x) = (x-2)^2$

d) $g(x) = (x+1)^2$

e) $g(x) = -(x-3)^2$

f) $g(x) = |(x-1)^2 - 1|$

g) $g(x) = |-x^2 + 1|$

II.25 Przekształcając odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$, naszkicuj wykres:

a) $g(x) = -\sqrt{x}$

b) $g(x) = \sqrt{-x}$

c) $g(x) = |\sqrt{x}|$

d) $g(x) = \sqrt{|x|}$

e) $g(x) = \sqrt{x-2} + 1$

f) $g(x) = -\sqrt{-x}$

g) $g(x) = \sqrt{2x}$

h) $g(x) = 2\sqrt{x}$

II.26 Niech T oznacza okres zasadniczy funkcji. Sporządzić wykresy funkcji okresowych:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^2$, dla $x \in [-\pi, \pi]$ oraz $T = 2\pi$

b) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2$, dla $x \in [0, 1]$ oraz $T = 1$

c) $f(x) = 3x$, dla $x \in [-1, 1]$ oraz $T = 2$

d) $f(x) = |x|$, dla $x \in [-1, 1]$ oraz $T = 2$

II.27* Wyznaczyć $f(g(x))$, $f(f(x))$, $g(f(x))$, $g(g(x))$, jeśli

a) $f(x) = 1 - 2x$ i $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ i $g(x) = \operatorname{sgn} x$.

II.28* Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{x-1}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Podać dziedzinę i wzór funkcji

a) $f(f(x))$

b) $f(f(f(x)))$

II.29 Przekształcając odpowiednio wykres funkcji $y = f(x)$ przedstawionej na rysunku **f1**: naszkicuj wykres:

a) $y = -f(x)$

b) $y = f(-x)$

c) $y = f(x-1)$

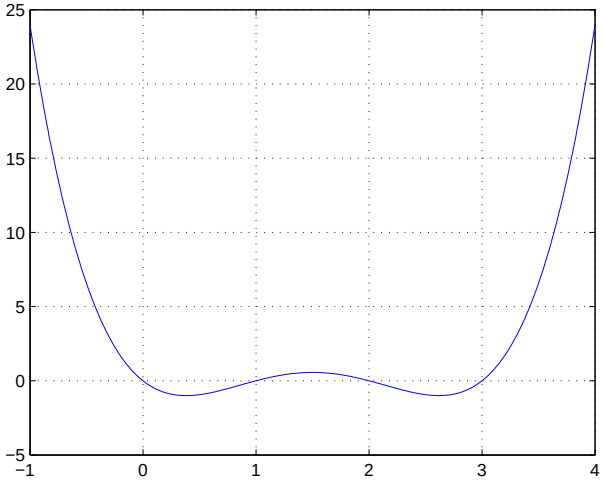
d) $y = f(x+2) + 3$

e) $y = f(|x|)$

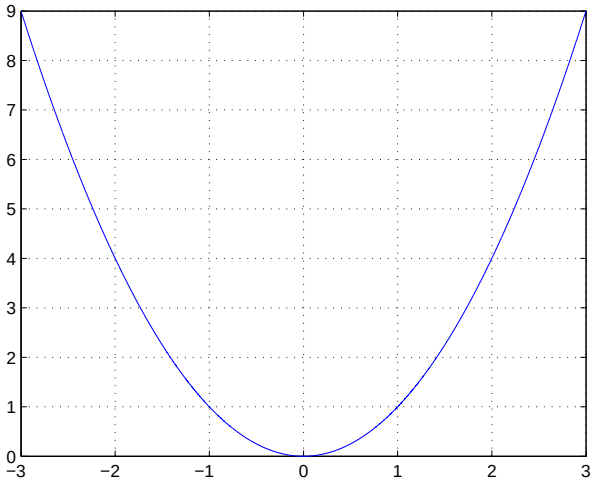
f) $y = -f(|x|)$

g) $y = |f(x+1.5)|$

II.30 Przekształcając odpowiednio wykres funkcji $y = f(x)$ przedstawionej na rysunku **f2**: : naszkicuj wykres:



Rysunek 1:



Rysunek 2:

a) $y = -f(x)$

b) $y = f(-x)$

c) $y = f(x-2)$

d) $y = f(x+3) - 1$

e) $y = f(|x|)$

f) $y = -f(|x|)$

g) $y = |f(x+4)|$

II.31 Przekształcając odpowiednio wykres funkcji $y = f(x)$ przedstawionej na rysunku **f3**: naszkicuj wykres:

a) $y = -f(x)$

b) $y = f(-x)$

c) $y = f(x+3)$

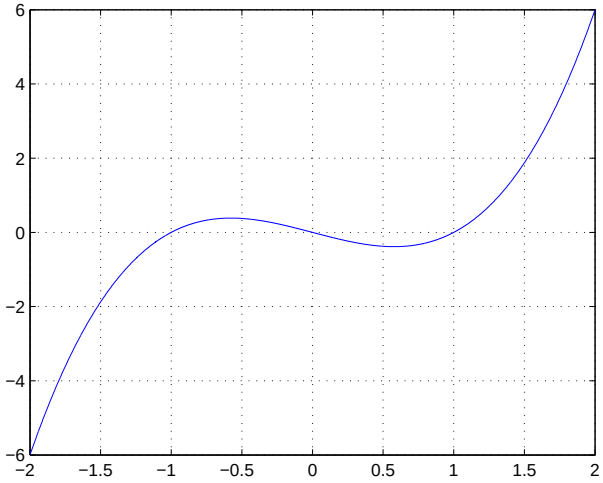
d) $y = f(x+5) - 2$

e) $y = f(|x|)$

f) $y = -f(|x|)$

g) $y = |f(x+2)|$

II.32 Sporządź wykresy funkcji:



Rysunek 3:

a) $f(x) = -\dfrac{2}{x-1}$,

b) $f(x) = \dfrac{3}{2x-1}$,

c) $f(x) = \sqrt{|x-4|}$,

d) $f(x) = \sqrt{|x|-4}$,

e) $f(x) = x - 6|x|$

f) $f(x) = |x+1| - |x-1|$

g) $f(x) = \left|\dfrac{1}{4-x} + 2\right|$,

h) $f(x) = ||x^2-4|-4|$,

i) $f(x) = \max\{|x|, 4\}$,

j) $f(x) = \min\left\{\dfrac{2}{|x|}, 2\right\}$.

Odpowiedzi

zII.1: a) miejsce zerowe: (-1), współrzędne punktu przecięcia z osią OY: $(0,1)$ b) miejsce zerowe: nie ma; współrzędne punktu przecięcia z osią OY: $(0,4)$ c) miejsce zerowe: 0; współrzędne punktu przecięcia z osią OY: $(0,0)$

zII.2: a) $f(X) = \{5,2,0,-2,-5\}$, 1 możliwość b) $f(X) = \{-5,-2,0,2,5\}$, 1 możliwość c) $f(X) = \{-5,-2,-5,-2,-5\}$, 52 możliwości d) $f(X) = \{-5,5,2,-2,0\}$, 44 możliwości e) $f(X) = \{5,2,0,2,5\}$, 53 możliwości f) $f(X) = \{2,5,0,-5,-2\}$, 52 możliwości g) $f(X) = \{2,-5,5,0,-2\}$, 5! możliwości

zII.3: a) $f(0) = 1$, $f(\frac{3}{2}) = 4$, $f(-\frac{1}{2}) = 0$ b) $f(0) = -1$, (-1) - nie należy do dziedziny funkcji, 1 - nie należy do dziedziny funkcji. c) $f(0) = 3$, $f(2) = 18$, $f(\frac{1}{2}) = 4$, $f(-\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{2}$ d) $f(3) = -\frac{1}{4}$, $f(0) = -\frac{1}{3}$, 7 - nie należy do dziedziny funkcji. e) $f(-1) = -1-1 = -2$, $f(1) = 1+1 = 2$, $f(\sqrt{2}-1) = 2\sqrt{2}$, $f(\sqrt{2}+1) = 2\sqrt{2}$, $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} + x$ f) $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(-x) = \frac{1+x}{1-x}$, $f(\frac{1}{x}) = -\frac{1-x}{1+x}$

zII.4: $f(x) = \frac{x2}{1-x2}$

zII.5: a) $P_1 = (2,-5)$ - nie, $P_2 = (-1,2)$ - tak, $P_3 = (\frac{1}{2}, \frac{7}{9})$ - nie. b) $P_1 = (\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ - tak, $P_2 = (-1,0)$ - nie, $P_3 = (3,12)$ - tak. c) $P_1 = (2,0)$ - nie, $P_2 = (1,-1)$ - tak, $P_3 = (\sqrt{5}, 2+\sqrt{5})$ - tak.

zII.6: a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{-4,1\}$ c) $\mathbb{R} \setminus \{-2,3\}$ d) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e) $\mathbb{R} \setminus \{-4,3\}$ f) $(=\infty,1] \setminus \{0\}$ g) $\{1\}$ h) $\mathbb{R} \setminus (-5,3)$ i) $(2,3]$ j) $\mathbb{R}$ k) $\emptyset$ l) $\mathbb{R} \setminus (-5,1)$ m) $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ n) $(-5,-1] \cup [3,5)$

zII.7: a) $[-26,-11)$ b) $1,2,17,37$ c) $[2,11]$ d) $[-1,2]$ e) $\{-1,1\}$ f) $(0,\infty)$

zII.8: a) 2 - tak, $\frac{1}{2}$ - tak, 3 - tak, $-\frac{2}{5}$ - tak b) 0 - nie, (-1) - tak, 6 - tak.

zII.9: $f(x) = x/2 + 11/2 - |x-3| - |x/2 - 5/2|$ wśród funkcji kawałkami liniowych jest to jedyne rozwiązanie

zII.10: a) $\frac{1}{x-1}$ b) $\frac{1}{x-\frac{1}{2}}$ c) $\frac{1}{x(x-1)}$ d) $\frac{1}{x(x-1)(x-2)}$

zII.11: $f(x) = \frac{(x-2)(x-5)}{(x+2)(x-3)}$

zII.12: np. $f(x) = \sqrt{x+4}(x+3)(x+1)(x-2)$

zII.13: a) $x = -3/2$ b) $x = -7 \ \vee \ x = 3$ c) $x = -2 \ \vee \ x = \frac{4}{3}$ d) brak e) brak f) $x = -3$ g) $x = 2$ h) $x = 0 \ \vee \ x = 6$ i) brak j) $x = -4$ k) $x = \pm\sqrt{6}$ l) $x = 0 \ \vee \ x = 1$ m) $x = -3$ n) $x = 1 \ \vee \ x = -1$ o) $x = 1 \ \vee \ x = -1$

zII.14: a) $m > 3/2$ b) $m < 3/2$ c) $m = 3/2$

zII.15: a) $x > 5/2$ b) $x < 5/2$ c) $x > 3$ d) $x < 4$

zII.16: a) min -6, maks 18 b) min $-3/2$, maks 0 c) min -1, maks 2 d) min -7, maks 2 e) min 0, maks $1/4$ f) min 0, maks $1/2$

zII.18: a) $f^{-1}(y) = y$ b) $f^{-1}(y) = 1/2y$ c) $f^{-1}(y) = 1 - y$ d) $f^{-1}(y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}y$ e) $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$

zII.19: a) $f^{-1}(y) = 2 + \sqrt{1+y}$ b) $x = sqrt\frac{1}{y} - 1$

zII.21: a) malejąca b) rosnąca c) malejąca dla $x \geqslant 0$, rosnąca dla $x \leqslant 0$ d) rosnąca

zII.22: a) brak parzystości b) parzysta c) parzysta d) nieparzysta e) parzysta f) nieparzysta g) brak parzystości h) parzysta i) nieparzysta j) w swojej dziedzinie zarówno parzysta jak i nieparzysta

zII.27: a) $f(g(x)) = -x - 1$, $f(f(x)) = 4x - 1$, $g(f(x)) = \frac{3}{2} - x$, $g(g(x)) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ b) $f(g(x)) = 1$ dla $x \neq 0$, 0 poza dziedziną, $f(f(x)) = x4$, $g(f(x)) = 1$ dla $x \neq 0$, 0 dla $x = 0$, $g(g(x)) = \mathrm{sgn}(x)$.

zII.28: a) $f(f(x)) = \frac{x-1}{2-x}$, $x \neq 2$ b) $f(f(f(x))) = \frac{2-x}{2x-3}$, $x \neq \frac{3}{2}$