Stany splątane

Kryterium częściowej transpozycji

W przypadku układów złożonych z dwóch lub więcej podukładów wyróżnia się klasę stanów separowalnych

Stany czyste Projektor na wektor produktowy jest stanem **separowalnym**, projektor na wektor nieproduktowy jest stanem **splątanym**.

Stany mieszane Stan mieszany jest separowalny, jeżeli da się przedstawić jako kombinacja stanów czystych separowalnych.

Głównym kryterium koniecznym sprawdzania separowalności jest kryterium częsciowej transpozycji:

Jeżeli stan jest separowalny, jego macierz gęstości po częściowej transpozycji będzie półdodatniookreślona.

Dla wymiarów 2×2 i 2×3 jest również warunkiem wystarczającym. W innych wymiarach istnieją stany splątane o dodatniej częściowej transpozycji - stany ze splątaniem związanym.

1. *Sprawdź separowalność stanów:*

- $\rho = \begin{bmatrix} 0.75 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$

- $\rho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$

2. *Zapiszmy ogólną postać stanu, którego bazą własna jest bazą Bella:*

$$\Psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$
$$\Psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$
$$\Psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$
$$\Psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

a wartościami własnymi $\lambda_1, \ldots \lambda_4$. Stan taki jest mieszaniną stanów maksymalnie splątanych (projektory na stany Bella). Dla jakich wartości własnych stany takie są separowalne?

Kryterium odwzorowań dodatnich

Jeżeli odwzorowanie Φ jest dodatnie, ale nie kompletnie dodatnie, to odzworowanie $I \otimes \Phi$ jest dodatnie na stanach separowalnych, ale w działaniu na pewien stan splątany ρ może dać operator niedodatnio określony. Mówimy wtedy, że odwzorowanie Φ wykrywa splątanie stanu ρ.

Przykładem takiego odwzorowania była transpozycja. W wymiarach innych niż 2×2 i 2×3 transpozycja nie wykrywa wszystkich stanów splątanych

- istnieją splątane stany PPT (o dodatniej częściowej transpozycji). Do wykrycia takich stanów potrzebujemy innych odzworowań.

Odwzorowanie Choi $Ch : \mathcal{B}_+(\mathbb{C}^3) \to \mathcal{B}_+(\mathbb{C}^3)$ w następujący sposób:

$$Ch\,(\rho) = \begin{bmatrix} 2\rho_{11} + \rho_{33} & & \\ & 2\rho_{22} + \rho_{11} & \\ & & 2\rho_{33} + \rho_{22} \end{bmatrix} - \rho \tag{1}$$

3. *Za pomocą odwzorowania Choi zbadaj splątanie stanu dwóch qutritów:*

$$\rho_\epsilon = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & & & & 1 & & & & 1 \\ & \epsilon & & & & & & & \\ & & \frac{1}{\epsilon} & & & & & & \\ \hline & & & \frac{1}{\epsilon} & & & & & \\ 1 & & & & 1 & & & & 1 \\ & & & & & \epsilon & & & \\ \hline & & & & & & \epsilon & & \\ & & & & & & & \frac{1}{\epsilon} & \\ 1 & & & & 1 & & & & 1 \end{array}\right] \tag{2}$$

Pokaż, że stan jest jest stanem PPT.

Kryterium realignmentu

W kryterium tym przepisujemy kolejne bloki macierzy w kolejnych rzędach nowej macierzy. Liczymy sumę wartości singularnych uzyskanej macierzy (w ogólności prostokątnej). Jeżeli stan jest separowalny, to suma musi być $\leqslant 1$.

4. *Sprawdź przy pomocy kryterium realignmentu separowalność stanu (2) dla:*

- $\epsilon = 2$
- $\epsilon = 3$

Świadkowie splątania

Świadkiem splątania nazywamy obserwablę hermitowską W na układzie złożonym, która na wszystkich stanach produktowych ma nieujemną wartość oczekiwaną. Obserwabla taka nie musi być dodatnio określona, stany na których ma ona ujemną wartość oczekiwaną są splątane i są nazywane stanami splątanymi wykrywanymi przez W.

5. *Pokaż, że obserwabla na układzie dwóch qubitów:*

$$W_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ 1 & & & \end{array}\right]$$

jest świadkiem splątania.

W ogólnym przypadku udowodnienie że obserwabla jest świadkiem jest trudnym problemem.

6. *Który ze stanów splątanych (NPT):*

$$\rho_1 = \left[\begin{array}{cc} 0.5 & -0.25 \\ -0.25 & 0.5 \end{array}\right] \qquad \rho_2 = \left[\begin{array}{cc} 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 \end{array}\right]$$

Jest wykrywany przez świadka W_1?

7. *Pokazać, że jeżeli odwzorowanie dodatnie Φ wykrywa splątanie stanu ρ, to świadkiem wykrywającym splątanie stanu ρ będzie $(I \otimes \Phi^{\#})|\Psi\rangle\langle\Psi$, gdzie:*

1. *$\Phi^{\#}$ oznacza sprzężenie odwzorowania Φ w sensie iloczynu skalarnego Hilberta-Schmidta.*
2. *Ψ jest wektorem własnym przy ujemnej wartości własnej macierzy $(I \otimes \Phi)\rho$.*

8. *Pokazać, że transpozycja jest samosprzeżona w iloczynie HS*

9. *Znajdź świadka splątania dla stanu dwóch qubitów $\rho = \frac{1}{2}(|01 + 10\rangle\langle 01 + 10|)$.*

Odp. $W = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| - \langle 10||01\rangle - \langle 01||10\rangle)$.

10. *Dla odwzorowania Choi (1) znajdź odwzorowanie sprzężone w iloczynie HS.*

11. *Dla stanu splątanego PPT (2), którego splątanie wykrywa odwzorowanie Choi, znajdź wykrywającego go świadka splątania.*

Odpowiedź:

$$W = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & & & -1 & & -1 \\ & 1 & & & & \\ \hline & & 1 & & & \\ -1 & & & 1 & & -1 \\ \hline & & & & 1 & \\ -1 & & & -1 & & 1 \end{array}\right]$$

12. *Dla świadków:*

- $W = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| - |10\rangle\langle 01| - |01\rangle\langle 10|)$
- $W = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| + |10\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10|)$
- $W = \frac{1}{2}(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| - |00\rangle\langle 11| - |11\rangle\langle 00|)$
- $W = \frac{1}{2}(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00|)$

znajdź rozkład na kombinację iloczynów tensorowych jednoqubitowych operatorów spinowych i identyczności.

Korelacje i nierówności Bella

Kowariancją dwóch serii pomiarowych jest wielkość: $C_{xy} = \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{x})$. Można to traktować jako iloczyn skalarny wektora odchyleń od średniej. W szczególności $C_{xx} = \sigma_x^2$ i jest to wariancja, czyli kwadrat długości wektora odchyleń od średniej.

Jeżeli mamy wiele serii, ich kowariancje tworzą macierz zwaną macierzą kowariancji. Na diagonali tej macierzy stoją wariancje zmiennych. Ponieważ kowariancje są iloczynami skalarnymi, jest to macierz Gramma.

13. *Pokaż, że macierz kowariancji jest dodatnio określona.*

Korelacją dwóch zmiennych nazywamy ich kowariancję podzieloną przez iloczyn pierwiastków ich wariancji. Jest to zatem cosinus kąta pomiędzy wektorami odchyleń. Mnożąc obustronnie macierz kowariancji przez macierz diagonalną o wyrazach $1/\sqrt{\sigma_i^2}$ otrzymamy macierz korelacji. Geometrycznie jest to macierz cosinusów kątów pomiędzy wektorami odchyleń od średnich.

14. *Pokaż, że macierz korelacji jest dodatnio określona.*

Od tej pory zajmiemy się przypadkiem trzech serii pomiarowych i ograniczeniami, które muszą spełniać ich wzajemne korelacje. Dla prostoty rozważań ograniczymy się do zmiennych losowych a, b, c dla których:

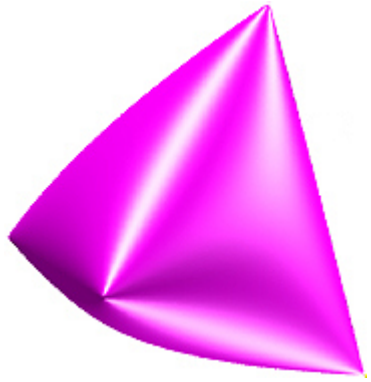
- wartość średnia jest zero ($\Rightarrow$ kowariancja jest równa wartości średniej iloczynu)
- zmienna przyjmuje wartości ± 1 ($\Rightarrow$ wariancje są równe 1 i korelacja jest równa kowariancji)

Pierwszym ograniczeniem, jest że każda z korelacji przyjmuje wartości z przedziału $[-1, 1]$, zatem zbiór możliwych korelacji trzech zmiennych jest podzbiorem sześcianu.

Drugim ograniczeniem jest dodatnia określoność macierzy korelacji.

15. *Znajdź ograniczenie na korelacje x, y, z trzech zmiennych losowych*

Punkty (x, y, z) spełniające te ograniczenie tworzą podzbiór sześcianu zwany eliptopem:



Eliptop to napompowany czworościan - pompujemy tak długo, aż krawędzie staną się płaskie.

Kolejne ograniczenie wprowadza twierdzenie Bassa:

$$1 + \mathbb{E}(ab) + \mathbb{E}(bc) + \mathbb{E}(ca) \geqslant 0$$
$$1 + \mathbb{E}(ab) - \mathbb{E}(bc) - \mathbb{E}(ca) \geqslant 0$$
$$1 - \mathbb{E}(ab) + \mathbb{E}(bc) - \mathbb{E}(ca) \geqslant 0$$
$$1 - \mathbb{E}(ab) - \mathbb{E}(bc) + \mathbb{E}(ca) \geqslant 0$$

Czyli punkty reprezentujące korelacje powinny siedzieć w czworościanie, który jest podzbiorem sześcianu. To ostatnie ograniczenie jest łamane przez korelacje w fizyce kwantowej. Niekomutatywny rachunek prawdopodobieństwa nie ma własności kołgomorowskości - może nie istnieć jedna przestrzeń probabilistyczna reprezentująca wyniki wszystkich zdarzeń.

16. *Firma badająca rynek wzięła pieniądze za sprawdzenie na grupie ludzi korelacji pomiędzy:*

- *posiadaniem telefonu*
- *posiadaniem laptopa*
- *posiadaniem tabletu*

Przedstawiła następujące korelacje:

- *telefon-laptop = 0.91*
- *laptop-tablet = -0.82*
- *tablet-telefon = 0.69*

Czy wywiązała się ze swojego zadania uczciwie?

Mierzymy w odległych stacjach A i B obserwable $a_{1,2}$ i $b_{1,2}$ na parach cząstek z emitowanych z jednego źródła. Ustawienia $1, 2$ w obu stacjach generowane są losowo i niezależnie (mamy to zagwarantowane przez brak nadświetlnej komunikacji). Podczas emisji ustala się stan cząstki, który następnie będzie mierzony w obu stacjach. Niech λ oznacza zbiór parameterów określających mierzony stan cząstki. Wszystkie możliwe wartości λ tworzą przestrzeń probabilistyczną Λ z miarą μdla tego doświadczenia.

Wartość oczekiwana iloczynu obserwabli: $\mathbb{E}(a_i b_j) = \int_\Lambda a(\lambda)b(\lambda)d\mu(\lambda)$.

Obliczamy $\mathbb{E}(a_1b_1) - \mathbb{E}(a_1b_2)$:

$$\mathbb{E}(a_1b_1) - \mathbb{E}(a_1b_2) = \int_\Lambda (a_1b_1 - a_1b_2)d\mu$$
$$= \int_\Lambda a_1b_1(1 \pm a_2b_2)d\mu - \int_\Lambda a_1b_2(1 \pm a_2b_1)d\mu$$

Korzystamy z nierówności trójkąta. Następnie szacujemy z góry obie wartości bezwzględne po prawej stronie wchodząc z wartością bezwzględną pod całkę, a następnie szacując AB z góry przez 1. Potem w.bezwzględne można pominąć bo wyrażenia podcałkowe są dodatnie:

$$|\mathbb{E}(a_1b_1) - \mathbb{E}(a_1b_2)| \leqslant \int_\Lambda a_1b_1(1 \pm a_2b_2)d\mu$$
$$- \int_\Lambda a_1b_2(1 \pm a_2b_1)d\mu = 2 \pm (\mathbb{E}(a_2b_2) + \mathbb{E}(a_2b_1))$$

Otrzymujemy w wyniku nierówność CHSH:

$$-2 \leqslant \mathbb{E}(a_1, b_1) - \mathbb{E}(a_1, b_2) + \mathbb{E}(a_2, b_1) + \mathbb{E}(a_2, b_2) \leqslant 2 \tag{3}$$

17. *Biorąc dwie z czterech zmiennych losowych za równe sobie, wyprowadź z nierówności CHSH nierówności z twierdzenia Bassa.*

18. *Niech stanem dwóch cząstek będzie* $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$. *Niech mierzonymi obserwablami po obu stronach będą operatory spinowe w kierunach* α_1, α_2 *i* β_1, β_2 *w płaszczyźnie XZ. Jak zależy wyrażenie (3) od kątów? Dla jakich kątów jest maksymalnie łamane?*

Protokoły kwantowe

0.1 NMR

19. *Dokonujemy na układzie kwantowym transformacji zależnej od czasu:* $\Psi_r(t) = U(t)\Psi(t)$. *Jak wygląda Hamiltonian w nowym układzie?*

Wskazówka: W równaniu Schrödingera na Ψ przejść do Ψ_r. Odp: $H_r(t) = UHU^{-1} + i\hbar(\partial_t U)U^{-1}$.

Moment magnetyczny umieszczamy w stałym polu magnetycznym B_z wzdłuż osi z. Dodatkowo włączamy pole magnetyczne wzdłuż osi x oscylujące z częstością ω o amplitudzie B_x.

20. *Jak wygląda Hamiltonian układu?*

Odp:

$$H = -g\vec{B} \cdot \vec{S} = -g\frac{\hbar}{2}(B_z\sigma_z + \cos(\omega t)B_x\sigma_x). \tag{4}$$

21. *Jaka jest ewolucja w czasie układu jeżeli* $B_x = 0$*?*

22. *Przestranformuj Hamiltonian do układu odniesienia wirującego wzdłuż osi z z częstością* ω

Odp:

$$\Psi_r = e^{-i\omega t\sigma_z/2}, \qquad H_r = -\Delta\omega_L S_z - \omega S_x - \omega_x(\cos 2\omega t S_x + \sin 2\omega t S_y),$$

gdzie wprowadzamy oznaczenia: $\omega_L = gB$ (częstość Larmora), $\Delta\omega_L = \omega_L - \omega$ (odstrojenie od częstości Larmora), $\omega_x = gB_x$.

W przybliżeniu fali rotującej (RWA) przyjmujemy, że otatni, szybkozmienny składnik uśrednia się do zera.

23. *Jak wygląda dynamika w przybliżeniu fali rotującej w układzie obracającym się?*

24. *Jak wygląda dynamika w przybliżeniu fali rotującej w układzie laboratoryjnym?*

25. *Dla jakiej częstości pola oscylującego oś obrotu własnego spinu jest pozioma?*

26. *Jak wygląda stan Gibbsa dla spinów w stałym polu magnetycznym B_z? Biorąc pod uwagę że w sytuacji laboratoryjnej $\beta\Delta E \sim 10^{-5}$, przybliż ten stan wyrażeniem liniowym w Hamiltonianie.*

27. *Na stan Gibbsa działamy Hamiltonianem (4) przez okres czasu $\omega_x t = \pi/2$ a następnie wyłączamy oscylujące pole poprzeczne. Jaki jest stan układu po wyłączeniu pola poprzecznego i jak on ewoluuje?*

Mamy do dyspozycji oscylujące pola wytwarzane przez cewki wzdłuż osi X i Y. Przy pomocy sekwencji pulsów w tych kierunkach o różnych czasch trwania można (poprzez wybór odpowiedniej częstotliwości) wykonać dowolną operację $SU(2)$ na wybranym jądrze.

28. *Pokaż, że obrót sfery Blocha wokół osi Z można zrealizować jako:*

$$e^{-i\omega t S_z/\hbar} = e^{-i\frac{\pi}{2}S_x/\hbar} e^{-i\omega t S_y/\hbar} e^{i\frac{\pi}{2}S_x/\hbar} = e^{-i\frac{\pi}{2}S_y/\hbar} e^{i\omega t S_x/\hbar} e^{i\frac{\pi}{2}S_y/\hbar}$$

W poprzednim semestrze udowodniliśmy, że dowolną operację z grupy $SU(2)$ można przedstawić jako:

$$e^{i\alpha\sigma_z} \cdot \begin{bmatrix} r & -s \\ s & r \end{bmatrix} \cdot e^{i\beta\sigma_z}, \qquad r^2 + s^2 = 1$$

29. *Pokaż, że drugą macierz w powyższym rozwinięciu można zrealizować jako $e^{-i\gamma\sigma_y}$*

30. *Jak rozłożyć dowolną macierz $SU(2)$ za pomocą ciągu impulsów wzdłuż osi X, Y o różnych długościach?*

31. *Jakie impulsy należy zastosować by zrealizować bramki:*

1. *Hadamarda*
$$\frac{i}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
2. *NOT*
$$i\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bramki dwuqubitowe Żeby zrealizować bramkę dwuqubitową potrzebujemy oddziałujących qubitów. Do Hamiltonianu dodajemy człon oddziaływania: $-dS_Z^{(1)}S_Z^{(2)}$ (oddziaływanie dipolowe, uproszczone).

32. *Jak zmienią się stany energetyczne i częstotliwości linii w widmie NMR gdy uwzględnimy takie oddziaływanie?*

33. *Załóżmy, że układ w stanie $|00\rangle$ otrzymał impuls $\pi/2$ wokół osi Y o częstości rezonansowej jądra 2. Następnie oba spiny ewoluują ze swobodnym Hamiltonianem. Jak wygląda zależność czasowa stanu obu spinów podczas swobodnej ewolucji?*

Odp. $\Psi(t) = |0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle e^{-i\hbar dt} + |1\rangle e^{i\hbar dt})$

34. *Jak wygląda ta sama ewolucja, gdy startujemy ze stanu $|10\rangle$?*

Odp. $\Psi(t) = |0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle e^{i\hbar dt} + |1\rangle e^{-i\hbar dt})$

35. *Jeżeli po podziałaniu impulsem $\pi/2$ wzdłuż osi Y odczekamy czas $t = \frac{\pi}{dh}$ i podziałamy impulsem $-\pi/2$ wzdłuż osi X to jaką unitarną operację na dwóch qubitach zrealizujemy?*

36. *Udowodnij, że dowolną operację unitarną na dwóch qubitach mozna zrealizować za pomocą*

Złącza Josephsona

37. *W punktach po dwóch stronach złącza funkcja falowa jest równa odpowiednio $\sqrt{p_1}e^{i\theta_1}$ i $\sqrt{p_2}e^{i\theta_2}$. Równania Schrödingera:*

$$i\hbar\partial_t\Psi_1 = U_1\Psi_1 + K\Psi_2$$
$$i\hbar\partial_t\Psi_2 = U_2\Psi_2 + K\Psi_1$$

Załóżmy, że do złącza przyłożone jest zewnętrzne napięcie V, $U_2 - U_1 = 2eV$, cechujemy by $U_1 = -U_2$. Wyprowadzić prawa Josephsona:

$$I = I_c \sin\Delta\theta$$
$$\partial_t\theta = -\frac{2e}{\hbar}V$$

38. *Dodatkowo przez złącze płynie prąd zewnętrzny $-I_z$. Złącze ma pojemność C. Z praw Josephsona wyprowadzić równanie: $\partial_t^2\theta + \frac{2e}{\hbar}\frac{1}{C}(-I_z + I_c\sin\theta) = 0$ (zakładamy, że moduły funkcji falowych zmieniają się pomijalnie mało).*

39. *Pokazać, że powyższe równanie jest równaniem Eulera-Lagrange'a dla funkcjonału $L(\theta(t)) = \frac{C}{2}\left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2(\partial_t\theta)^2 + \frac{\hbar}{2e}(I_c\cos\theta + I_z\theta)$.*

Wyraz $\frac{\hbar}{2e}I_c\cos\theta$ nazywa się energią Josephsona.

40. *Dla powyższego funkcjonału znaleźć pęd i Hamiltonian. Pokazać, że $\pi = \hbar N$, gdzie N jest liczbą par Coopera w elektrodzie. Skwantować powyższy Hamiltonian biorąc $\pi = \frac{\hbar}{i}\partial_\theta$*

Rozważamy SQUIDa - pętlę nadprzewodzącą rozdzieloną złączem Josephsona. Przez pętlę przechodzi strumień magnetyczny Φ

41. *Z równania ciągłości dla prawdopodobieństwa i równania Schrödingera wyprowadzić wzór na prąd prawdopodobieństwa:*

$$j = -\frac{1}{2(2m)}\left[\Psi^*\left(\frac{\hbar}{i}\nabla + 2eA\right)\Psi + c.c.\right]$$

(wykorzystać cechowanie $\nabla\cdot A = 0$)

42. *Wewnątrz nadprzewodnika, daleko od jego powierzchni, nie istnieje pole magnetyczne ani prąd, a rozkład ładunku jest jednorodny. Stąd wyprowadzić zależność: $A = -\frac{\hbar}{2e}\nabla\theta$.*

43. *Wyraź strumień przez pętlę poprzez całkę z A po konturze wewnątrz nadprzewodnika.*

44. *Jaka relacja wiążę strumień przez pętlę z różnicą faz na złączu?*

Rozważamy pętlę nadprzewodzącą z dwoma złączami Josephsona.

45. *Jak zależy strumień przez pętlę od różnic faz na złączach? Jak zależy energia Josephsona pętli od różnic faz na złączach? Jak zależy prąd?*