Klasyczna teoria informacji

1. Mamy monetę dającą wyniki z prawdopodobieństwami $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ Znajdź liczbę średnią pytań na wynik w optymalnym systemie identyfikacji potrzebną do zidentyfikowania wyniku losowania gdy pytamy o jeden, dwa lub trzy wyniki jednocześnie.

2. Oblicz informację Shannona H dla tego źródła.

3. Narysuj wykres funkcji H na zbiorze rozkładów prawdopodobieństwa bitu. Pokaż że ma maksimum w rozkładzie maksymalnie mieszanym i że jest wypukła.

4. Pokaż, że $H(X,Y) \leqslant H(X) + H(Y)$ (subaddytywność informacji). Udowodnij, że równość zachodzi tylko dla zmiennych niezależnych.

5. Wynik pomiaru rzutu monetą $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ przesyłamy klasycznym kanałem informacyjnym o macierzy

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ile nie wiemy o X, jeżeli znamy wynik Y?

6. Pokaż, że $\sum_i P(y_i)H(Y|y_i)$ (średnia informacja o X jeżeli znamy Y) jest równa $H(X,Y) - H(Y)$. Oznaczamy tę wielość jako $H(X|Y)$.

7. Pokaż na diagramie Venna zależność: $H(X,Y,Z) + H(Y) \leqslant H(X,Y) + H(Y,Z)$ (silna subaddytywność). Kiedy zachodz równość? (odp. dla łańcucha Markowa)

Układy dwupoziomowe

Układy dwupoziomowe - odpowiedniki klasycznych bitów. Dwuwymiarowa przestrzeń Hilberta.

- spin $\frac{1}{2}$
- foton - polaryzacja
- atom dwupoziomowy (reguły wyboru, przejścia zabronione, ograniczenia energetyczne)

Wektory stanu, obserwable i liczenie prawdopodobieństw

Obserwabla - operator hermitowski ($A^\dagger = A$) odpowiadający mierzonej wielkości fizycznej.
Każdą macierz hermitowską można zapisać jako $A = U^\dagger D U$, gdzie U - macierz przejścia do bazy własnej, D - macierz diagonalna. Wartości własne odpowiadają możliwym wynikom pomiaru.
Rozkładamy wektor stanu w bazie własnej obserwabli: $\Psi = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2$. $|c_1|^2 + |c_2|^2 = |\Psi|$ (tw. Pitagorasa). Kwadrat modułu współczynnika rozwinięcia przy wektorze własnym jest prawdopodobieństwem, że w wyniku pomiaru uzyskamy odpowiadającą mu wartość własną. Suma prawdopodobieństw jest równa 1, dlatego $|\Psi| = 1$.
Zbiór wektorów stanu = S^3 (unormowane wektory w dwuwymiarowej zespolonej p. liniowej).

Operator spinu: $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z]$, gdzie:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Operator spinu w kierunku wektora jednostkowego $\vec{n}$ jest równy $\vec{n} \cdot \vec{S}$.

1. *Znajdź operator spinu w kierunku wektora:*

- $(1, 1, 1)$
- $(2, 1, 0)$
- $(0, 3, -2)$
- $(-1, 0, 1)$

2. *Wyznacz kierunek w którym mierzymy składową spinu przy użyciu operatora hermitowskiego:*

- $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}i & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

3. *Układ jest w stanie opisanym wektorem* $\Psi = N \begin{bmatrix} i \\ 2 \end{bmatrix}$, *gdzie* N *jest czynnikiem normalizacyjnym. Z jakim prawdopodobieństwem zmierzymy* $S_y = -\frac{\hbar}{2}, S_y = \frac{\hbar}{2}$*? Analogicznie:*

- $\Psi = N \begin{bmatrix} i \\ 2 \end{bmatrix}$, S_x
- $\Psi = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}i}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, S_y
- $\Psi = N \begin{bmatrix} i \\ 2 \end{bmatrix}$, S_z
- $\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}S_y + \frac{1}{\sqrt{2}}S_x$
- $\Psi = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}i}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, S_x
- $\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}S_z + \frac{1}{\sqrt{2}}S_x$
- $\Psi = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}i}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, S_z
- $\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}S_y + \frac{1}{\sqrt{2}}S_z$

Po pomiarze następuje kolaps funkcji falowej - wektor stanu staje się wektorem własnym mierzonej obserwabli odpowiadającym wartości własnej, która była wynikiem pomiaru.

4. *Układ jest w stanie* $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Co będzie wynikiem pomiaru rzutu spinu na kierunek z? Jakie będą prawdopodobieństwa wyników pomiaru rzutu spinu na kierunek y?*
Jeżeli pomiar S_y *dał* $-\frac{\hbar}{2}$, *jak wygląda po pomiarze wektor stanu? Jakie będą teraz prawdopodobieństwa pomiaru rzutu spinu na kierunek z?*

Jeżeli obserwable nie komutują ($[S_y, S_z] \neq 0 \Rightarrow$ ich mnożenie nie jest przemienne), to nie mają tej samej bazy własnej i dlatego nie jest możliwa sytuacja, by pomiar obu tych wielkości dawał jednocześnie określoną wartość.

Projektory i sfera Blocha

Fizyczne znaczenie mają tylko prawdopodobieństwa pomiarów i wartości własne obserwabli (które można wyznaczyć znając prawdopodobieństwa. Wzór na prawdopodobieństwa otrzymania wyniku odpowiadającego wektorowi własnemu Ψ_1 wygląda tak: $p_1 = |\langle\Psi|\Psi_1\rangle|^2 = \langle\Psi|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|\Psi\rangle$

Zauważmy, że jeżeli pomnożymy wektor stanu przez czynnik fazowy $e^{i\phi}$, żadne z prawdopodobieństw się nie zmieni. Wiele wektorów stanu reprezentuje ten sam stan. Stan układu jest opisywany jednoznacznie przez $|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|$ czyli projektor na kierunek wektora Ψ_1.

Znajdźmy projektor odpowiadający wektorowi stanu $\Psi = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$:

$$\Psi\Psi^\dagger = \begin{bmatrix} aa^* & ab^* \\ ba^* & bb^* \end{bmatrix}$$

Wiemy, że $aa^* + bb^* = 1$. Niech $aa^* - bb^* = z$, a $2ab^* = x - iy$. Wtedy można zapisać ten projektor jako:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Macierz postaci (1) jest projektorem wtw gdy jej wyznacznik jest równy 0.

5. *Jaki warunek muszą spełniać liczby* x, y, z *by macierz (1) była projektorem?*

Zbiór projektorów jest zatem dwuwymiarową sferą, nazywaną **sferą Blocha**. Po utożsamieniu ze sobą wektorów stanu różniących się o czynnik fazowy otrzymujemy zbiór projektorów, zatem $S^3/S^1 = S^2$ (1 wiązka Hopfa).

6. *Znaleźć położenie na sferze Blocha stanów reprezentowanych przez wektory:*

- $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$
- $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
- $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

7. *Udowodnić, że prostopadłe wektory stanu reprezentują stany antypodyczne na sferze Blocha.*

8. *Jaki jest wzór na prawdopodobieństwo zmierzenia wartości odpowiadającej projektorowi P_1 na wektor własny, gdy stanem układu jest projektor P? Wyraź wynik poprzez kąt pomiędzy wektorami na sferze Blocha.*

Z fizycznego punktu widzenia interesują nas stany bitu nie $\{0, 1\}$, ale $[0, 1]$ - np. po przejściu przez zaszumiony kanał bit o określonej wartości staje się mieszaniną statystyczną stanu 0 i stanu 1. Podobnie w przypadku kwantowym, dopuszczalnymi stanami są też mieszaniny statystyczne stanów czystych, czyli punkty we wnętrzu kuli Blocha leżące na linii łączącej dwa stany czyste.

Stan mieszany może być rozłożony na wiele sposobów jako mieszanina stanów czystych. Jeden z tych rozkładów jest wyróżniony - jest to rozkład spektralny. Mierząc stan za pomocą obserwabli o bazie własnej takiej jaką ma stan możemy przesyłać za jego pomocą maksymalną ilość informacji - minimalna nieoznaczoność. Środek kuli reprezentuje stan maksymalnie zmieszany - nie może być on nośnikiem żadnej informacji - jakikolwiek rozkład na dwa stany czyste daje współczynniki kombinacji $(1/2, 1/2)$ - maksymalna nieoznaczoność.

9. *Dla projektorów:*

$$P_1 = \begin{bmatrix} 3/4 & \sqrt{3}i/4 \\ -\sqrt{3}i/4 & 1/4 \end{bmatrix} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 1/4 & \sqrt{3}i/4 \\ -\sqrt{3}i/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

znaleźć ich położenie na sferze Blocha. Znaleźć macierz stanu mieszanego $\rho = 1/2P_1 + 1/2P_2$ oraz jej położenie w kuli Blocha. Znaleźć rozkład spektralny stanu ρ i położenie stanów czystych z tego rozkładu na sferze Blocha.

10. *Dla projektorów:*

$$P_1 = \begin{bmatrix} 3/4 & \sqrt{3}i/4 \\ -\sqrt{3}i/4 & 1/4 \end{bmatrix} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 3/4 & -\sqrt{3}i/4 \\ \sqrt{3}i/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

znaleźć ich położenie na sferze Blocha. Znaleźć macierz stanu mieszanego $\rho = 1/2P_1 + 1/2P_2$ oraz jej położenie w kuli Blocha. Znaleźć rozkład spektralny stanu ρ i położenie stanów czystych z tego rozkładu na sferze Blocha.

Dynamika unitarna układu dwupoziomowego

Rozważmy teraz grupę operacji przeprowadzających stany czyste w stany czyste. Operacja taka przekształca wektor stanu zawsze w inny wektor stanu: $\Psi \to U\Psi$, zachowuje zatem normę w przestrzeni Hilberta.

W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ operacje zachowujące długość tworzą grupę $O(n)$ (grupa operacji ortogonalnych), w której wyróżniamy podgrupę zachowującą orientację $SO(n)$ (specjalne ortogonalne). Zachowywanie normy wektora prowadzi do warunku $O^T O = I$. Oznacza on, ze kolumny tej macierzy sa do siebie prostopadłe i mają długość 1. Macierz ortogonalna jest zatem macierzą przejścia do nowej bazy ortonormalnej.

Analogicznie, w przestrzeni $\mathbb{C}^n$ operacje zachowujące normę wektora tworzą grupę przekształceń unitarnych $U(n)$ (zawiera się w niej podgrupa $SU(n)$ - specjalne unitarne). Określa ją warunek $U^\dagger U = I$. Oznacza to że kolumny macierzy mają długość 1 i są do siebie prostopadłe.

11. *Pokazać, że dowolny element grupy $SU(2)$ jest postaci:*

$$\begin{bmatrix} r & -s \\ s^* & r^* \end{bmatrix}$$

Jaki zbiór tworzą macierze unitarne?

12. *Sprawdzić, że macierz* $\begin{bmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{bmatrix}$ *jest macierzą unitarną. Sprawdzić efekt jej działania na ogólny wektor stanu. Jak transformuje się projektor na ten wektor?*

Wynik zadania pokazuje, że operacja dla $\phi = \pi$ działa jak identyczność na zbiorze projektorów. Zatem grupa $SU(2)$ jest dwukrotnym nakryciem grupy $SO(3)$.

13. *Pokazać, że jeżeli macierz A jest hermitowska to macierz* $\exp(iA)$ *jest unitarna. (wykorzystujemy fakt, że iloczyn eksponentów jest eksponentem sumy, jeżeli argumenty komutują. Jeżeli nie komutują, to nie można już tak zrobić, o czym przekonamy się później.)*

Macierz hermitowska A jest generatorem operacji e^{iA}. Generatory tworzą przestrzeń liniową. Jest to algebra liego $\mathfrak{u}(2)$ grupy liego $U(2)$.

14. *Dla macierzy $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ znaleźć* $\exp(i\sigma_x), \exp(i\sigma_y), \exp(i\sigma_z)$ *poprzez rozwinięcie w szereg funkcji* exp.

Dowolną macierz hermitowską można przedstawić w postaci jej rozwinięcia spektralnego: $A = U^\dagger \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} U$.

15. *Pokazać, że* $A^n = U^\dagger \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix} U$

16. *Pokazać, że dla każdej funkcji rozwijalnej w szereg* $f(A) = U^\dagger \begin{bmatrix} f(a) & 0 \\ 0 & f(b) \end{bmatrix} U$

17. *Rozwiązać w ogólności równanie Schrödingera:*

$$i\hbar\frac{d\Psi}{dt} = H\Psi$$

18. *Cząstka o spinie* $1/2$ *znajduje się w polu magnetycznym* $\vec{B}$*. Jak wygląda dynamika na sferze Blocha? Gdzie są bieguny osi obrotu, jaka jest częstość (oscylacje Raabiego)?*

19. *Jak wygląda ewolucja Hamiltonowska dla stanów mieszanych (wnętrze kuli Blocha)?*

Polaryzacja fotonu i operacje na niej

20. *Pokaż, że zbiorem możliwych polaryzacji fali świetlnej jest* S^3/S^1*, podobnie jak dla zbioru stanów czystych qubitu. Sfera otrzymana w tym przypadku nazywana jest sferą Poincare.*

21. *Pokaż, że dowolny bezstratny dzielnik wiązki działa jak operacja unitarna.*

22. *Pokaż, że dowolną operację z grupy* $SU(2)$ *można przedstawić jako:*

$$e^{i\alpha\sigma_z} \cdot \begin{bmatrix} r & -s \\ s & r \end{bmatrix} \cdot e^{i\beta\sigma_z}$$

23. *Pokaż, że macierz obrotu o kąt* ϕ *można przedstawić jako* $\sqrt{NOT}^\dagger e^{-i\phi\sigma_z}\sqrt{NOT}$*, gdzie*

$$\sqrt{NOT} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

24. *Pokaż, że operator* $\sqrt{NOT}$ *jest (z dokładnością do operacji zmiany fazy względnej) obrotem o* $45°$ *wokół kierunku propagacji.*

25. *Z trzech poprzednich zadań wynika, że dowolną operację* $SU(2)$ *można przedstawić jako* $e^{i\alpha\sigma_z} \cdot \sqrt{NOT}^\dagger e^{-i\phi\sigma_z}\sqrt{NOT} \cdot e^{i\beta\sigma_z}$*,*
gdzie $\sqrt{NOT} = e^{-i\pi/4\sigma_z}O(\pi/4)e^{i\pi/4\sigma_z}$*. Regulowaną zmianę fazy względnej pomiędzy składowymi polaryzacji osiąga się przez regulowane ściśnięcie światłowodu w kierunku jednej ze składowych. W jaki sposób przez ściskanie światłowodu można zrealizować dowolną operację unitarną na polaryzacjach?*

Iloczyn tensorowy

Klasycznie - jeżeli układ składa się z podukładów n i m poziomowego, to cały układ ma nm poziomów. W przypadku kwantowym jego przestrzeń Hilberta będzie nm wymiarowa, czyli jej wymiar będzie iloczynem wymiarów przestrzeni Hilberta podukładów. Przestrzeń taką tworzy się poprzez iloczyn tensorowy. Jeżeli $\{e_1, \cdots e_n\}$ będzie bazą pierwszej przestrzeni, a $\{f_1, \cdots f_m\}$ drugiej, to iloczyn tensorowy jest napinany przez $n \times m$ wektorów:

$$\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m = \text{span}\{e_i \otimes f_j\}$$

Iloczyn tensorowy dwóch wektorów jest równy: $[u_1, \cdots, u_n] \otimes [v_1, \cdots, v_m] = [u_1 v_1, \cdots, u_1 v_m, u_2 v_1, \cdots, u_2 v_m, \cdots, u_n v_m]$.

26. *Oblicz współrzędne wektorów:*

- $[1, -1] \otimes [0, i]$
- $[1, 2] \otimes [i, 1]$
- $[0, 1] \otimes [0, i]$
- $[1, 3, i] \otimes [1, i, -1]$
- $[1, 2] \otimes [i, 3] \otimes [4, -i]$

Nie każdy wektor w iloczynie tensorowym dwóch przestrzeni Hilberta może być przestawiony jako iloczyn tensorowy dwóch wektorów!

27. *Pokaż, że poniższych wektorów nie da się przedstawić jako iloczyn tensorowy dwóch wektorów:*

- $[1, 0, 0, 1] \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$
- $[1, i, i, 1] \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$

Twierdzenie Schmidta: Każdy wektor w $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ można przedstawić jako $\sum_i \mu_i e_i \otimes f_i$, dla pewnych baz ortonormalnych $\{e_i\}$ i $\{f_j\}$ i pewnych współczynnikach, dla których $\sum_i |\mu_i|^2 = 1$.

28. *Jak wygląda rozwinięcie Schmidta dla pierwszego przykładu z poprzedniego zadania?*

Ilość współczynników w rozwinięciu Schmidta określa **rząd Schmidta wektora**. Jest on mniejszy równy od wymiaru mniejszej przestrzeni w iloczynie tensorowym $r(\Psi) \leqslant \min\{n, m\}$. Najłatwiej go znaleźć, układając współrzędne wektora w macierz i obliczając jej rząd:

- dla $\Psi \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, $r([1, -i, -i, 1]) = r \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = 2$
- dla $\Psi \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^4$, $r([1, i, -i, 2, i, -1, 2, -2i, 0, 3i, i, 0]) = r \begin{bmatrix} 1 & i & -i & 2 \\ i & -1 & 2 & -2i \\ 2 & 2i & -3i & 0 \end{bmatrix} = 2$

29. *Obliczyć rząd Schmidta wektorów:*

- $\Psi = [1, i, -1, 1] \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$
- $\Psi = [1, -i, -i, 2, 2, -2i, -2i, 4] \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^4$

Rząd Schmidta nie jest dobrze określony dla większej liczby podukładów
Iloczyn skalarny macierzy A i B definiujemy jako:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{bmatrix}$$

30. *Oblicz iloczyny skalarne macierzy:* $\sigma_x \otimes \sigma_x$, $\sigma_y \otimes \sigma_z$, $\sigma_z \otimes \sigma_y$, $\sigma_z \otimes \sigma_z$.

Mnożenie iloczynów tensorowych: $(A \otimes B) \times (C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$.

31. *Oblicz komutator* $[\sigma_x \otimes I, I \otimes \sigma_y]$.

Operacje unitarne postaci $U_1 \otimes U_2$ nazywane są operacjami lokalnymi.

32. *Pokaż, że generatorem operacji lokalnych jest* $\frac{i}{\hbar}(H_1 \otimes I + I \otimes H_2)$.
Odp.

$$e^{-\frac{i}{\hbar}(H_1 \otimes I + I \otimes H_2)} = e^{-\frac{i}{\hbar}H_1 \otimes I} \times e^{-\frac{i}{\hbar}I \otimes H_2} = e^{-\frac{i}{\hbar}H_1} \otimes I \times I \otimes e^{-\frac{i}{\hbar}H_2} = e^{-\frac{i}{\hbar}H_1} \otimes e^{-\frac{i}{\hbar}H_2}$$

Zatem jeżeli Hamiltonianem układu jest $H_1 \otimes I + I \otimes H_2$, to ewolucja obu podukładów odbywa się niezależnie. Wtedy wektory własne Hamiltonianu są produktowe. Jeżeli w Hamiltonianie jest człon oddziaływania, to tak już być nie musi.

33. *Rozważmy Hamiltonian dwóch cząstek o spinie* $1/2$*, sprzęgających się ze sobą magnetycznie. Klasycznie energia oddziaływania jest równa* $E = -gS_1 \cdot S_2$*. Jak wygląda Hamiltonian kwantowy? Zapisz jego macierz i dokonaj jej diagonalizacji. Jakie są jej wektory własne? Czy są one produktowe?*

Odp. Operator energii jest równy $-g\frac{\hbar^2}{4}(\sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z)$. Jego macierz jest równa:

$$-g\frac{\hbar^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma ona wartości własne $-g\frac{\hbar^2}{4}(-3, 1, 1, 1)$. Wartości własnej 1 odpowiadają w.własne $e_1 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2, e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$, natomiast wartości własnej -3 odpowiada wektor własny $e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$.

34. *Znajdź macierz gęstości całego układu, jeżeli podukłady nie są skorelowane a ich stany są dane przez macierze gęstości:*

- $\rho_1 = \begin{bmatrix} 1/4 & i/3 \\ -i/3 & 3/4 \end{bmatrix}$,
- $\rho_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}$,

Odpowiada to znalezieniu rozkładu łącznego dla niezależnych zmiennych losowych. Jeżeli zmienne losowe nie są niezależne, to wiele różnych rozkładów może prowadzić do tych samych rozkładów brzegowych, np. dla dwóch bitów rozkłady $[1/2, 0, 0, 1/2]$ oraz $[1/4, 1/4, 1/4, 1/4]$ prowadzą do tych samych rozkładów brzegowych. Mając dane tylko rozkłady brzegowe nie mamy wiedzy o korelacjach pomiędzy zmiennymi.

Ślad częściowy Mając dany stan dwóch qubitów, stan każdego z nich otrzymujemy biorąc ślad częściowy po drugim podukładzie, co odpowiada wysumowaniu $\sum_j p_{ij}$ w klasycznym rachunku prawdopodobieństwa. Kwantowo:

$$\rho_1 = \mathrm{Tr}_2\rho = \textstyle\sum_{ik} \delta_{ik}\rho_{ij,kl} \quad \rho_2 = \mathrm{Tr}_1\rho = \textstyle\sum_{jl} \delta_{jl}\rho_{ij,kl}$$

$$\rho = \begin{bmatrix} a_{11,11} & a_{11,12} & a_{12,11} & a_{12,12} \\ a_{11,21} & a_{11,22} & a_{12,21} & a_{12,22} \\ a_{21,11} & a_{21,11} & a_{21,21} & a_{21,22} \\ a_{22,11} & a_{22,12} & a_{22,21} & a_{22,22} \end{bmatrix}$$

$$\rho_1 = \begin{bmatrix} a_{11,11} + a_{11,22} & a_{12,11} + a_{12,22} \\ a_{21,11} + a_{21,22} & a_{22,11} + a_{22,22} \end{bmatrix} \quad \rho_2 = \begin{bmatrix} a_{11,11} + a_{22,11} & a_{11,12} + a_{22,12} \\ a_{11,21} + a_{22,21} & a_{11,22} + a_{22,22} \end{bmatrix}$$

35. *Znaleźć stany podukładów dla stanu całego układu:*

- $\rho = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & i/5 \\ 1/5 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & -i/5 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

- $\rho = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1/3 & b & 0 \\ 0 & b^* & 1/3 & 0 \\ a^* & 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$

36. *Znaleźć stan układu dwóch qubitów reprezentowany przez wektor stanu* $1/\sqrt{2}[1, 0, 0, 1]^T$. *Znaleźć stany podukładów.*

Stan układu jest stanem czystym, zatem jest dobrze określony. Stany podukładu są maksymalnie mieszane, czyli nie zawierają w sobie żadnej informacji. Paradoks kwantowy - suma informacji zawartej w układzie może być większa niż suma informacji zawartych w podukładach. Klasycznie jest to niemożliwe: $S(X + Y) \geqslant \max\{S(X), S(Y)\}$.

37. *Znajdź wszystkie puryfikacje macierzy gęstości danej przez rozkład na kombinację stanów czystych.*

38. *Znajdź wszystkie rozkłady macierzy gęstości na kombinację stanów czystych.*

Układy otwarte

Kanały kwantowe

Klasycznie - kanał to odwzorowanie stochastyczne przeprowadzające każdy rozkład prawdopodobieństwa w inny rozkład prawdopodobieństwa.

39. *Udowodnić, że macierz kanału jednobitowego ma wszystkie elementy nieujemne i suma wyrazów w każdej kolumnie jest równa* 1.

Odp. Rozkłady $[1,0]$ i $[0,1]$ przechodzą pod działaniem kanału odpowiednio na pierwszą i drugą kolumnę macierzy. Muszą być one rozkładami prawdopodobieństwa, zatem suma wyrazów w kolumnie jest równa 1 i są one nieujemne. Dowolny inny rozkład przejdzie na kombinację wypukłą tych kolumn, zatem na pewien rozkład.

Kwantowo - kanał przeprowadza macierze dodatnie na dodatnie, zachowuje ślad oraz spełnia pewien dodatkowy warunek: rozważmy większy układ złożony z naszego układu i jakiegoś innego. Na ten większy układ będzie działał kanał $\Phi \otimes I$, i on również musi zachowywać dodatniość stanu układu.

Dowolny kanał można zapisać jako

$$\Phi(\rho) = \sum_i A_i \rho A_i^\dagger, \tag{2}$$

gdzie $\sum_i A_i^\dagger A_i = I$ (rozwinięcie Krauss-Choi).

40. *Pokazać, że dowolna operacja unitarna na stanie $\eta \otimes \rho$ układu złożonego nasz układ+otoczenie po wyśladowaniu otoczenia ma postać Kraussa.*

41. *Pokazać, że dwie reprezentacje kanału $\sum_i A_i \rho A_i^\dagger$ oraz $\sum_i B_i \rho B_i^\dagger$ są sobie równoważne $\iff$ $B_i = \sum_j U_{ij} A_j$, gdzie U jest macierzą unitarną (wykorzystać fakt, że $AXB = (B^T \otimes A)\vec{X}$).*

42. *Podać przykład kanału, który potrafi zamienić stan czysty w stan mieszany (czego nie zrobi żadna operacja unitarna).*

Odp. Np $A_1 = \sqrt{1/2} I, A_2 = \sqrt{1/2}\sigma_x$.

43. *Pokazać, że każdy kanał, dla którego długość sumy (2) wynosi jeden, jest obrotem unitarnym.*

44. *Jak jednoqbitowy kanał kwantowy $\Phi(\rho) = (1-p)A_0 \rho A_0^\dagger + pA_1 \rho A_1^\dagger$, gdzie $A_0 = I$, a $A_1 = \sigma_z$ działa na punkty sfery Blocha w zależności od wartości parametru p?*

Jeżeli zamiast σ_z weźmie się σ_x lub σ_y, otrzymamy kanały działające tak samo, ale wzdłuż innych osi.

Powyższy kanał odpowiada zanikaniu elementów pozadigonalnych w pewnej wyróżnionej bazie (*phase damping*). Jest to niszczenia korelacji kwantowych przez oddziaływanie z otoczeniem. Dla $p = 1/2$ sfera Blocha redukuje się do średnicy - pewnego zanurzenia zbioru stanów bitu w zbiór stanów qubitu.

45. *Jak jednoqbitowy kanał kwantowy* $\Phi(\rho) = (1 - \frac{3p}{4})A_0\rho A_0^\dagger + \frac{p}{4}(A_1\rho A_1^\dagger + A_2\rho A_2^\dagger + A_3\rho A_3^\dagger)$*, gdzie* $A_0 = I$*,* $A_1 = \sigma_x$*,* $A_1 = \sigma_y$*, a* $A_1 = \sigma_z$ *działa na punkty sfery Blocha w zależności od wartości parametru* p*?*

Taki kanał nazywa się kanałem depolaryzującym. Ma on również odpowiednik klasyczny. Dla $p = 1$ odwzorowuje każdy stan w stan maksymalnie mieszany. Opisuje niszczenie informacji przez szum.

46. *W jaki sposób działa kanał qubitowy zadany przez operatory Kraussa:*

$$E_0 = \sqrt{p}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{bmatrix}, \qquad E_1 = \sqrt{p}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$E_2 = \sqrt{1-p}\begin{bmatrix} \sqrt{1-\gamma} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \sqrt{1-p}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{\gamma} & 0 \end{bmatrix}?$$

Kanał taki odpowiada termicznemu opadaniu na stan Gibbsa.

47. *Kanał z poprzedniego działania działa na macierz w reprezentacji Blocha w następujący sposób:*

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2p\gamma + (1-\gamma)(1+z) & \sqrt{1-\gamma}(x-iy) \\ \sqrt{1-\gamma}(x+iy) & -2p\gamma + (1-z) + \gamma(1+z) \end{bmatrix}$$

Stanem stacjonarnym tego kanału jest stan Gibbsa. Jak temperatura tego stanu zależy od p*?*

Pomiar uogólniony

$$\begin{array}{ccccc} & \text{stan kwantowy} & \xrightarrow{\text{kanał kwantowy}} & \text{stan kwantowy} & \\ \text{pomiar} & \downarrow & & \uparrow & \text{przygotowanie} \\ & \text{stan klasyczny} & \xrightarrow{\text{kanał klasyczny}} & \text{stan klasyczny} & \end{array}$$

Pomiar von Neumanna (PV measure): $\{P_i, \lambda_i\}$, $\{P_i\}$ - zbiór projektorów sumujących się do 1 Pomiar uogólniony (POV measure): $\{E_i, \lambda_i\}$, $\sum_i E_i = I$, E_i - operatory dodatnie.

48. *Załóżmy, że na układ działamy kanałem kwantowym. Następnie dokonujemy pomiaru von Neumanna na układzie. Pokazać, że taka procedura odpowiada pomiarowi POVM dla stanu układu na początku takiej procedury.*

49. *Podać przykład dającego dwie wartości pomiaru uogólnionego, który nie jest pomiarem von Neumanna.*

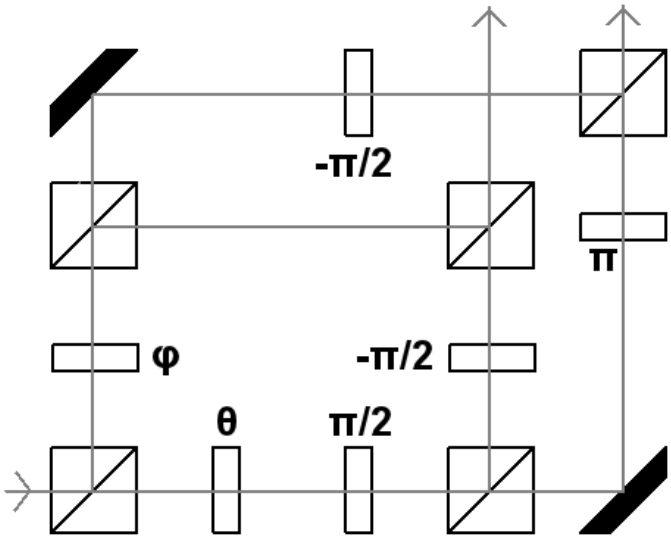
50. *Wyobraźmy sobie, że klasyczne bity kodowane są za pomocą stanów fotonów o nieortogonanych polaryzacjach* Ψ_1 *i* Ψ_2*. Jak należy dobrać pomiar POVM, żeby zminimalizować prawdopodobieństwo błędnego odczytu bitu (przy założeniu że 0 i 1 nadawane są z równym prawdopodobieństwem)?*

51. *Jak zmieni się pomiar optymalny, jeżeli 0 i 1 będą się pojawiały z różnymi prawdopodobieństwami?*

52. *Znajdź pomiaru uogólniony dający trzy wartości (Ψ_1, Ψ_2, nie wiadomo) w ten sposób, by przy wynikach innych od "nie wiadomo" miało się pewność poprawności odpowiedzi. Znajdź taki, dla którego prawdopodobieństwo odpowiedzi "nie wiadomo" będzie minimalne, przy założeniu że 0 i 1 nadawane są z równym prawdopodobieństwem.*

53. *Jak zmieni się pomiar optymalny, jeżeli 0 i 1 będą się pojawiały z różnymi prawdopodobieństwami?*

54. *Przeanalizuj działanie układu pomiarowego jak na rysunku.*



Jaki pomiar POVM realizuje ten układ?

55. *W jaki sposób łącząc powyższe układy i operacje unitarne zrealizować dowolny POVM układu dwupoziomowego?*

56. *Zrealizuj POVM z zadania.*

Kwantowa teoria informacji

Entropię von Neumanna definiujemy jako $S(\rho) = -Tr(\rho \log_2 \rho)$. W poniższych zadaniach wykorzystywać będziemy nierówność Kleina: $\forall \sigma \; S(\rho) \leqslant -Tr(\rho \log_2 \sigma)$, a równość zachodzi tylko dla $\sigma = \rho$.

57. *(Subaddytywność)*
Udowodnij, że $S(\rho^{AB}) \leqslant S(\rho^A) + S(\rho^B)$, a równość zachodzi tylko gdy $\rho^{AB} = \rho^A \otimes \rho^B$.

58. *Udowodnij, że jeżeli ρ^{AB} jest stanem czystym, to $S(\rho^A) = S(\rho^B)$.*

59. *Udowodnij, że jeżeli $\{|i\rangle\}$ jest bazą ortonormalną, to $S(\sum_i p_i |i\rangle\langle i| \otimes \rho_i) = H(p_i) + \sum_i p_i S(\rho_i)$. Jeżeli stany $|i\rangle\langle i| \otimes \rho_i$ nie mają ortogonalnych nośników, to równość ta przechodzi w $\leqslant$, a różnica tych dwóch wielkości nazywa się ograniczeniem Holevo.*

60. *(Wypukłość)*
Udowodnij, że $S(\sum_i p_i \rho_i) \geqslant \sum_i p_i S(\rho_i)$.

61. *Wykonujemy pomiar von Neumanna na macierzy gęstości i nie poznajemy jego wyniku. Udowodnij, że po takiej sytuacji entropia von Neumanna nigdy nie zmaleje, a pozostanie równa tylko jeżeli pomiar odbył się w bazie własnej.*

62. *Udowodnij, że po pomiarze uogólnionym entropia von Neumanna może zmaleć. Rozważ POVM na 1 qubicie dany przez $E_1 = |0\rangle\langle 0|$ i $E_2 = |0\rangle\langle 1|$.*

63. *Udowodnij twierdzenie o nieklonowaniu stanów kwantowych: nie istnieje urządzenie które wyprodukuje dla każdego stanu działa tak: $\varphi \to \varphi \otimes \varphi$.*

Pojemność kanału

Informację przesłaną w kanale definiujemy jako zysk informacji o źródle, jeżeli znamy wynik na końcu kanału. Jest ona równa $H(X) - H(X|Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = H(Y) - H(Y|X)$. Oznaczamy ją jako $I(X:Y)$ i nazywamy informacją wzajemną.

Przez pojemność kanału informacyjnego (*channel capacity*) nazywamy jego zdolność do przesyłania informacji:

$$C(A) = \max_{P(X)} I(X : A(X))$$

Dany kanał wykorzystujemy w sposób optymalny, jeżeli rozkład prawdopodobieństwa dla alfabetu w kodzie źródła jest rozkładem na którym powyższa wielkość osiąga maksimum.

64. *Oblicz pojemność jednobitowego symetrycznego kanału informacyjnego (każdy bit z równym prawdopodobieństwem ϵ zmienia wartość).*

65. *Oblicz pojemność cyklicznego kanału informacyjnego (macierz kanału jest cykliczna, na diagonalach stoją te same wartości) dla n-znakowego alfabetu wejściowego.*

W przypadku przesyłania informacji klasycznej kwantowym kanałem informacyjnym wzór na pojemność daje twierdzenie HSW (*Holevo, Schumacher, Westmoreland*):

$$C(\Lambda) = \max_{p_i,\rho_i} \left[S(\sum_i p_i \Lambda(\rho_i)) - \sum_i p_i S(\Lambda(\rho_i)) \right]$$

66. *Oblicz pojemność 1-qubitowego kanału depolaryzującego:* $\Lambda(\rho) = \epsilon I/2 + (1-\epsilon)\rho$.

67. *Oblicz pojemność 1-qubitowego kanału phase damping:*

$$\Lambda(\rho) = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \gamma\rho_{12} \\ \gamma\rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix}$$