1 Rachunek prawdopodobieństwa

1. Obliczyć średnią i wariancję rozkładu Bernouliego

2. Wykonać przejście graniczne $p \to 0$, $N \to \infty$ w rozkładzie Bernouliego przy zachowaniu stałej wartości średniej: $\lambda = Np = const$ (powinien wyjść rozkład Poissona)

3. Obliczyć średnią i wariancję rozkładu Poissona

4. Obliczyć średnią i wariancję rozkładu prostokątnego, który nie zeruje się na przedziale $[0, a]$.

5. Obliczyć średnia i wariancję rozkłądu trójkątnego, który osiąga maksymalną wartość w zerze i jest niezerowy na przedziale $(-a, b)$ (zbiór na którym rozkład nie zeruje się nazywa się nośnikiem rozkładu).

6. Pokazać, że wartość średnia splotu rozkładów dwóch niezależnych zmiennych losowych o wartościach rzeczywistych jest sumą wartości średnich tych zmiennych losowych: $\overline{f * g} = \bar{f} + \bar{g}$.

7. Pokazać, że wariancja splotu rozkładów dwóch niezależnych zmiennych losowych o wartościach rzeczywistych jest sumą wariancji tych zmiennych losowych: $\sigma^2(f * g) = \sigma^2(f) + \sigma^2(g)$.

8. Obliczyć splot dwóch zmiennych losowych o rozkładzie Poissona i średnich odpowiednio λ_1 i λ_2.

9. Obliczyć splot dwóch rozkładów prostokątnych o nośnikach $[-a, a]$ i $[-b, b]$.

10. W objętości V porusza się N cząstek gazu. W obszarze tym wydzielamy część o objętości V_1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że:

- W objętości V_1 nie ma ani jednej cząstki
- W objętości V_1 znajduje się przynajmniej jedna cząstka
- W objętości V_1 znajdują się wszystkie cząstki

11. Cząstka w kolejnych przedziałach czasowych wykonuje ruch o określoną odległość w przód lub w tył, z jednakowym prawdopodobieństwem (błądzenie

przypadkowe). Pokazać, że rozkład prawdopodobieństwa że w n-tej chwili czasowej będzie ona n kroków od położenia początkowego wynosi:

$$P_n(k) = \frac{n!2^{-n}}{[(n+k)/2]![(n-k)/2]!}$$

12. Dla $n >> 1$ i $n >> k$ używając wzoru Stirlinga: $\ln n! = n \ln n - n + \sqrt{2\pi n}$ i rozwinięcia logarytmu w szereg Taylora pokazać, że:

$$P_n(k) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-k^2/2}$$

(jest to tylko przybliżenie dla małych k, dlatego całka z tego rozkładu nie jest równa 1. Trzeba go jeszcze unormować)

13. Jeżeli przedział czasowy trwa t_0 (czas między zderzeniami), a przebywana odległość wynosi x_0, to ze wzoru z poprzedniego zadania (po unormowaniu!) wyprowadź równanie dyfuzji:

$$P(x,t) = \frac{1}{4\pi Dt} e^{-x^2/4Dt},$$

oraz wyznacz stałą dyfuzji D.

2 Rozkłady reprezentatywne makrostanów i elementy teorii informacji

W niektórych poniższych zadaniach przydaje się uproszczony wzór Stirlinga: $\ln n! \approx n \ln n - n$

14. Mamy N rozróżnialnych cząstek i k stanów mikroskopowych. Pokazać, że stan makroskopowy realizowany przez liczby obsadzeń $(n_1, \ldots, n_k)$ jest realizowany przez $\frac{N!}{n_1! \ldots n_k!}$ stanów mikroskopowych.

15. Znaleźć rozkład reprezentatywny (rozkład realizowany przez maksymalną liczbę mikrostanów) dla makrostanu $\mathcal{K}_E = \{(p_1, p_2, \ldots) : \ 0 \leqslant p_n \leqslant 1\}$. (rozkład równomierny)

16. Znaleźć rozkład reprezentatywny dla makrostanu $\mathcal{K}_E = \{(p_1, p_2, \ldots) : \ 0 \leqslant p_n \leqslant 1, \sum_i p_i = 1 \sum_i E_i p_i = E\}$. (rozkład Gibbsa)

17. Znaleźć rozkład reprezentatywny dla makrostanu $\mathcal{K}_f = \{(p_1, p_2, \ldots) : \ 0 \leqslant p_n \leqslant 1, \sum_i p_i = 1 \sum_i h_i p_i = h\}$. Zmienna losowa h przyjmuje warości równe

kolejnym liczbom naturalnym.

18. n_i nierozróżnialnych bozonów obsadza k_i-krotnie zdegenerowany mikrostan. Udowodnić, że jest $\frac{(n_i+k_i-1)!}{n_i!(k_i-1)!}$ możliwości takiego obsadzenia stanu.

19. Wykorzystując wynik poprzedniego zadania i dzieląc widmo energii na i-krotnie zdegerowane stany, znaleźć rozkład reprezentatywny makrostanu $\mathcal{K}_E = \{(p_1, p_2, \ldots) : \ 0 \leqslant p_n \leqslant 1, \sum_i p_i = 1 \sum_i E_i p_i = E\}$ dla bozonów (statystyka Bosego-Einsteina).

20. n_i nierozróżnialnych fermionów obsadza k_i-krotnie zdegenerowany mikrostan. Udowodnić, że jest $\frac{k_i!}{n_i!(k_i-n_i)!}$ możliwości takiego obsadzenia stanu.

21. Wykorzystując wynik poprzedniego zadania i dzieląc widmo energii na i-krotnie zdegerowane stany, znaleźć rozkład reprezentatywny makrostanu $\mathcal{K}_E = \{(p_1, p_2, \ldots) : \ 0 \leqslant p_n \leqslant 1, \sum_i p_i = 1 \sum_i E_i p_i = E\}$ dla fermionów (statystyka Fermiego-Diraca).

22. Znaleźć średnią liczbę pytań, którą zadajemy identyfikując wynik rzutu kostką fałszywą o prawdopodobieństwach ścianek $(5/8, 1/8, 1/8, 1/8)$ dla optymanelgo dla tego rozkładu prawdopodobieństwa systemu identyfikacji. Obliczyć entropię Shannona dla tego rozkładu.

23. Znaleźć średnią liczbę pytań, którą zadajemy (w optymalnym systemie identyfikacji) by zidentyfikować wynik 1-krotnego, 2-krotnego i 3-krotnego rzutu fałszywą monetą o prawdopodobieństwach (9/10, 1/10). Obliczyć entropię Shanonna dla tego rozkładu.

24. Losujemy ze zbioru 3-elementowego, gdzie prawdopodobieństwa kolejnych wyników wynoszą $(8/10, 1/10, 1/10)$. Obliczyć entropię Shannona dla tego rozkładu, obliczyć średnią liczbę pytań zadawanych przy identyfikacji wyniku pojedynczego losowania, obliczyć średnią liczbę pytań zadawanych przy identyfikacji wyniku dwukrotnego losowania.

25. Udowodnić, że entropia Shanonna dla rozkładu łącznego dwóch zmiennych niezależnych jest równa sumie entropii rozkładów brzegowych.

3 Termodynamika

26. Znaleźć rozkład Gibbsa dla gazu doskonałego w pojemniku o objętości V. Znaleźć rozkład prędkości gazu.

27. Znaleźć rozkład Gibbsa dla oscylatora harmonicznego w jednym wymiarze. Jak wygląda rozkład energii? Jak wygląda rozkład prędkości dla pewnego ustalonego położenia drgającej masy?

28. Efekt dopplerowskiego poszerzenia linii widmowej - jak wygląda rozkład obserwowanej energii fotonów pochodzących z jednej linii widmowej dla gazu w pewnej niezerowej temperaturze? Zakładamy, że w temperaturze zera bezwzględnego atom emituje fotony o ściśle określonej energii.

29. Jaka jest różnica szerokości bliskich linii widmowych powietrza pochodzących od N_2 i od $C0_2$.

30. Wychodząc z sumy statystycznej dla gazu doskonałego:

$$Z = V\sqrt{2\pi mkT}^3$$

wyprowadzić równanie stanu oraz wzór na energię wewnętrzną.

31. Obliczyć entropię termodynamiczną dla rozkładu Gibbsa dla gazu doskonałego o temperaturze T i objętości V (na jedną cząstkę, następnie wykorzystując niezależność cząstek dla N cząstek).

32. Wykorzystując wzór na entropię gazu doskonałego: $S/Nk = \ln(VT^{3/2}) + S_0$, pokazać że zachodzi ogólny związek: $dQ = TdS$.

33. Wychodząc z sumy statystycznej dla gazu van der Waalsa:

$$Z(\beta; V, N) = (V - Nb)^N \left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{3N/2} \exp\left(\frac{\beta N^2 a}{V}\right)$$

wyprowadzić równanie stanu gazu oraz wzór na energię wewnętrzną.

34. Znaleźć współczynniki rozwinięcia wirialnego dla gazu van der Waalsa.

35. Znaleźć współczynniki rozwinięcia wirialnego dla gazu Berthelota opisanego równaniem:

$$\left(p + \frac{A}{TV^2}\right)(V - B) = kT$$

36. Znaleźć pierwsze trzy współczynniki rozwinięcia wirialnego dla gazu Dieterrici:

$$p\mathrm{e}^{\frac{a}{kTV}}\,(V-B)=kT$$

37. Obliczyć $c_p - c_V$ dla gazu van der Waalsa.

38. Obliczyć współczynnik rozszerzalności objętościowej dla gazu van der Waalsa. Dokonać rozwinięcia wirialnego tej wielkosci.

4 Magnetyki, kwantowa FS

39. Znaleźć zależność magnetyzacji od przyłożonego pola magnetycznego. Gdy przybliżymy tą funkcję w okolicy zera funkcją liniową, to jej współczynnik kierunkowy jest podatnością magnetyczną. Pokazać, że podatność magnetyczna jest odwrotnie proporcjonalna do temperatury.

40. Znaleźć sumę statystyczną $Z(\beta)$ dla modelu Isinga na pierścieniu (oddziaływanie tylko pomiędzy sąsiadującymi spinami, energia oddziaływania spinów $-Jx_ix_{i+1}$).

41. Korzystając ze wzoru na funkcję korelacji pomiędzy spinami oddalonymi o r węzłów:

$$\langle s_1 s_{r+1}\rangle = \frac{\mathrm{sh}^{N-r}(\beta J)\mathrm{ch}^{r}(\beta J)+\mathrm{ch}^{N-r}(\beta J)\mathrm{sh}^{r}(\beta J)}{\mathrm{sh}^{N}(\beta J)+\mathrm{sh}^{N}(\beta J)}$$

pokazać jak zachowuje się korelacja wraz ze wzrostem odległości między węzłami r, gdy liczba spinów $N\to\infty$. Jak zależy korelacja pomiędzy dwoma ustalonymi spinami od temperatury?

42. Dwuniciowa cząsteczka DNA składająca się z N par nukleotydów może być z jednego końca rozpleciona (na wskutek braku białka blokującego ten koniec). Para nukleotydów może być otwarta tylko wtedy, gdy poprzedzająca ją para również jest otwarta. Zamknięta para ma energię 0, a otwarta pewną dodatnią energię E. Znajdź sumę statystyczną dla tego łańcucha (wskazówka - jest dokładnie N możliwych stanów łańcucha).

43. Wykorzystując wzór na sumę statystyczną łańcucha jednostronnie otwartego łańcucha DNA z poprzedniego zadania:

$$Z_N = \frac{1-e^{-(N+1)E/kT}}{1-e^{-E/kT}}$$

wyznaczyć średnią liczbę otwartych ogniw w temperaturze $T << E/k$.

44. Pokazać, że dla operatora $\hat{a}$ zdefiniowanego wzorem:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(i\hat{p} + m\omega\hat{x})$$

zachodzi wzór $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = I$ (wykorzystać relację komutacji $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$).

45. Pokazać, że hamiltonian oscylatora harmonicznego:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$$

można zapisać jako: $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$.

46. Pokazać, że $\hat{a}$ działając na stan własny operatora $\hat{H}$ daje stan własny o energii o $\hbar\omega$ niższej, a operator $\hat{a}^\dagger$ stan własny o energii o $\hbar\omega$ wyższej. Jakie jest widmo operatora $\hat{H}$?

47. Wykorzystując wynik poprzedniego zadania pokazać, że $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, natomiast $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$. W jaki sposób uzyskać stan $|n\rangle$ działając na stan próżni (wyprowadzić wzór)?

48. W reprezentacji położeniowej $\hat{x} = x\cdot$, a $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$. Znaleźć w tej reprezentacji funkcję własną dla stanu podstawowego, oraz dwa kolejne stany wzbudzone.

49. Znaleźć wartość średnią operatora liczby cząstek $a^\dagger a$ dla stanu Gibbsa kwantowego oscylatora harmonicznego w temperaturze T.