

Światło

w dielektrykach

Efekty nieliniowe

I. Nierezonansowe

a) drugiego rzędu

- generacja drugiej harmonicznej,
- optyczne parametryczne wzmocnienie,
- efekt Pockelsa,
- elektro - optyczne odbicie wiązki,
- prostowanie optyczne;

Światło w dielektrykach

b) trzeciego rzędu

- generacja trzeciej harmonicznej,
- efekt Kerra - wymuszona dwójłomność, solitony optyczne,
- samoogniskowanie, samoprowadzenie (ang. self - guiding), solitony przestrzenne,
- samodyfrakcja,
- mieszanie czterech fal,
- wymuszony efekt Brillouina,
- optyczne sprzężenie fazowe.

II. Rezonansowe

- wymuszony efekt Ramana,
- nieliniowa absorpcja (ang. bleaching),
- koherentna propagacja impulsów, impulsy π i 2π ,
- optyczna fala uderzeniowa,
- oddziaływanie światło - plazma.

Światło w dielektrykach

Równanie falowe

$$\nabla^2 E - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2},$$

gdzie: P – polaryzacja ośrodka na jednostkę objętości

[($P = Nex$), N – gęstość atomów, x – amplituda drgań elektronów].

Zjawiska liniowe

$$P(t) = \varepsilon_0 \chi E(t),$$

gdzie: χ – liniowa podatność.

W silnych polach

$$\begin{aligned} P &= \varepsilon_0 (\chi E + \chi_2 E^2 + \chi_3 E^3 + \dots) \\ &= P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)} + \dots \end{aligned}$$

gdzie: χ_2, χ_3, \dots - nieliniowe współczynniki optyczne.

Nieliniowość drugiego rzędu

Niech

$$E = E_0 \sin \omega t$$

ograniczając się do dwóch pierwszych wyrazów

$$\begin{aligned} P &= \varepsilon_0 \left(\chi E_0 \sin \omega t + \chi_2 E_0^2 \sin^2 \omega t \right) = \\ &= \varepsilon_0 \left[\chi E_0 \sin \omega t + \frac{1}{2} \chi_2 E_0^2 (1 - \cos 2\omega t) \right]. \end{aligned}$$

W ogólności

$$E(t) = E_1 \exp(-i\omega_1 t) + E_2 \exp(-i\omega_2 t) + c.c.,$$

nieliniową część polaryzacji

$$P^{(2)}(t) = \varepsilon_0 \chi_2 E^2(t).$$

Podstawiając

$$\begin{aligned} P^{(2)}(t) &= \varepsilon_0 \chi_2 \{ E_1^2 \exp(-i2\omega_1 t) + E_2^2 \exp(-i2\omega_2 t) + \\ &2E_1 E_2^* \exp[-i(\omega_1 - \omega_2)t] + \\ &2E_1 E_2^* \exp[-i(\omega_1 + \omega_2)t] + c.c. \} + \\ &+ 2\varepsilon_0 \chi_2 [E_1 E_1^* + E_2 E_2^*]. \end{aligned}$$

Światło w dielektrykach

Generacja drugiej harmonicznej

Nieliniową polaryzację przedstawia wzór

$$P^{(2)}(t) = \chi_2 E^2(t).$$

Niech pole elektryczne

$$E(t) = E_0 \cos \omega t.$$

Zmiana znaku pola elektrycznego w krysztale ze środkiem inwersji

$$-P^{(2)}(t) = \chi_2 [-E(t)]^2.$$

Czyli

$$\chi_2 = 0$$

w ośrodku ze środkiem inwersji.

Wnisek:

Druga harmoniczna nie występuje w ośrodkach ze środkiem inwersji.

Nieliniowość trzeciego rzędu

Optyczny efekt Kerra

Nieliniowość trzeciego rzędu

$$P^{(3)}(t) = \varepsilon_0 \chi_3 E^3(t).$$

Niech

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t - kz).$$

to

$$P = \varepsilon_0 [\chi E_0 \cos(\omega t - kz) + \chi_3 E_0^3 \cos^3(\omega t - kz)].$$

Stąd

$$P = \varepsilon_0 \left(\chi_1 + \frac{3}{4} \chi_3 E_0^2 \right) E_0 \cos(\omega t - kz) + \varepsilon_0 \frac{\chi_3}{4} E_0^3 \cos 3(\omega t - kz).$$

Wyraz drugi zaniedbujemy

$$P = \varepsilon_0 \left(\chi_1 + \frac{3}{4} \chi_3 E_0^2 \right) E_0 \cos(\omega t - kz)$$

W przybliżeniu fali płaskiej

$$I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 n_0 E_0^2,$$

$$P = \varepsilon_0 \left(\chi_1 + \frac{3}{2} \frac{\chi_3}{c \varepsilon_0 n_0} I \right) E_0 \cos(\omega t - kz).$$

zatem

Światło w dielektrykach

$$P = \varepsilon_0(n^2 - 1)E_0 \cos(\omega t - kz),$$

gdzie:

$$n^2 = 1 + \chi_1 + \frac{3}{2} \frac{\chi_3}{c\varepsilon_0 n_0} I.$$

Po rozwinięciu w szereg Taylora

$$n \simeq n_0 + \frac{3}{4} \frac{\chi_3}{c\varepsilon_0 n_0^2} I = n_0 + KI,$$

gdzie: $n_0^2 = 1 + \chi_1$, a

$$K = \frac{3}{4} \frac{\chi_3}{c\varepsilon_0 n_0^2}$$

jest stałą Kerra.

Dla CS_2 : $K = 2.6 \times 10^{-14} \text{ cm}^2/\text{W}$.

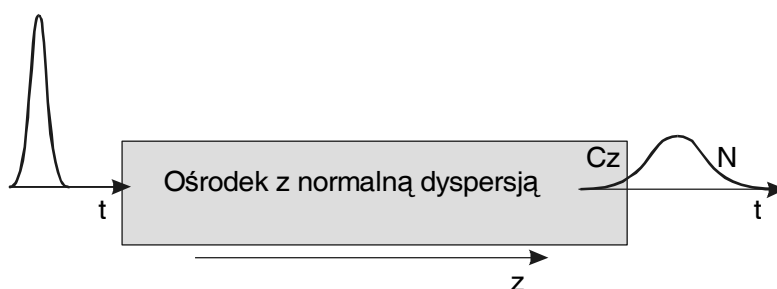
Większe K rzędu $10^{-14} - 10^{-7}$ mają domieszkowane szkła, materiały organiczne ($10^{-10} - 10^{-8}$) i półprzewodniki ($10^{-10} - 10^{-2}$).

Światło w dielektrykach

Samomodulacja fazowa

- R.R. Alfano, S.L. Shapiro, „Observation of Self - Phase Modulation and Small - scale Filaments in Crystals and Glasses”, Phys. Rev. Lett. 24, 592 (1970);
- R.R. Alfano, S.L. Shapiro, „Direct Distorsion of Electronic Clouds of Rare - Gas Atoms in Electric Fields”, Phys. Rev. Lett. 24, 1217 (1970);
- A. Brodeur, S.L. Chin, J. Opt. Soc. Am. B, 16, 637, (1999).

Ośrodek z normalną dyspersją



Wpływ dyspersji materiałowej na przechodzący impuls.
Cz oznacza czerwoną część widma, N - niebieską.

Optyczny efekt Kerra

Impuls

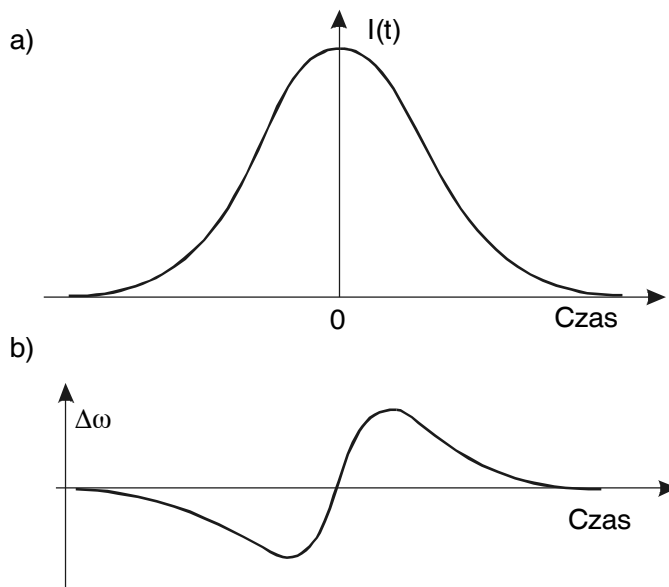
$$E(z, t) = E_0(z, t) \exp[-i(\omega_0 t - kz)] + c. c.$$

Światło w dielektrykach

W ośrodku o długości L faza

$$\varphi(L, t) = \varphi(L) + \varphi_{NL}(t) = \frac{2\pi n_0 L}{\lambda} + \frac{2\pi K I(t) L}{\lambda}.$$

Samomodulacja fazowa.



Obwiednia impulsu(a) oraz zmiana częstości w wyniku samomodulacji fazowej (b).

Część nieliniową

$$\varphi_{NL}(t) = -\frac{2\pi K L}{\lambda} I(t).$$

Nowa częstość

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega(t) = \omega_0 + \frac{d}{dt} \varphi_{NL}(t)$$

Zmianaczęstości

$$\Delta\omega(t) = -\frac{2\pi K L}{\lambda} \frac{dI(t)}{dt}.$$

Przyjmijm, że w światłowodzie rozchodzi się impuls gaussowski

Światło w dielektrykach

$$I(t) = I_0 \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2\right],$$

to

$$\Delta\omega(t) = \frac{2\pi KL}{\lambda} \frac{t}{T^2} I_0 \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2\right].$$

Dla $t > 0$ (zbocze) przesunięcie częstotliwości jest w kierunku niebieskiej części widma.

Niech

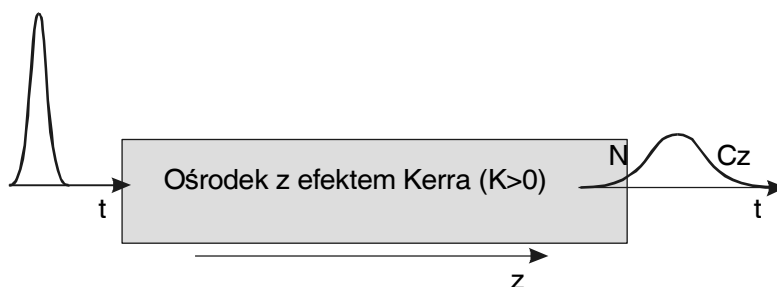
$$I(t) = I_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{t}{\tau_0}\right),$$

wtedy

$$\varphi_{NL}(t) = -\frac{2\pi KL}{\lambda} I_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{t}{\tau_0}\right),$$

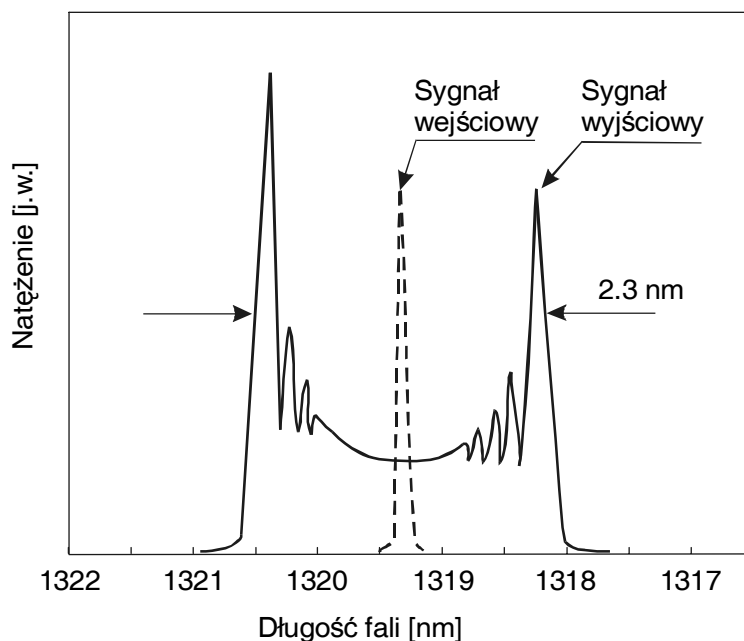
a

$$\Delta\omega(t) = \frac{2\pi KL}{\lambda \tau_0} I_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \operatorname{tgh}\left(\frac{t}{\tau_0}\right).$$



Wpływ samomodulacji fazowej na rozkład częstości w czasie przechodzącego przez ośrodek impulsu.

Światło w dielektrykach



Widma rozszerzonego impulsu w wyniku samomodulacji fazowej

Dla światłowodu o długości 200 m.
Obliczymy zmianę λ przez efekt Kerra.
Zakładamy trójkątny impuls o podstawie 200 ps, przy $I_{\max} = 160 \text{ MW/cm}^2$. $n_{\text{rdzenia}} = 1.55$, $K = 3.18 \times 10^{-20} \text{ m}^2/\text{W}$. Niech $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$.

Jeżeli $2T$ będzie szerokością podstawy impulsu, to

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{I_0}{T}.$$

Zmiana częstotliwości

Światło w dielektrykach

$$\begin{aligned}\Delta\nu &= -\frac{K}{\lambda}L\frac{I_0}{T} = \\ &= -\frac{3.18 \times 10^{-20}}{1.55 \times 10^{-6}} 200 \frac{1.6 \times 10^{12}}{10^{-10}} \\ &= -6.57 \times 10^{10} \text{ Hz.}\end{aligned}$$

Ponieważ

$$\lambda = \frac{c}{\nu},$$

$$\Delta\lambda = -\lambda^2 \frac{1}{c} \Delta\nu,$$

to

$$\Delta\lambda_p = (1.55)^2 \left(\frac{1}{3 \times 10^{14}} \right) (6.57 \times 10^{10}) = 0.53 \text{ nm.}$$

Rozszerzenie ze względu na modulację impulsową

$$\Delta\nu_a = \frac{1}{100 \times 10^{-12}} = 1 \times 10^{10} \text{ Hz.}$$

To odpowiada szerokości linii

$$\Delta\lambda_a = 0.08 \text{ nm.}$$

Z dodatniej i ujemnej część trójkąta

$$\Delta\lambda = 2(\Delta\lambda_a + \Delta\lambda_p) = 1.22 \text{ nm.}$$

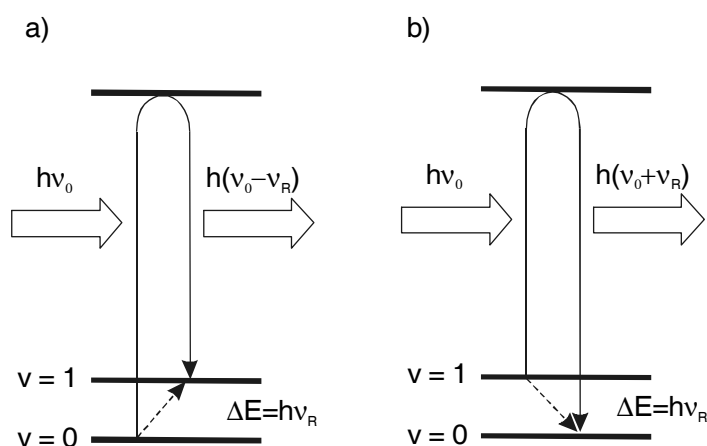
Wymuszony efekt Ramana

Wymuszone rozpraszanie Ramana – oddziaływanie światła z drganiami SiO_2 , a ogólnie z cząsteczkami ośrodka.

Częstotliwości:

w obszarze stokesowskim (różnica częstotliwości)

antystokesowskim (suma częstotliwości)



Schemat rozpraszania Ramana stokesowskiego (a) i antystokesowskiego (b). Linie poziome reprezentują stany oscylacyjne.

W widmie: linie stokesowskie, antystokesowskie i linie o częstotliwościach

$$\nu_0 \pm n\nu_R.$$

Obraz kwantowo-mechaniczny

Światło w dielektrykach

Do ośrodka wchodzi dwie fale różniące się częstotliwością Stokesa.

Jeśli moc fali o niższej częstotliwości (wiązki sondującej) będzie rosła kosztem mocy fali pompującej (o wyższej częstotliwości) → wymuszone rozpraszanie Ramana.

Zmiana faza wskutek samomodulacji fazowej

$$\Delta\phi = 2\pi K \frac{PL}{A\lambda_0},$$

gdzie: P – moc optyczna, A – przekrój wiązki, a L odległość.

Podstawiając stałą Kerra

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{3}{4} \frac{\chi_3}{c\epsilon_0 n_0^2} \frac{PL}{A\lambda_0}.$$

Można zapisać w ogólności

$$\chi_3 = \chi_3^R + i\chi_3^I.$$

Część zespolona z fazy

$$\exp(-i\phi)$$

ma charakter wzmocnienia

$$\gamma = 3\pi \frac{\chi_3^I}{c\epsilon_0 n_0^2} \frac{PL}{A\lambda_0}.$$

Wzmocnienie jest proporcjonalne do mocy

Światło w dielektrykach

optycznej P . Jest to *wzmocnienie Ramana*.

Lasery ramanowskie

Moc wiązki sondującej zależy eksponencjalnie od mocy wiązki pompującej

$$P_R(L) = P_R(0) \exp[A\gamma_R P_p],$$

gdzie: A – stała zależna od długości ośrodka, stopnia pokrywania się wiązek, ich średnicy, polaryzacji światła, tłumienności ośrodka,

γ_R jest współczynnikiem wzmocnienia rozpraszania Ramana

$$\gamma_R \approx \chi_3 \frac{1}{\lambda_0}.$$

Światło w dielektrykach

Wymuszone rozpraszanie Brillouina

Oddziaływanie fal elektromagnetycznych z drganiami akustycznymi. Wymuszone rozproszenie Brillouina – do tyłu.

Częstotliwość przesunięta o

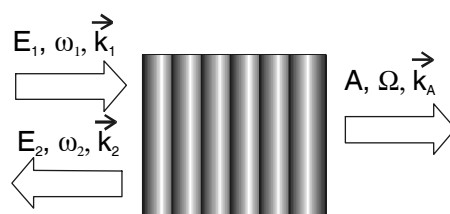
$$f = \frac{2nv_a}{\lambda},$$

gdzie: n jest współczynnikiem załamania ośrodka, v_a jest prędkością fali dźwiękowej w ośrodku.

Za efekt Brillouina odpowiedzialny jest cały ośrodek.

Elektrostrykcja

Fala akustyczna może zasilać optyczną i odwrotnie.



Schemat wymuszonego rozpraszania Brillouina.

Fala akustyczna o amplitudzie A , częstotliwości Ω i wektorze falowym \vec{k}_A .

Częstość stokesowska

Światło w dielektrykach

$$\omega_2 = \omega_1 - \Omega_B,$$

gdzie: Ω_B – częstość Brillouina.

Równocześnie

$$\vec{k}_2 = \vec{k}_1 + \vec{k}_B.$$

Ponieważ

$$|\vec{k}_i| = \frac{n\omega_i}{c}$$

to częstość Brillouina

$$\Omega_B = \frac{n\nu}{c}(\omega_1 + \omega_2),$$

lub

$$\Omega_B = 2 \frac{n\nu}{c} \frac{\omega_1}{1 + \frac{n\nu}{c}}.$$

Ponieważ $\nu \ll c/n$

$$\Omega_B = \frac{n\nu}{c} \omega_1,$$

natomiast

$$\vec{k}_B = 2\vec{k}_1.$$

Moc rozpraszana

$$P_2(z) = P_2(L) \exp[\gamma_B P_1(L - z)],$$

gdzie: γ_B – współczynnik wzmocnienia wymuszonego rozpraszania Brillouina.

Podobne rozważania są prawdziwe dla częstości antystokesowskiej.

Światło w dielektrykach

Częstotliwość Briullouina dla SiO_2 :
 17000 MHz , a dla H_2O – 5690 MHz .

Dla szkła optycznych ta częstotliwość zawiera się w przedziale $11000 - 16000 \text{ MHz}$.

Światło w dielektrykach

Samoogniskowanie

- D. Stricland, P.B. Corkum, J. Opt. Soc. Am. B, 11, 492 (1994)

Samopułapkowanie (ang. *self – trapping*) → utrzymanie średnicy wiązki rozchodzącej się w dielektryku na znacznych odległościach.

W wyniku efektu Kerra

$$n = n_0 + \delta n.$$

Krytyczny kąt

$$\cos \theta_0 = \frac{n_0}{n_0 + \delta n}.$$

Ponieważ δn jest małe dla większości materiałów oraz θ_0 jest znacznie mniejsze od jedności, więc

$$1 - \frac{1}{2}\theta_0^2 = 1 - \frac{\delta n}{n_0}.$$

Stąd

$$\theta_0 = \left(2 \frac{\delta n}{n_0}\right)^{1/2}.$$

Kąt rozbieżności dyfrakcyjnej

$$\theta_d = \frac{0.61\lambda}{n_0 d}.$$

Samopułapkowanie wystąpi, jeśli ten kąt będzie mniejszy od kąta granicznego. W

Światło w dielektrykach granicy

$$\theta_d = \theta_0.$$

Zatem

$$\delta n = \frac{1}{2} n_0 \left(\frac{0.61\lambda}{n_0 d} \right)^2.$$

Jeżeli

$$n = n_0 + KE_0^2 = n_0 + \delta n,$$

to krytyczną moc optyczną, od której samopułapkowanie może wystąpić

$$P_{kr} = \frac{\pi}{4} d^2 E_0^2 \approx 0.15 \frac{\lambda^2}{Kn_0}.$$

Jeśli K jest dodatnie, to w obszarze większego natężenia światła ośrodek ma większy współczynnik załamania i będzie zachowywał się jak soczewka.

Zmiana ogniskowej przez zmianę mocy promieniowania

$$f \approx \frac{\pi}{2} \left(\frac{n_0}{KE_0^2} \right)^{1/2} a,$$

gdzie: a jest szerokością wiązki gaussowskiej.

Można oszacować moc krytyczną odpowiadającą mocy promieniowania, przy

Światło w dielektrykach

którym dyfrakcja dana w przybliżeniu przez wyrażenie

$$\theta \approx \frac{\lambda}{\pi a}$$

będzie kompensowana przez siłę skupiającą ośrodka z efektem Kerra.

Dyfrakcję możemy przybliżyć efektem działania soczewki rozpraszającej o ogniskowej

$$f_d \approx \frac{a}{\theta} \approx \frac{1}{2}ka^2.$$

Zatem

$$f = f_d$$

i otrzymana w ten sposób moc krytyczna (progowa) wynosi

$$P_{kr} \approx \frac{\pi}{16} (c\epsilon_0) \frac{\lambda_0^2}{K}.$$

Wynik co do rzędu jest poprawny.

Dokładniejsze rozważania dają

$$P_{kr} \approx 0.039(c\epsilon_0) \frac{\lambda_0^2}{K}.$$

Długość samoogniskowania

$$l = \frac{1}{4} \frac{a^2 \sqrt{\frac{c}{K}}}{\sqrt{P} - \sqrt{P_{kr}}},$$

Światło w dielektrykach

gdzie: a jest promieniem wiązki gaussowskiej.

Struktura włóknista wiązki.

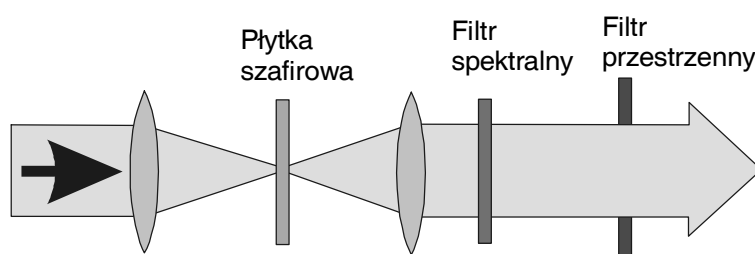
Światło w dielektrykach

Superkontinuum

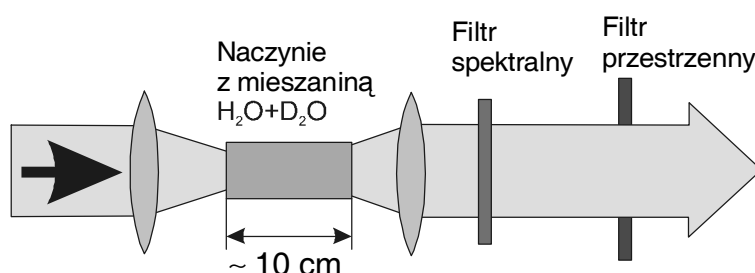
- R. R. Alfano, S. L. Shapiro, „Emission in the region 4000-7000 angstrom via four-photon coupling in glass”, Phys. Rev. Lett.24, 584 (1970).

Zaobserwowana w 1970 r.

Rola laserów $Ti:Al_2O_3$. Odpowiedzialne - optyczne procesy nieliniowe.



Układ do generacji światła białego (400 - 1800 nm) za pomocą impulsów femtosekundowych.



Układ do generacji światła białego za pomocą impulsów pikosekundowych.

Tutaj - rozpraszania Ramana, samoogniskowania i inne procesy

Światło w dielektrykach

Mieszanie czterech fal

Z zasady zachowania energii wynika, że

$$v_1 + v_2 = v_3 + v_4,$$

z zasady zachowania pędu

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3 + \vec{k}_4.$$

Polaryzacja

$$\vec{P}^{(3)}(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2} \chi_3 \vec{E}_1(\vec{r}, t) \vec{E}_2(\vec{r}, t) \vec{E}_3(\vec{r}, t).$$

Zapiszmy ten wynik skalarnie

$$P^{(3)}(t) = \chi_3 E^3(t).$$

Niech w ośrodku oddziałują trzy fale o częstościach ω_1 , ω_2 i ω_3

$$E(t) = \operatorname{Re}\{E(\omega_1) \exp(i\omega_1 t)\} + \\ \operatorname{Re}\{E(\omega_2) \exp(i\omega_2 t)\} + \operatorname{Re}\{E(\omega_3) \exp(i\omega_3 t)\}$$

Zapiszmy pole w postaci

$$E(t) = \sum_{q=\pm 1, \pm 2, \pm 3} \frac{1}{2} E(\omega_q) \exp(i\omega_q t),$$

gdzie: $\omega_{-q} = -\omega_q$ i $E(-\omega_q) = -\omega_q E^*(\omega_q)$.

Otrzymujemy 216 wyrazów (6^3)

Światło w dielektrykach

$$P^{(3)}(t) = \frac{1}{2} \chi_3 \times \\ \sum_{q,r,l=\pm 1,\pm 2,\pm 3} E(\omega_q)E(\omega_r)E(\omega_l) \times \\ \times \exp[i(\omega_q + \omega_r + \omega_l)].$$

Jeżeli

$$\omega_2 = \omega_3 + \omega_4 - \omega_1,$$

Jest sześć permutacji

$$P^{(3)}(\omega_3 + \omega_4 - \omega_1) = \chi_3 E(\omega_3)E(\omega_4)E^*(\omega_1).$$

Może być: $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3$,

$\omega_4 = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3$, $\omega_4 = -\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, itd.

Literatura

1. B. E. A. Saleh, M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, John Wiley & Sons, Inc. New York – Singapore 1991.
2. W. Lauterborn, T. Kurz, W. Wiesenfeldt, *Coherent Optics*, Springer-Verlag, Berlin 1993.
3. M. L. Riazat, *Introduction to High Speed Electronics and Optoelectronics*, John Wiley & Sons, New York 1996.
4. R. Mentzel, *Photonics*, Springer-Verlag, Berlin 2001.
5. A. K. Ghatak, K. Thyagarajan, *Introduction to fiber optics*, Cambridge University Press, Cambridge 2000.
6. E. Rosencher, B. Vinter, *Optoelectronics*, Cambridge University Press, Cambridge 2002.
7. R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, Academic Press, San Diego – New York 1992.
8. M. Mansuripur, *Classical Optics and its Applications*, Cambridge University Press, Cambridge 2002.

Światło w dielektrykach

- 9.** F. Ratajczyk, *Optyka ośrodków anizotropowych*, PWN, Warszawa 1994.
- 10.** K. Iizuka, *Elements of Photonics*, Wiley and Sons, New York 2002.
- 11.** J. Advantovic, D. Uttamchandani, *Principles of modern optical system*, Artech House, Norwood (MA) 1989.
- 12.** M. Remoissenet, *Waves Called Solitons*, Springer-Verlag, Berlin 2003.
- 13.** P. W. Milonni, J. H. Eberly, *Lasers*, John Wiley & Sons, New York 1988.
- 14.** B. Ziętek, *Optoelektronika*, Wyd. UMK, Toruń 2004.

Prędkość fazowa i grupowa światła

Fala

$$A(z, t) = A_0 \exp[i(\omega t - kz)],$$

lub

$$A(z, t) = A_0 \exp\left[i\omega \left(t - \frac{z}{\omega/k} \right) \right].$$

Argument jest funkcją czasu i współrzędnej

$$t - \frac{z}{\omega/k}.$$

Wielkość

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \lambda v$$

→ *prędkość fazowa.*

W próżni

$$v_f = c,$$

w ośrodku

$$v_f = \frac{c}{n}.$$

Długość fali w ośrodku

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}.$$

Światło w dielektrykach

Wektor falowy

$$k = k_0 n.$$

W ośrodku liniowym częstotliwość światła nie ulega zmianie

Impuls światła – paczka falowa

Prędkość grupowa – v_g :

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}.$$

Ponieważ $\lambda = 2\pi/k$ i $\omega = v_f k$, to

$$v_g = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda}.$$

Dla fali monochromatycznej: $v_g = v_f$.

Prędkość grupowa może być $> c$!

Składamy dwie fale o częstościach $\omega \pm \delta\omega/2$
i $k \pm \delta k/2$ i takiej samej amplitudzie

$$A_1 = A_0 \exp \left\{ i \left[\left(\omega + \frac{\delta\omega}{2} \right) t - \left(k + \frac{\delta k}{2} \right) \right] \right\},$$

$$A_2 = A_0 \exp \left\{ i \left[\left(\omega - \frac{\delta\omega}{2} \right) t - \left(k - \frac{\delta k}{2} \right) \right] \right\}.$$

W sumie

Światło w dielektrykach

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= 2iA_0 \sin\left[\frac{1}{2}(\delta\omega t - \delta kz)\right] \exp[i(\omega t - kz)], \end{aligned}$$

Część rzeczywista

$$A = \text{Re}(A) = -2A_0 \sin\left[\frac{1}{2}(\delta\omega t - \delta kz)\right] \sin(\omega t - kz).$$

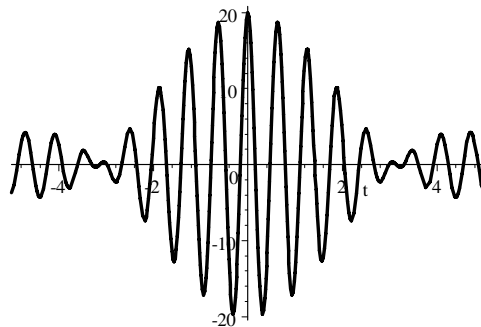
Prędkość obwiedni

$$v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} \rightarrow \frac{d\omega}{dk}.$$

Dla nieskończenie wielu fal

$$\begin{aligned} A &= \exp[i(k_0 z - \omega_0 t)] \times \\ &\quad \times \int_{k_0 - \delta k}^{k_0 + \delta k} A(k) \exp[i(k - k_0)z - (\omega - \omega_0)t] dk. \end{aligned}$$

Prędkość fazowa wypadkowej fali: $v_f = \omega_0/k_0$.

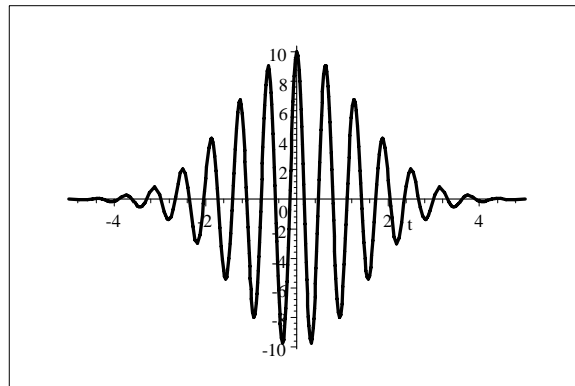


Wypadkowa fala złożona z harmonicznym fal o różnych, mało różniących się częstościach, ale takich samych

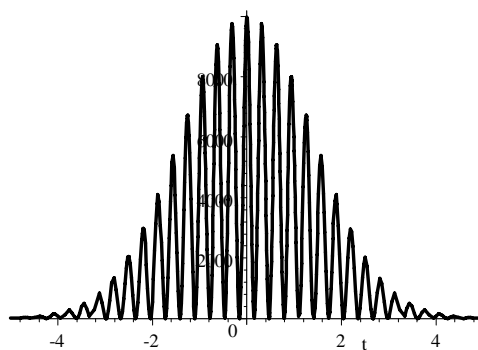
Światło w dielektrykach

amplitudach

Dla obwiedni zadanej funkcją Gaussa



Natężenie impulsu gaussowskiego



Dyspersja

Definicje

Związek dyspersyjny

$$k = n(\omega) \frac{\omega}{c},$$

Prędkość fazowa

$$v_f = \frac{c}{n(\omega)}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} &= \frac{dk}{d\omega} = \frac{n}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega} = \\ &= \frac{1}{c} \left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right). \end{aligned}$$

Prędkość grupowa

$$v_g = \frac{c}{n + \omega \frac{dn(\omega)}{d\omega}} = \frac{c}{n - \lambda_0 \frac{dn(\lambda_0)}{d\lambda}} = \frac{c}{n_g}.$$

gdzie:

$$n_g(\lambda_0) = n - \lambda_0 \frac{dn(\lambda_0)}{d\lambda}.$$

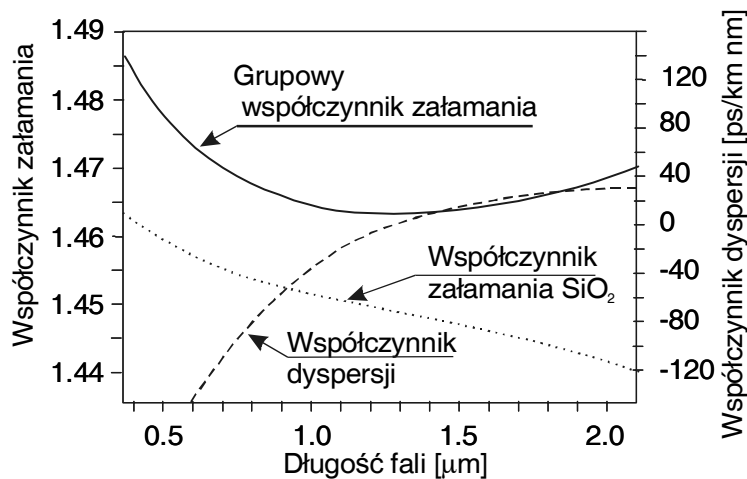
grupowy współczynnik załamania.

Światło w dielektrykach

Dyspersja normalna – $dn/d\omega > 0$ ($dn/d\lambda < 0$)
→ prędkość grupowa jest mniejsza od fazowej.

Dyspersja anomalna – $dn/d\omega < 0$,
($dn/d\lambda > 0$) → prędkość grupowa może znacznie przewyższać fazową.

Manipulacja wielkością dyspersji → „zatrzymanie” światła.



Współczynnik załamania SiO_2 , grupowy współczynnik załamania i współczynnik dyspersji D_λ kwarcu

Współczynnik dyspersji

$$D_\lambda = -\left(\frac{\lambda_0}{c}\right) \frac{d^2 n(\lambda_0)}{d\lambda^2}.$$

Jednostka: [ps/km nm]

Światło w dielektrykach

Dyspersja średnia

$$\frac{n(\lambda = 486 \text{ nm}) - n(\lambda = 682 \text{ nm})}{2}.$$

Refrakcja – $n - 1$,

Dyspersja względna – stosunek dyspersji średniej do refrakcji światła żółtego ($\lambda = 589 \text{ nm}$)

$$\frac{n_f - n_c}{n_d - 1} = \Delta.$$

Odwrotność Δ – liczba Abbego.

Równanie Cauchy'ego

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots,$$

gdzie: A , B i C są stałe.

Klasyczna teoria dyspersji

Niech: $\sigma = 0$ i $\rho = 0$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

Równanie falowe

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}.$$

Częstość drgań własnych elektronu

Światło w dielektrykach

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_s}{m}}.$$

k_s – stała „sprężystości”, m – masa elektronu.

Równanie ruchu

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = e \vec{E}(\vec{R}, t) - k_s \vec{x},$$

gdzie: \vec{R} – wektor położenia środka masy układu elektron – jądro.

Zmienne w czasie pole indukuje elektryczny moment dipolowy dipola złożonego z elektronu i jądra

$$\vec{p} = e \vec{x},$$

Jeżeli: N – gęstość atomów, to

$$\vec{P} = N e \vec{x}.$$

Niech

$$\vec{E}(z, t) = \vec{e} E_0 \cos(\omega t - kz),$$

to rozwiązanie

$$\vec{x} = \vec{e} \left(\frac{e E_0 / m}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \cos(\omega t - kz) = \frac{\kappa(\omega)}{e} \vec{E},$$

a wtedy

$$\vec{p} = \kappa(\omega) \vec{E},$$

Światło w dielektrykach

gdzie: $\kappa(\omega)$ – polaryzowalność ośrodka.

Wektor przesunięcia \vec{D}

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = [\varepsilon_0 + N\kappa(\omega)] \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E},$$

gdzie: $\varepsilon_r = 1 + N\kappa(\omega)/\varepsilon_0$.

Musi być spełniony warunek

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{N\kappa(\omega)}{\varepsilon_0} \right) = \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega) = k_0^2 n^2(\omega), \end{aligned}$$

Dla Z elektronów

$$\kappa(\omega) = \sum_{j=1}^Z \frac{e^2/m}{\omega_j^2 - \omega^2}.$$

Równanie ruchu

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + 2\eta \frac{d\vec{x}}{dt} + \omega_0^2 \vec{x} \\ = \vec{e} \frac{e}{m} E_0 \exp[-i(\omega t - kz)], \end{aligned}$$

gdzie: 2η jest stałą tłumienia.

Światło w dielektrykach

Rozwiązaniem jest

$$\vec{x} = \vec{a} \exp[-i(\omega t - kz)],$$

jeśli

$$\vec{a} = \frac{-\frac{e}{m} E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\eta\omega} \vec{e}.$$

i

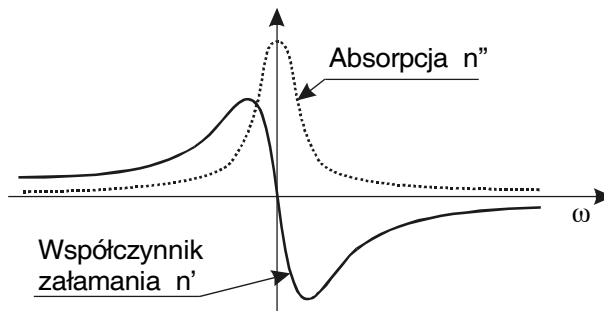
$$\vec{p} = e\vec{x} = \kappa(\omega)\vec{e} E_0 \exp[-i(\omega t - kz)].$$

Polaryzowalność

$$\kappa(\omega) = \sum_{j=1}^Z \frac{e^2/m}{\omega_j^2 - \omega^2 - 2i\eta_j\omega} = \kappa'(\omega) + i\kappa''(\omega).$$

Czyli też

$$n^2(\omega) = [n'(\omega) + in''(\omega)]^2.$$



Rzeczywista i urojona część zespolonego współczynnika załamania

Niech

$$\vec{E}(z, t) = \vec{e} E_0 \exp[-i(\omega t - kz)]$$

Światło w dielektrykach

i ponieważ

$$k = \frac{\omega}{c} n(\omega) = \frac{\omega}{c} [n'(\omega) + in''(\omega)],$$

to

$$\vec{E}(z, t) = \vec{e} E_0 \exp\left[-\frac{\omega}{c} z n''(\omega)\right] \times \\ \times \exp\left\{-i\left[\omega t - \frac{\omega}{c} z n'(\omega)\right]\right\}.$$

Inaczej

$$I_\omega(z) = I_\omega(0) \exp[-\alpha(\omega)z],$$

gdzie: $\alpha(\omega)$ – współczynnik absorpcji

$$\alpha(\omega) = \frac{2Ne^2}{\epsilon_0 mc} \sum_j \frac{\eta_j \omega^2}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + 4\eta_j^2 \omega^2}.$$

Wzór Lamberta – Beera.

Rzeczywista część

współczynnika załamania

jest związana z

prędkością fazową fali,

Część urojona – z tłumieniem

(wzmocnieniem).

Światło w dielektrykach

Tak więc

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{Ne^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \sum_{i=1}^z \frac{\lambda_i^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2}.$$

Przy $\lambda > \lambda_i$

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0.$$

Ponieważ

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{1}{2}m(m-1)x^2 + \dots$$

przy $|x| < 1$, otrzymujemy

$$\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2} = \left(1 - \frac{\lambda_i^2}{\lambda^2}\right)^{-1} = 1 + \frac{\lambda_i^2}{\lambda^2} + \left(\frac{\lambda_i^2}{\lambda^2}\right)^2 + \dots$$

Ograniczając się do pierwszych dwóch wyrazów

$$n(\lambda) = 1 + \frac{Ne^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \sum_{i=1}^z \lambda_i^2 \left(1 + \frac{\lambda_i^2}{\lambda^2}\right),$$

lub inaczej (wzór Newtona)

$$n(\lambda) - 1 = A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2}\right).$$

Często wystarczy przyjąć, że

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3}.$$

Światło w dielektrykach

Wzór Sellmeiera

$$n^2 = 1 + \sum_i \frac{B_i \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2},$$

gdzie: B_i – stałe, a λ_i – parametry

Zwykle wystarczy wziąć trzy wyrazy

$$n^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 \frac{B_i \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2},$$

Np.

Szkło	SiO_2	$SiO_2 + 13.5\% GeO_2$
B_1	0.696750	0.711040
λ_1	0.069066	0.064270
B_2	0.408218	0.451885
λ_2	0.115662	0.129408
B_3	0.890815	9.42547
λ_3	9.900559	9.425478

Nieliniowe równanie Schrödingera

Równanie

$$\frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 D(z, t)}{\partial t^2} = 0,$$

Rozwiązaniem \rightarrow impuls

$$E(z, t) = f(z, t) \exp[i(\omega_0 t - \beta_0 z)],$$

$f(z, t)$ – obwiednia impulsu, β_0 jest stałą propagacji

$$\beta_0 = \beta(\omega_0) = \frac{\omega_0}{c} n(\omega_0).$$

W szczególności: $\beta_0 = k$

Interesuje nas obszar częstościowy i czasowy.

Transformaty Fouriera

$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(z, \omega) \frac{1}{2\pi} [\exp(i\omega t)] d\omega,$$

gdzie:

Światło w dielektrykach

$$\Psi(z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(z, t) [\exp(-i\omega t)] dt$$

i przy

$$D(z, t) = \varepsilon(\omega) E(z, t)$$

równanie falowe

$$\frac{\partial^2 \Psi(z, \omega)}{\partial z^2} + \beta^2(\omega) \Psi(z, \omega) = 0,$$

gdzie:

$$\beta^2(\omega) = \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Niech

$$\Psi(z, \omega) = \varphi(z, \omega - \omega_0) \exp(-i\beta_0 z),$$

gdzie: $\varphi(z, \omega - \omega_0)$ jest widmem –
fourierowską transformata amplitudy
impulsu $f(z, t)$ taką, że

$$f(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z, \omega - \omega_0) \times \\ \times \frac{1}{2\pi} \exp[i(\omega - \omega_0)t] d(\omega - \omega_0).$$

Niech $f(z, t)$ – wolnozmiennie

Światło w dielektrykach

$$2i\beta_0 \frac{\partial \varphi(z, \omega - \omega_0)}{\partial z} + (\beta^2 - \beta_0^2) \varphi(z, \omega - \omega_0) = 0.$$

Dla małej dyspersji

$$\beta(\omega) = \beta_0 + (\omega - \omega_0)\beta' + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\beta'',$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \beta' &= \frac{\partial \beta}{\partial \omega} = \frac{1}{c} \left[n(\omega) + \omega \frac{dn(\omega)}{d\omega} \right] = \\ &= \frac{1}{c} \left[n(\lambda) - \lambda \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} \right] = \frac{n_g}{c} = \frac{1}{v_g}, \end{aligned}$$

v_g – prędkość grupowa,

n_g – grupowy współczynnik załamania,

$$\begin{aligned} \beta'' &= \frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} = \frac{1}{c} \left[2 \frac{\partial n(\omega)}{\partial \omega} + \omega \frac{d^2 n(\omega)}{d\omega^2} \right] = \\ &= -\frac{1}{v_g^2(\omega)} \frac{dv_g(\omega)}{d\omega} = \frac{\lambda}{2\pi c^2} \left[\lambda^2 \frac{d^2 n}{d\lambda^2} \right]. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi(z, \omega - \omega_0)}{\partial z} + \\ &+ i \left[(\omega - \omega_0)\beta' + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\beta'' \right] \varphi(z, \omega - \omega_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Światło w dielektrykach

Przejdźmy do obszaru czasowego.

Pomnóżmy powyższe przez

$$\frac{1}{2\pi} \{ \exp[i(\omega - \omega_0)t] \} d(\omega - \omega_0)$$

i scałkujemy po ω .

Ponieważ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z, \omega - \omega_0) \frac{1}{2\pi} \times$$

$$\times \{ \exp[i(\omega - \omega_0)t] \} d(\omega - \omega_0) = f(z, t),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0) \varphi(z, \omega - \omega_0) \frac{1}{2\pi} \times$$

$$\times \{ \exp[i(\omega - \omega_0)t] \} d(\omega - \omega_0) = i \frac{\partial}{\partial t} f(z, t),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 \varphi(z, \omega - \omega_0) \frac{1}{2\pi} \times$$

$$\times \{ \exp[i(\omega - \omega_0)t] \} d(\omega - \omega_0) = -i \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(z, t),$$

to

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \beta' \frac{\partial}{\partial t} \right) f(z, t) + i \frac{\beta''}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(z, t) = 0,$$

Jeśli uwzględnimy efekt nieliniowy $-\delta\beta$,
wtedy

$$\frac{\partial \varphi(z, \omega - \omega_0)}{\partial z} - i \left[\delta\beta + (\omega - \omega_0) \beta' + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 \beta'' \right]$$

Światło w dielektrykach

$$\times \varphi(z, \omega - \omega_0) = 0.$$

Stąd po transformacji

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \beta' \frac{\partial}{\partial t} \right) f(z, t) + i \frac{\beta''}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(z, t) = i f(z, t) \delta \beta.$$

inaczej

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \beta' \frac{\partial}{\partial t} \right) f(z, t) + i \frac{\beta''}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(z, t) - i \gamma f(z, t) |f(z, t)|^2 = 0,$$

Jeśli nieliniowość wynika z optycznego efektu Kerra, to

$$\gamma = \frac{\omega_0}{2c} \frac{K}{\epsilon_0},$$

a K jest stałą Kerra.

Jest to *nieliniowe równania Schrödingera* (*NRS*, ang. *NLS*).

Podstawmy

$$\tau = \left(t - \frac{z}{v_g} \right) = (t - \beta' z), \quad \xi = z.$$

Ponieważ

Światło w dielektrykach

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} - \beta' \frac{\partial}{\partial \tau},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau},$$

to

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \xi} + i \frac{1}{2} \beta'' \frac{\partial^2 f(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} - i \gamma f(\xi, \tau) |f(\xi, \tau)|^2 \\ = 0,\end{aligned}$$

lub inaczej

$$\begin{aligned}i \frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \beta'' \frac{\partial^2 f(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} + \gamma f(\xi, \tau) |f(\xi, \tau)|^2 \\ = 0.\end{aligned}$$

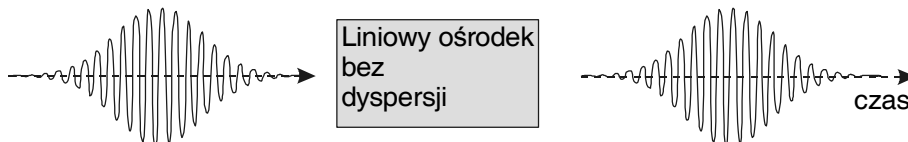
Jest to najczęściej spotykana postać NRS.

Ośrodek bezdyspersyjny, liniowy

$$\frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \xi} = 0.$$

Rozwiązanie

$$f = f_0(\tau) = f_0\left(t - \frac{z}{v_g}\right).$$



Impuls po przejściu liniowego ośrodka bezdyspersyjnego

Energia

$$\frac{\partial f(\xi, \tau) f^*(\xi, \tau)}{\partial \xi} = \frac{\partial |f(\xi, \tau)|^2}{\partial \xi} = 0.$$

Również propaguje się z prędkością grupową v_g .

Ośrodek dyspersyjny

$$\frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \xi} + i \frac{1}{2} \beta'' \frac{\partial^2 f(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} = 0.$$

Rozwiązania szukamy w postaci

Światło w dielektrykach

$$f(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, \omega - \omega_0) \times \\ \times \exp[i(\omega - \omega_0)\tau] d(\omega - \omega_0).$$

Po podstawieniu

$$i \frac{\partial \varphi(\xi, \omega - \omega_0)}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \beta''(\omega - \omega_0)^2 \varphi(\xi, \omega - \omega_0),$$

o rozwiązaniu

$$\varphi(\xi, \omega - \omega_0) = \varphi(\omega - \omega_0) \exp\left[-i \frac{1}{2} \beta''(\omega - \omega_0)^2 \xi\right],$$

gdzie: $\varphi(\omega - \omega_0) \equiv \varphi(0, \omega - \omega_0)$.

Rozwiązanie

$$f(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega - \omega_0) \times \\ \times \exp\left\{i\left[(\omega - \omega_0)\tau - \frac{1}{2} \alpha(\omega - \omega_0)^2 \xi\right]\right\} d\omega$$

$\varphi(\omega - \omega_0)$ – widmo częstotściowe przy $\tau = 0$.

Światło w dielektrykach

Przykład

Niech

$$\varphi_0(\omega - \omega_0) = \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4\Gamma}\right].$$

na odległości ξ

$$\varphi(\xi, \omega - \omega_0) = \varphi_0(\omega - \omega_0) \exp[\pm i\beta\xi],$$

gdzie: $\beta = n\omega/c$

Niech $\Delta\omega \ll \omega$. Rozwinięcie Taylora

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \beta'(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta''(\omega - \omega_0)^2 + \dots,$$

gdzie:

$$\beta' = \left[\frac{d\beta(\omega)}{d\omega} \right]_{\omega_0}$$

i

$$\beta'' = \left[\frac{d^2\beta(\omega)}{d\omega^2} \right]_{\omega_0}.$$

Po przejściu drogi $z = \xi$ rozkład widmowy impulsu

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \omega - \omega_0) &= \exp[-i\beta_0\xi - i\beta'\xi(\omega - \omega_0)] \times \\ &\times \exp\left[-\left(\frac{1}{4\Gamma} + \frac{i}{2}\beta''\right)(\omega - \omega_0)^2\right]. \end{aligned}$$

Zmiana kształtu impulsu

Światło w dielektrykach

$$f(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, \omega - \omega_0) e^{i\omega t} d\omega,$$

czyli

$$f(t, z) = \sqrt{\frac{\Gamma(z)}{\pi}} \exp\left[i\omega_0 \left(t - \frac{z}{v_\phi(\omega_0)} \right) \right] \times \\ \times \exp\left[-\Gamma(z) \left(t - \frac{z}{v_g(\omega_0)} \right)^2 \right],$$

gdzie:

$$v_f(\omega_0) = \left(\frac{\omega}{\beta} \right)_{\omega_0},$$

$$v_g(\omega_0) = \left(\frac{d\omega}{d\beta} \right)_{\omega_0},$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{\Gamma} + 2i\beta'' z.$$

Pierwszy wyraz – przesunięcie fazy częstotliwości centralnej o z/v_f .

Drugi wyraz – po przejściu drogi z impuls pozostaje gaussowski, o prędkości v_g .

Ale

$$v_g = v_f \left[1 - \frac{\omega}{n(\omega)} \frac{dn(\omega)}{d\omega} \right].$$

Światło w dielektrykach

$$\beta'' = \left[\frac{d^2 \beta(\omega)}{d\omega^2} \right]_{\omega_0} = \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{v_g(\omega)} \right]_{\omega_0}.$$

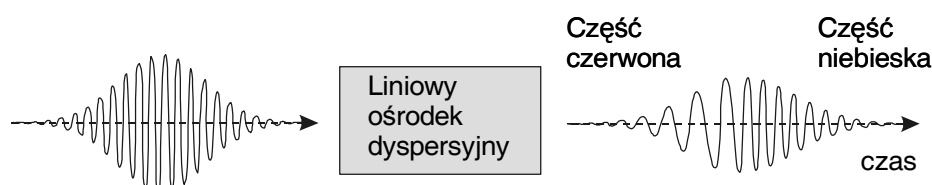
to

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma}{1 + \chi^2 z^2} - i \frac{\chi z}{1 + \chi^2 z^2},$$

gdzie: $\chi = 2\Gamma\beta''$.

Podstawiając otrzymamy

$$\exp \left[-\frac{\Gamma}{1 + \chi^2 z^2} \left(t - \frac{z}{v_g(\omega_0)} \right)^2 \right] \times \\ \times \exp \left[i \frac{\chi z}{1 + \chi^2 z^2} \left(t - \frac{z}{v_g(\omega_0)} \right)^2 \right],$$



Gaussowski impuls przechodzący przez liniowy ośrodek o nieliniowej dyspersji

Impuls w ośrodkach dyspersyjnych:

1. ulega opóźnieniu,
2. zwiększa się jego FWHM,
3. porządkuje się częstotliwość (świergotanie).

Ośrodek nieliniowy

Samomodulacja fazowa

Optyczny efekt Kerra

$$n(I) = n_0 + KI(t),$$

Zaniedbujemy dyspersję.

Faza impulsu

$$\varphi(z, t) = \omega_0 t - k_0 [n_0 + KI(t)] \Delta z,$$

Część nieliniową

$$\varphi_{NL}(t) = -\frac{2\pi KL}{\lambda_0} I(t).$$

Częstość

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - K\Delta z \frac{dI(t)}{dt}.$$

Jeśli K jest dodatnie

→ częstość tylnej części impulsu rośnie
(ponieważ $dI(z, t)/dt < 0$),

→ częstość części przedniej maleje
(przesunięcie ku czerwonej części widma)
ponieważ $dI(z, t)/dt > 0$.

Impuls ściągający (ang. chirped pulse).

Optyczny efekt Kerra może kompensować zmiany impulsu wywoływane dyspersją ośrodka.

Po przejściu światłowodu o długości L

$$\begin{aligned}\varphi(L, t) &= \varphi(L) + \varphi_{NL}(t) = \\ &= \frac{2\pi n_0 L}{\lambda_0} + \frac{2\pi K I(t) L}{\lambda_0}.\end{aligned}$$

Zależność częstości od czasu trwania impulsu

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega(t) = \omega_0 + \frac{d}{dt}\varphi_{NL}(t).$$

Częstość zmienia się o

$$\Delta\omega(t) = -\frac{2\pi K L}{\lambda_0} \frac{dI(t)}{dt}.$$

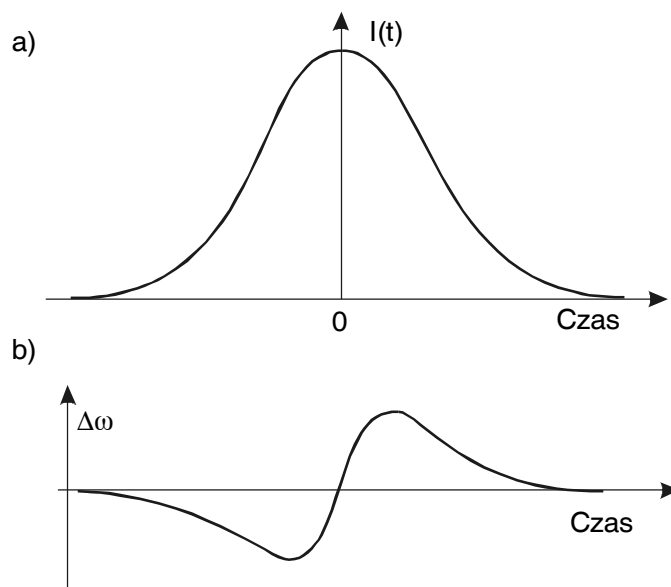
Dla impulsu gaussowskiego

$$I(t) = I_0 \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2\right],$$

to

$$\Delta\omega(t) = \frac{2\pi K L}{\lambda} \frac{t}{\tau_0^2} I_0 \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2\right].$$

Światło w dielektrykach



Obwiednia impulsu(a) oraz zmiana częstości w wyniku samomodulacji fazowej (b)

Jeśli:

– $t < 0$ (czoło impulsu), to przesunięcie jest ujemne, czyli obserwuje się przesunięciu ku czerwieni.

– $t > 0$ (zbocze) przesunięcie częstości jest w kierunku niebieskiej części widma

Założmy

$$I(t) = I_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{t}{\tau_0}\right),$$

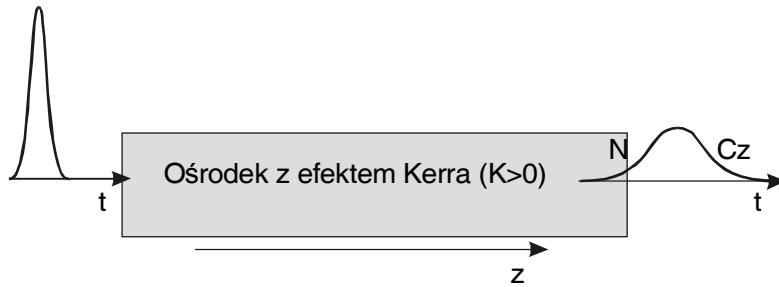
wtedy

$$\varphi_{NL}(t) = -\frac{2\pi KL}{\lambda} I_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{t}{\tau_0}\right),$$

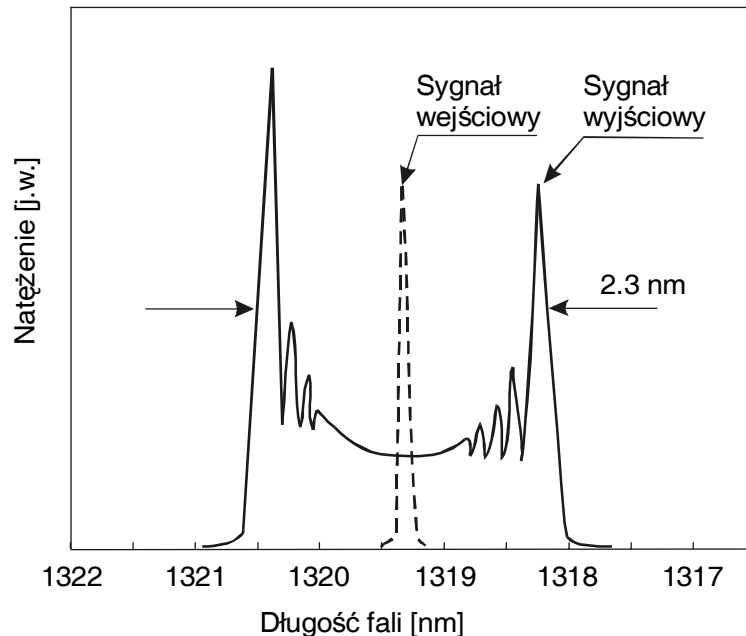
a

Światło w dielektrykach

$$\Delta\omega(t) = \frac{2\pi KL}{\lambda\tau_0} I_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \operatorname{tgh}\left(\frac{t}{\tau_0}\right).$$



Wpływ samomodulacji fazowej na rozkład częstości w czasie przechodzącego przez ośrodek impulsu



Widma rozszerzonego impulsu w wyniku samomodulacji fazowej (za [11])

Dyspersja prędkości grupowej

– rozszerzenie impulsu w czasie przy zachowanym składzie spektralnym

Samomodulacja fazowa

Światło w dielektrykach

– rozszerza widmo przy zachowanym kształcie impulsu w czasie – impuls ściągający.

Impuls światła w obecności optycznego efektu Kerra

Założenia:

- braku dyspersji,
- obecności nieliniowości.

Otrzymamy impuls o rozszerzonym widmie, ale bez zmiany obwiedni.

W poruszającym się układzie współrzędnych

$$i \frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \gamma |f|^2 f(\xi, \tau) = 0.$$

Mnożymy przez f^* , a sprzężone przez f , a następnie dodajemy i otrzymamy

$$\frac{\partial |f|^2}{\partial \xi} = 0,$$

o rozwiązaniu

$$|f|^2 = F(\tau) = F\left(t - \frac{z}{v_g}\right).$$

Szukamy rozwiązania

$$f(\xi, \tau) = f_0(\tau) \exp[-i\phi(\xi, \tau)],$$

Światło w dielektrykach

gdzie: $f_0(\tau)$ i $\phi(\xi, \tau)$ są rzeczywistymi funkcjami.

Łatwo sprawdzić, że

$$\frac{\partial \phi(\xi, \tau)}{\partial \xi} = \gamma |f_0(\tau)|^2,$$

stąd

$$\phi(\xi, \tau) = \phi_0 + \gamma |f_0(\tau)|^2 \xi,$$

gdzie: $\phi_0 = \phi(T, 0)$.

Jeśli $\phi_0 = 0$, to

$$f(\xi, \tau) = f_0(\tau) \exp\left[(-i\gamma |f_0(\tau)|^2) \xi\right].$$

Wniosek:

nieliniowość prowadzi do fazowej modulacji
→ *samomodulacja fazowa*

$$E(z, t) = f\left(t - \frac{z}{v_g}\right) \times \exp\left\{i\left[\omega_0 t - \gamma \left|f_0\left(t - \frac{z}{v_g}\right)\right|^2 z - \beta_0 z\right]\right\}.$$

Zmiana częstości

$$\Delta\omega = -\gamma z \frac{\partial}{\partial t} \left[\left|f_0\left(t - \frac{z}{v_g}\right)\right|^2 \right].$$

Jak widać:

nieliniowość pozostawia kształt obwiedni impulsu

Światło w dielektrykach

przy modulacji częstotściowej.

Powtarzamy:

– dyspersja prędkości grupowej prowadzi do poszerzenia impulsu w czasie przy zachowanym widmie,

– nieliniowość ośrodka wynikająca z optycznego efektu Kerra powoduje rozszerzenie spektralne impulsu bez zmiany kształtu impulsu w czasie.

Ośrodek nieliniowy z dyspersją. Solitony

W układzie poruszającym

$$i \frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \beta'' \frac{\partial^2 f(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} + \gamma |f|^2 f(\xi, \tau) = 0.$$

Niech

$$f(\xi, \tau) = E_0 \psi(\tau) \exp[i\phi(\xi)],$$

$\psi(\tau)$ – rzeczywistą funkcją kształtu (obwiednia impulsu).

To

Światło w dielektrykach

$$\frac{d\phi}{d\xi} E_0 \psi(\tau) - \frac{1}{2} \beta'' E_0 \frac{d^2 \psi(\tau)}{d\tau^2} - \gamma E_0^3 \psi^3(\tau) = 0,$$

albo

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \frac{1}{2} \beta'' \frac{1}{\psi(\tau)} \frac{d^2 \psi(\tau)}{d\tau^2} + \gamma E_0^2 \psi^2(\tau) = \frac{1}{2} K'.$$

Jest to równanie z rozdzielonymi zmiennymi.

Zatem

$$\phi(\xi) = \frac{1}{2} K' \xi.$$

i

$$\frac{d^2 \psi(\tau)}{d\tau^2} + 2\gamma E_0^2 \psi^3(\tau) - \frac{K'}{\alpha} \psi(\tau) = 0.$$

Pomnóżmy to równanie przez $2 d\psi(\tau)/d\tau$

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ \left[\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \right]^2 + \frac{\gamma}{\beta''} E_0^2 \psi^4(\tau) - \frac{K'}{\beta''} \psi^2(\tau) \right\} = 0,$$

a stąd

$$\left[\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \right]^2 = -\frac{\gamma}{\beta''} E_0^2 \psi^4(\tau) + \frac{K'}{\beta''} \psi^2(\tau) + C.$$

Dla zlokalizowanego impulsu stała całkowania

$$C = 0.$$

Przyjmijmy, że

Światło w dielektrykach

$$\max[\psi(\tau)] = E_0 = 1,$$

i tym samym

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = 0.$$

Stąd w maksimum

$$-\frac{\gamma}{\alpha} E_0^2 + \frac{K'}{\alpha} = 0,$$

a więc

$$K' = \gamma E_0^2.$$

Czyli

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = \gamma\psi(\tau) \sqrt{1 - [\psi(\tau)]^2},$$

gdzie:

$$\gamma = \left(\frac{K'}{\beta''} \right)^{1/2} = \left(-\frac{\gamma}{\beta''} \right)^{1/2} E_0.$$

Całkujemy

$$\int \frac{d\psi(\tau)}{\psi(\tau) \sqrt{1 - [\psi(\tau)]^2}} = \gamma \int d\tau$$

przez podstawienie

$$\psi = \operatorname{sech} \theta.$$

Zatem

$$\int d\theta = \gamma\tau,$$

Światło w dielektrykach

$$\psi(\tau) = \operatorname{sech} \theta = \operatorname{sech} h(\gamma\tau).$$

Otrzymujemy solitonowe rozwiązanie

$$f(\xi, t) = E_0 \operatorname{sech} \left[\gamma \left(t - \frac{\xi}{v_g} \right) \right] e^{-ig\xi},$$

gdzie:

$$g = -\frac{1}{2} \beta'' \gamma^2 = \frac{1}{2} \gamma E_0^2.$$

Dla $\xi = 0$ wejściowy soliton ma postać

$$f(\xi, t) = E_0 \operatorname{sech}(\gamma t).$$

FWHM wyznaczamy przyjmując

$$\operatorname{sech}^2 \gamma t_0 = \frac{1}{2},$$

stąd

$$\Delta\tau_s = 2t_0 = \frac{2}{\gamma} \ln(1 + \sqrt{2}) \approx \frac{1.7627}{\gamma}.$$

Solitony II (inna postać NRS)

Podstawmy

$$\sigma = \frac{\tau}{\tau_0},$$

$$\zeta = \frac{\xi}{L_D},$$

$$\psi(\zeta, \sigma) = N \frac{f(\zeta, \sigma)}{\sqrt{P_0}},$$

gdzie: $N^2 = \gamma P_0 \tau_0^2 / |\beta''|$, τ_0 – czas trwania

Światło w dielektrykach

impulsu wejściowego, P_0 – moc w maksimum, $L_D = \tau_0/|\beta''|$ – długości dyspersji.

NRS

$$i \frac{\partial}{\partial \zeta} \psi \pm \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \psi + |\psi|^2 \psi = 0.$$

gdzie: „+”, jeśli $\beta'' < 0$, a „-” $\beta'' > 0$.

Dla obszaru dyspersji ujemnej

$$i \frac{\partial}{\partial \zeta} \psi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \psi + |\psi|^2 \psi = 0.$$

Założmy, że rozwiązaniem jest

$$\psi(\zeta, \sigma) = \Gamma(\sigma) \exp\left(i \frac{\zeta}{2}\right).$$

Podstawiając

$$\frac{1}{2} \Gamma(\sigma) - \frac{1}{2} \frac{d^2 \Gamma(\sigma)}{d\sigma^2} - \Gamma^3(\sigma) = 0$$

Pomnóżmy równanie przez

$$\frac{2d\Gamma(\sigma)}{d\sigma} d\sigma$$

i scałkujemy w przedziale $(-\infty, \sigma)$

1. $\Gamma(-\infty) = 0$,

2. impuls powinien mieć maksimum w $\sigma = 0$, $d\Gamma(0)/d\sigma = 0$, czyli

Światło w dielektrykach

$$\Gamma(0) = 1.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\sigma} \Gamma(\sigma) \frac{d\Gamma(\sigma)}{d\sigma} d\sigma &= \int_{-\infty}^{\sigma} \left[\frac{d^2\Gamma(\sigma)}{d\sigma^2} \right] \frac{d\Gamma(\sigma)}{d\sigma} d\sigma \\ &+ 2 \int_{-\infty}^{\sigma} \Gamma^3(\sigma) \frac{d\Gamma(\sigma)}{d\sigma} d\sigma, \\ \frac{1}{2}\Gamma^2(\sigma) &= \frac{1}{2} \left[\frac{d^2\Gamma(\sigma)}{d\sigma^2} \right]^2 + \frac{1}{2}\Gamma^4(\sigma), \end{aligned}$$

wreszcie

$$\left[\frac{d^2\Gamma(\sigma)}{d\sigma^2} \right]^2 = \Gamma^2(\sigma)[1 - \Gamma^2(\sigma)].$$

Całkujemy od $\sigma = 0$ do σ (od maksimum po stronie opadającej impulsu, czyli wybieramy ujemny pierwiastek).

Więc

$$\int_1^{\Gamma(\sigma)} \frac{d\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\sigma)[1 - \Gamma^2(\sigma)]^{1/2}} = - \int_0^{\sigma} d\sigma,$$

a stąd

Światło w dielektrykach

$$-\ln \left[\frac{1 + [1 - \Gamma^2(\sigma)]^{1/2}}{\Gamma(\sigma)} \right] = -\sigma,$$

czyli

$$\Gamma(\sigma) = \operatorname{sech}(\sigma)$$

Rozwiązanie

$$\psi(z, \sigma) = \operatorname{sech}(\sigma) \exp\left(i \frac{z}{2}\right)$$

→ *soliton podstawowy*

Właściwości:

1. porusza się z prędkością v_g , bez zmiany kształtu.
2. powierzchnia pod obwiednią nie zależy od τ_0

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\infty}^{\infty} |\psi| d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}(\tau) d\tau = 2 \tan^{-1}[\exp(\tau)] \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi, \end{aligned}$$

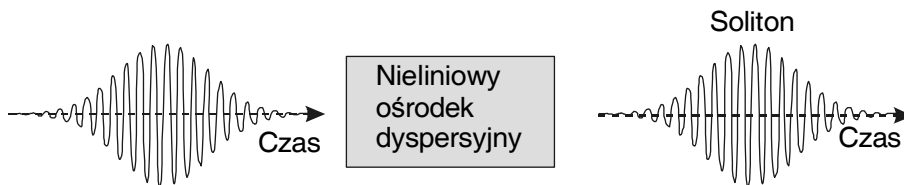
3. znormalizowana energia

Światło w dielektrykach

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi \psi^* d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(\tau) d\tau$$
$$= \tan \tau \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2.$$

4. w punkcie $z = 0$ amplituda

$$E(0, t) = E_0 \operatorname{sech} \left(\frac{t}{\tau_0} \right).$$



Kompensacja ściągania przez dyspersję ośrodka

Można pokazać, że funkcja w postaci

$$\psi_1(\tau) = A[\operatorname{sech}(\tau)] \exp \left[-i \frac{A^2 \tau}{2} \right]$$

też jest rozwiązaniem.

Rozwiązaniem jest też funkcja

$$\psi_2(z, \tau) = \psi_1 \left(\tau + \frac{z}{u} \right) \exp \left\{ i \left[\frac{1}{u} \left(\tau + \frac{z}{2u} \right) \right] \right\}.$$

Solitony wyższych rzędów

$$\psi(\tau) = N \operatorname{sech}(\tau),$$

gdzie: N – rząd solitonu.

Właściwości:

Światło w dielektrykach

- Moc szczytowa potrzebna do wzbudzenia solitonu N – tego rzędu jest proporcjonalna do N^2 .
- są funkcjami okresowymi z okresem $\pi/2$.
- soliton trzeciego rzędu zmniejsza okresowo swój czas trwania → możliwość wykorzystania dokompresji.

Solitony ciemne

Ciemne solitony są rozwiązaniami równania

$$i \frac{\partial}{\partial \zeta} \psi - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \psi + |\psi|^2 \psi = 0.$$

Najprostsze rozwiązanie

$$\psi(z, \tau) = \operatorname{tgh}(\tau) \exp(iz).$$

Soliton *szary*.

Okazuje się, że faza solitonów ciemnych nie jest jednakowa na całej długości impulsu. W jego środku ulega gwałtownej zmianie o π . W przypadku szarych solitonów ta zmiana jest stopniowa i mniejsza. Ciemne solitony nie są periodyczne i nie dążą do zachowań asymptotycznych.

Ciemne są stabilniejsze niż ich jasne .

Literatura

1. B. E. A. Saleh, M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, John Wiley & Sons, Inc. New York – Singapore 1991.
2. W. Lauterborn, T. Kurz, W. Wiesenfeldt, *Coherent Optics*, Springer-Verlag, Berlin 1993.
3. M. L. Riazat, *Introduction to High Speed Electronics and Optoelectronics*, John Wiley & Sons, New York 1996.
4. R. Mentzel, *Photonics*, Springer-Verlag, Berlin 2001.
5. A. K. Ghatak, K. Thyagarajan, *Introduction to fiber optics*, Cambridge University Press, Cambridge 2000.
6. E. Rosencher, B. Vinter, *Optoelectronics*, Cambridge University Press, Cambridge 2002.
7. R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, Academic Press, San Diego – New York 1992.
8. M. Mansuripur, *Classical Optics and its*

Światło w dielektrykach

Applications, Cambridge University Press, Cambridge 2002.

9. F. Ratajczyk, *Optyka ośrodków anizotropowych*, PWN, Warszawa 1994.
10. K. Iizuka, *Elements of Photonics*, Wiley and Sons, New York 2002.
11. J. Advantovic, D. Uttamchandani, *Principles of modern optical system*, Artech House, Norwood (MA) 1989.
12. M. Remoissenet, *Waves Called Solitons*, Springer-Verlag, Berlin 2003.
13. P. W. Miloni, J. H. Eberly, *Lasers*, John Wiley & Sons, New York 1988.
14. *Femtosecond Laser Pulses*, ed. C. Rullière, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1998.
15. E. F. Schubert, *Light-Emitting Diodes*, Cambridge University Press, Cambridge 2003.

Solitony w światłowodach

Możemy teraz oszacować szczytową moc solitonu w ośrodku ograniczonym (za [5]). Niech to będzie światłowód. Moc szczytowa wprowadzonego do rdzenia promieniowania wynosi

$$P_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 n_0 c |E_0|^2 A_{ef},$$

gdzie: A_{ef} jest efektywną powierzchnią rdzenia.

Światło w dielektrykach

Zatem

$$P_0 = 0.776 \frac{\lambda_0^3 |D| A_{ef}}{\pi^2 c K \Delta \tau_s},$$

gdzie: $\Delta \tau_s$ jest szerokością połówkową solitonu, a

$$D = -\frac{\lambda_0}{c} \frac{d^2 n}{d\lambda_0^2}$$

jest współczynnikiem dyspersji.

Założmy, że gaussowski impuls rozchodzi się w światłowodzie kwarcowym o $n_0 = 1.5$.

Wielkość dyspersji

$$\beta'' = \frac{\lambda}{2\pi c^2} \lambda^2 \frac{d^2 n}{d\lambda^2}.$$

Dla światłowodu kwarcowego $\beta'' = 0$ dla $\lambda = 1.27 \mu m$ i dla takiego światłowodu przybliżona wartość czynnika dyspersyjnego ma postać (długość fali w μm)

$$\lambda^2 \frac{d^2 n}{d\lambda^2} = f(\lambda) = -5.3 \times 10^{-2} \left(1 - \frac{1.27}{\lambda_0} \right).$$

Odpowiada to wyborze światłowodu o dyspersji zerowej dla $\lambda = 1.27 \mu m$. Jeśli $\lambda = 1.3 \mu m$, to znajdziemy się w obszarze ujemnej dyspersji $\beta'' = -2.81 \times 10^{-29} s^2/cm$ i $f(\lambda) = 1.223 \times 10^{-3}$. Niech

Światło w dielektrykach

$K = 1.2 \times 10^{-22} \text{ m}^2/\text{V}^2$. Można pokazać, że w takich warunkach, by wytworzyć soliton o czasie trwania 1 ps wystarczy światło o mocy 1 W skupione na powierzchni o promieniu $5 \mu\text{m}$, ponieważ wtedy wymagana maksymalna moc wynosi

$$P_{\max} = \frac{0.76}{\tau_p^2} \left[\frac{W}{\text{cm}^2} \right].$$

Optyczne solitony znajdują już zastosowanie w szybkiej telekomunikacji światłowodowej. Zwykłe elektroniczne systemy posiadają graniczną częstotliwość 40 GHz , a graniczna częstotliwość optyczna w obszarze $1.3 \mu\text{m}$ może sięgnąć 40 THz .

Rozważmy jeszcze jeden przykład transmisji światła we włóknie w obecności samomodulacji fazowej. Znajdziemy moc, dla której nastąpi zrównoważenie dyspersji prędkości grupowej i samomodulacji fazowej, a impuls będzie się rozprzestrzeniał w postaci solitonu (za [10]). Dla $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ współczynnik dyspersji wynosi $D = -17 \text{ ps}/(\text{km nm})$, $L = 100 \text{ km}$.

Stąd rozszerzenie

Światło w dielektrykach

$$\Delta\tau = |D|\Delta\lambda L.$$

Przy założeniu impulsu trójkąta, przy 100 ps narastaniu impulsu

$$100 = 17(10^2)\Delta\lambda,$$

czyli

$$\Delta\lambda = 5.9 \times 10^{-2} \text{ nm}.$$

Rozszerzenie z jednej strony wynosi $\Delta\lambda/2$, co w jednostkach częstości

$$\Delta\nu_p = -\frac{c}{\lambda^2} \frac{\Delta\lambda}{2} = -\frac{3 \times 10^{14}}{(1.55)^2} 2.95 \times 10^{-5} = -3.7 \times 10^9$$

drugiej strony

$$\Delta\nu_p = -\frac{KL}{\lambda} \frac{dI}{dt}.$$

Zatem

$$I_0 = -\Delta\nu_p \frac{\lambda\tau}{KL} = 3.7 \times 10^9 \frac{1.55 \times 10^{-6} \times 10^{-10}}{3.18 \times 10^{-20} \times 10^5} = 180 \times 10^6$$

Przekrój rdzenia wynosi

$$A = \pi \frac{(6 \times 10^{-6})^2}{4} = 2.8 \times 10^{-11} \text{ m}^2.$$

Stąd szczytowa moc optyczna, która trzeba wprowadzić do światłowodu, by uzyskać transmisję solitonową

$$P = I_0 A = (180 \times 10^6)(2.8 \times 10^{-11}) = 1.0 \text{ mW},$$

Światło w dielektrykach

lub energia w impulsie

$$0.5(200 \times 10^{-12})(5.0 \times 10^{-3}) = 0.5 \text{ pJ}.$$

Jednak straty tak długiego włókna powodują konieczność prowadzenia znacznie większych mocy.

Solitony przestrzenne

Podobnie jak wyżej, przyjmijmy, że przez ośrodek przechodzi impuls tak silny, że wywołuje efekt Kerra. Równanie Helmholtza możemy zapisać w postaci

$$[\nabla^2 + n^2(I)k_0^2]E_0(z, x) = 0, \quad \#$$

gdzie: $n(I) = n_0 + KI(t)$.

Założmy, że kształt obwiedni fali $E_0(z, x)$ wolno zmienia się ze współrzędną z i nie zależy od y . Dla uproszczenia równania Helmholtza zastosujemy *przybliżenie wolno zmiennej obwiedni*. Przybliżenie wolno zmiennej obwiedni $E_0(\vec{r})$ jest uzasadnione, jeśli na długości $\Delta z = \lambda$ zmiany amplitudy są bardzo małe w stosunku do wielkości amplitudy: $\Delta E_0 \ll E_0$. Dotyczy to zarówno części rzeczywistej, jak i urojonej amplitudy w ogólności zespolonej. Przyjmiemy rozwiązanie () w postaci

Światło w dielektrykach

$$E(\vec{r}) = E_0(\vec{r}) \exp(-ikz).$$

Zatem

$$\frac{\partial}{\partial z} E_0 \exp(-ikz) = \exp(-ikz) \frac{\partial}{\partial z} E_0 - ikE_0 \exp(-ikz),$$

oraz

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_0 \exp(-ikz) = \exp(-ikz) \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_0 - 2ikE_0 \exp(-ikz)$$

Ale

$$\Delta E_0 = \frac{\partial E_0}{\partial z} \Delta z,$$

czyli

$$\frac{\partial E_0}{\partial z} = \frac{\Delta E_0}{\Delta z} \approx \frac{2\pi \Delta E_0}{2\pi \lambda} \ll kE_0.$$

To w przybliżeniu wolnozmienniej obwiedni

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} \ll k \frac{\partial E_0}{\partial z} = k^2 E_0,$$

otrzymujemy następującą przybliżoną relację

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_0 \exp(-ikz) \approx \left(-2ik \frac{\partial E_0}{\partial z} - k^2 E_0 \right) \exp(-ikz),$$

i wtedy z równanie Helmholtza ma postać

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} - 2ik \frac{\partial E_0}{\partial z} + k_0^2 [n^2(I) - n_0^2] E_0 = 0.$$

Dalej, z faktu, że

Światło w dielektrykach

$$\begin{aligned}n^2(I) - n_0^2 &= [n(I) - n_0][n(I) + n_0] \\ &= KI2n_0.\end{aligned}$$

Związek między natężeniem optycznym, a natężeniem pola elektrycznego fali możemy zapisać w postaci

$$I = \frac{|E_0|^2}{2\eta},$$

gdzie: $\eta = \left(\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}\right)/n_0 = \eta_0/n_0$.

Zatem otrzymujemy następujące równanie opisujące ewolucję amplitudy fali w przestrzeni

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} - 2ik \frac{\partial E_0}{\partial z} + k^2 \frac{K}{\eta_0} |E_0|^2 E_0 = 0. \quad \#$$

Równanie () jest nieliniowym równaniem Schrödingera, a jednym z rozwiązań jest fala o amplitudzie

$$E_0(x, z) = A_0 \operatorname{sech}\left(\frac{x}{w_0}\right) \exp\left(-i\frac{z}{4z_0}\right),$$

gdzie: w_0 jest stałą, A_0 spełnia następujące równanie

$$K\left(\frac{A_0^2}{2\epsilon_0}\right) = \frac{1}{k^2 w_0^2},$$

a

Światło w dielektrykach

$$z_0 = \frac{1}{2}kw_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

jest nazywane *odległością Rayleigha*.

Rozkład natężenia promieniowania wyraża się zatem wzorem

$$I(x, z) = \frac{|E_0(x, z)|^2}{2\varepsilon_0} = \frac{A_0^2}{2\varepsilon_0} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{w_0}\right). \quad \#$$

Wynika z niego, że rozkład poprzeczny promieniowania () nie zależy od drogi przebywanej przez światło.

Współczynnik załamania ma teraz postać

$$n_0 + kI = n_0 \left[1 + \frac{1}{k^2 w_0^2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{w_0}\right) \right].$$

Fala będzie się poruszała z prędkością fazową

$$v_f = \frac{c}{1 + \lambda^2/8\pi^2 w_0^2}.$$

Wynika stąd, że prędkość będzie najmniejsza gdy w_0 będzie najmniejsze, będzie zbliżało się do prędkości światła dla dużych wartości w_0 .

Uzupełnienia

Superkontinuum

Światło w dielektrykach

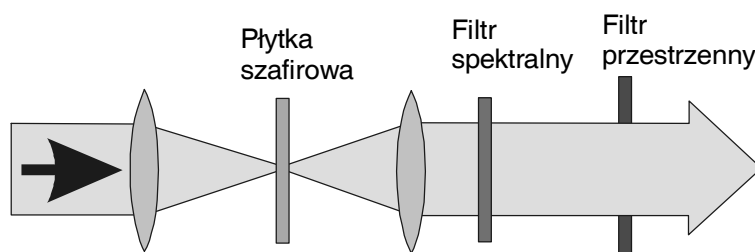
Generacja superkontinuum, tj. widma koherentnego promieniowania o niezwykle szerokim widmie od UV do IR zachodząca w nieliniowym ośrodku dielektrycznym przy przejściu promieniowania laserowego o dużym natężeniu przez dielektryk po raz pierwszy została zaobserwowana w 1970 r. Opanowanie techniki generacji impulsów femtosekundowych za pomocą laserów $Ti:Al_2O_3$ znacznie ułatwiło generację światła białego. Za powstanie światła białego odpowiedzialne są optyczne procesy nieliniowe, które prowadzą do konwersji częstotliwości, aczkolwiek tej pory nie ma pełnej teorii zjawiska.

Od czasu odkrycia znaleziono różne materiały, w których zachodzi ten efekt i wskazano na różne zastosowania, np. w metrologii, telekomunikacji i spektroskopii. Zwłaszcza w telekomunikacji w technice WDM wymaga się szerokiego pasma źródła światła. Wykorzystanie szerokiego pasma superkontinuum w systemach DWDM, umożliwi zbudowanie układów o wielkiej pojemności i szybkości transmisji, jeśli tylko zapewni się odpowiednio mało stratny

Światło w dielektrykach

materiał na światłowody oraz transmisję solitonową, najlepiej przy detekcji heterodynowej. Inne zastosowanie już z naszego podwórka – częstotliwościowe OCT. Tutaj wystarcza widmo o szerokości rzędu 200–300 *nm*.

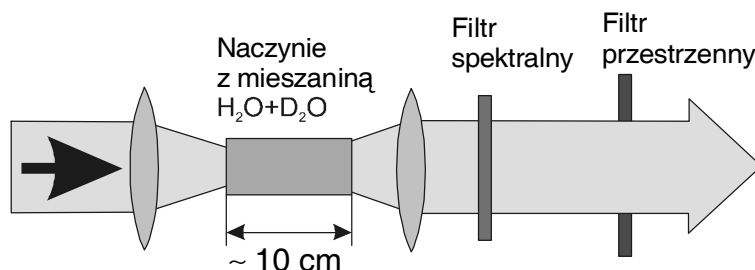
Typowa aparatura do generacji superkontinuum jest przedstawiona na rys. 12.



Rys. 12. Układ do generacji światła białego za pomocą impulsów femtosekundowych (za [4])

Na cienką płytkę szafirową pada impuls femtosekundowy. Po starannej filtracji widmowej za pomocą filtra interferencyjnego lub dielektrycznego zwierciadła i przestrzennej za pomocą układu soczewka – przesłona uzyskuje się widmo o czasie trwania nie dłuższym (a nawet krótszym) niż czas impulsu wejściowego oraz o szerokości spektralnej 400 – 1800 *nm*.

Światło w dielektrykach



Rys. 13. Układ do generacji światła białego za pomocą impulsów pikosekundowych (za [4])

Zastosowanie impulsów pikosekundowych do generacji światła białego wymaga dłuższej drogi oddziaływań. W prezentowanej na rys. 13 wersji zastosowano naczynie z cieczą i dzięki temu konwekcja usuwa z obszaru oddziaływania uszkodzone cząsteczki. Pokazano, że w tego typu ośrodkach wytworzenie białego światła jest skutkiem rozpraszania Ramana, samoogniskowania i innych procesów

Coraz częściej do generacji superkontinuum wykorzystuje się światłowody z kryształów fotonicznych. Kryształy fotoniczne używane do generacji superkontinuum mają rdzeń z czystego kwarcu otoczony otworami wzdłuż osi. Duża różnica współczynników załamania między rdzeniem, a otoczeniem wypełnionych powietrzem otworów umożliwia skoncentrowanie promieniowania

Światło w dielektrykach

lasera w małym przekroju, co z kolei zwiększa udział efektów nieliniowych. Również szerokie pasmo promieniowania ma udział w dużej dyspersji prędkości grupowej i tym samym w światłowodzie na kryształach fonicznych występuje niezwykle duża dyspersja chromatyczna. Te czynniki powodują, że do uzyskania superkontinuum wystarcza wiązka femtosekundowego lasera $Ti:Al_2O_3$ bez wzmacniania, czy innych zabiegów kształtujących impulsy.

Spolaryzowane promieniowanie w zakresie od 500 nm do 1200 nm uzyskano w światłowodzie o rdzeniu eliptycznym w płaszczu z powietrza. Ostatnio do generacji superkontinuum użyto włókna z fonicznych kryształów silnie dwójłomnych wzbudzanych femtosekundowymi impulsami z lasera $Ti:Al_2O_3$. Otrzymuje się spolaryzowane promieniowanie w szerokim zakresie ($400\text{ nm} - 1750\text{ nm}$). Badania sugerują, że w tym przypadku podstawową rolę w generacji superkontinuum odgrywa rozpraszanie Ramana, w wyniku którego powstają w rdzeniu solitony wyższych rzędów pokrywając duży zakres spektralny.

Światło w dielektrykach

Liczba generowanych solitonów liniowo zależy od czasu trwania impulsu laserowego:

$$N = \sqrt{\frac{\gamma P_p}{|\beta_2|} \frac{T_{FWHM}}{1.665}},$$

gdzie: γ jest nieliniowym współczynnikiem włókna, P_p jest mocą wejściową, a T_{FWHM} – całkowitą szerokością połówkową impulsu wejściowego, β_2 – współczynnikiem dyspersji.

Pokazano też, przy odpowiedniej konstrukcji kryształu fotonicznego możliwe jest wyprodukowanie światła białego przy użyciu impulsów pikosekundowych. W tym przypadku uważa się, że odpowiedzialne za powstanie szerokiego pasma promieniowania jest, w zależności od konstrukcji włókna, wymuszony efekt Ramana, Brillouina i parametryczne mieszanie czterech fal przy niewielkim udziale samomodulacji. Z drugiej strony, pokazano, że ten ostatni efekt jest odpowiedzialny za generację superkontinuum w powietrzu w obszarze od 300 nm do 4.5 μm . Z kolei, powstała w

Światło w dielektrykach

1998 r. teoria generacji superkontinuum zakłada, w powiązaniu z liniowymi efektami, dominację takich nieliniowych efektów jak: samoogniskowanie Kerra, wielofotonową jonizację i generację plazmy. Teorię z powodzeniem zastosowano do symulacji generacji superkontinuum w wodzie i powietrzu.

Literatura

1. B. E. A. Saleh, M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, John Wiley & Sons, Inc. New York – Singapore 1991.
2. W. Lauterborn, T. Kurz, W. Wiesenfeldt, *Coherent Optics*, Springer-Verlag, Berlin 1993.
3. M. L. Riazat, *Introduction to High Speed Electronics and Optoelectronics*, John Wiley & Sons, New York 1996.
4. R. Mentzel, *Photonics*, Springer-Verlag, Berlin 2001.
5. A. K. Ghatak, K. Thyagarajan, *Introduction to fiber optics*, Cambridge University Press, Cambridge 2000.
6. E. Rosencher, B. Vinter,

Światło w dielektrykach

Optoelectronics, Cambridge University Press, Cambridge 2002.

7. R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, Academic Press, San Diego – New York 1992.
8. M. Mansuripur, *Classical Optics and its Applications*, Cambridge University Press, Cambridge 2002.
9. F. Ratajczyk, *Optyka ośrodków anizotropowych*, PWN, Warszawa 1994.
10. K. Iizuka, *Elements of Photonics*, Wiley and Sons, New York 2002.
11. J. Advantovic, D. Uttamchandani, *Principles of modern optical system*, Artech House, Norwood (MA) 1989.
12. M. Remoissenet, *Waves Called Solitons*, Springer-Verlag, Berlin 2003.
13. P. W. Miloni, J. H. Eberly, *Lasers*, John Wiley & Sons, New York 1988.
14. *Femtosecond Laser Pulses*, ed. C. Rullière, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1998.
15. E. F. Schubert, *Light-Emitting Diodes*, Cambridge University Press, Cambridge 2003.