Fala płaska, ustalona częstość i kierunek propagacji

Pole elektryczne:

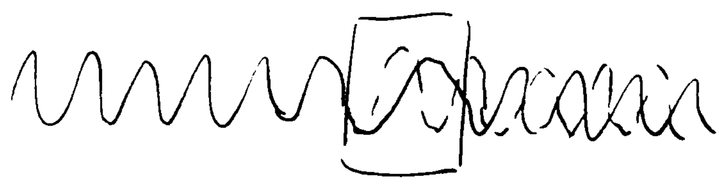
$$E(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t + \theta)$$
$$= \mathrm{Re}\left[\left(E_0 e^{i\theta}\right) e^{ikz - i\omega t} \right]$$

$\parallel\ \mathcal{E}$ ∈ zespolona amplituda, to nas będzie interesować.

Co mierzymy! W optyce energię:

$$\propto \langle E^2(z,t) \rangle \propto \mathcal{E}^* \mathcal{E} = |\mathcal{E}|^2$$

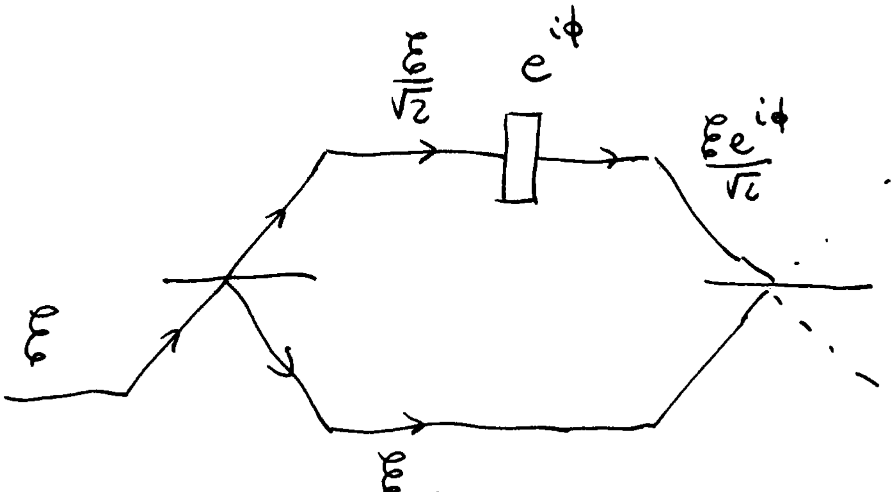
Problem: element wprowadzający przesunięcie fazowe (np. płytka falowa):



Transformacja zespolonej amplitudy: $\mathcal{E} \to e^{i\phi} \mathcal{E}$

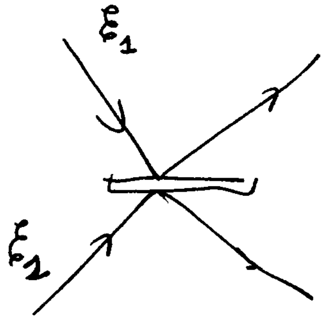
Jak zmierzyć ϕ? Sam pomiar natężenia nie niesie żadnej informacji o fazie.

Trzeba zbudować <u>interferometr</u>



$\frac{1}{\sqrt{2}}$ żeby się zgadzała moc wyjściowa

Rachunek na boku:



$$\frac{\xi_1+\xi_2}{\sqrt{2}} = \xi_1'$$

$$\frac{-\xi_1+\xi_2}{\sqrt{2}} = \xi_2'$$

znak "−" potrzebny, żeby całkowite natężenie się zgadzało. Mamy pewną dowolność gdzie go postawić.

W takim razie mamy:

Amplituda na górze: $\frac{1}{2}\left(\xi e^{i\phi}+\xi\right)$

na dole: $\frac{1}{2}\left(-e^{i\phi}\xi+\xi\right)$.

Natężenia:

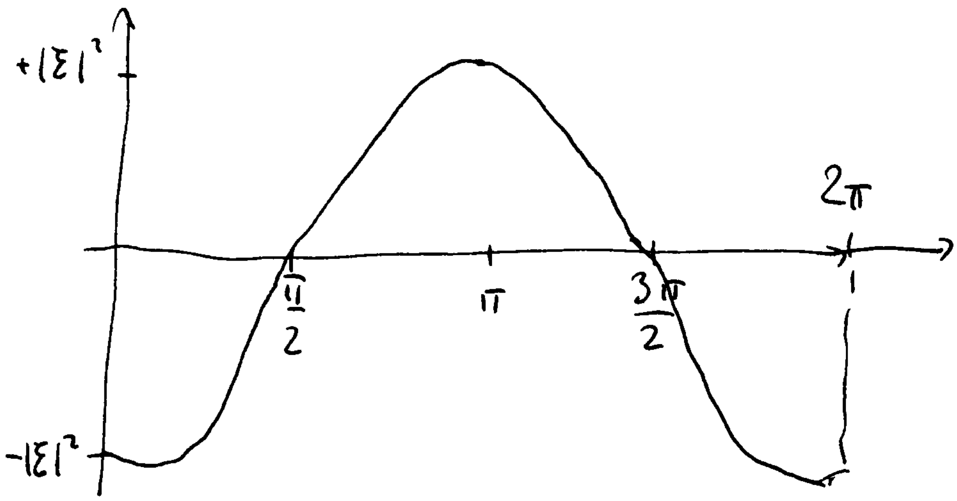
Góra: $\frac{1}{4}|\xi|^2|1+e^{i\phi}|^2 = |\xi|^2\cos^2\frac{\phi}{2}$

Dół: $\frac{1}{4}|\xi|^2|1-e^{i\phi}|^2 = |\xi|^2\sin^2\frac{\phi}{2}$

To zależy od fazy, którą łatwo mierzyć!

Utwórzmy sobie natężenie różnicowe:

$$I_- = I_2 - I_1 = -|\mathcal{E}|^2 \cos\phi$$



~~Kto~~ Gdzie jest najczulsza wartość?
Koło $\frac{\pi}{2}$, najbardziej stromo. Połóżmy
$\phi = \frac{\pi}{2} + \delta\phi$, wtedy $I_- \approx |\mathcal{E}|^2 \delta\phi$.

Pożyteczne notacje, ~~dla~~ dla każdej "jednowymiarowej" światło:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{amplituda w górnej wiązce} \\ \leftarrow \text{amplituda w dolnej wiązce} \end{matrix}$$

Płytka światłodzieląca:
$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

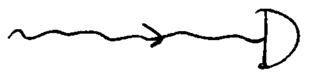
Przesunięcie fazy:
$$\hat{F}(\phi) = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wyjście interferometru:

$$\hat{B}\,\hat{F}(\phi)\,\hat{B}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{E} \end{pmatrix}$$

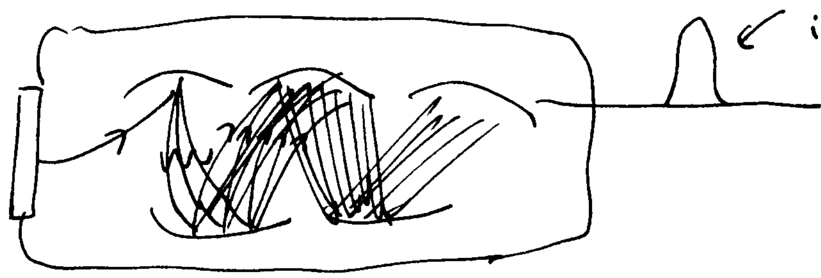
Błąd pomiaru - skąd się bierze? (4)

Pochylmy się nad pomiarem światła:



generujemy swobodne elektrony, fotoprąd.

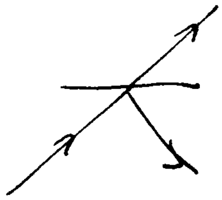
Makroskopowo prąd jest ciągły, ale my wiemy, że składa się z pojedynczych fotoelektronów.. Generację fotoelektronu można "zobaczyć" za pomocą fotopowielacza.



Pojedynczy fotoelektron ≡ absorpcja jednego fotonu.

Wyobraźmy sobie, że wyizolowaliśmy jeden foton. Jak to zrobić, to inna historia. Co to znaczy [illegible] rejestrując jeden foton? Tyle, że generuje jedno "kliknięcie" na naszym detektorze.

Wpuszczamy jeden foton na płytkę światłodzielącą.



Foton się nie podzieli – pójdzie albo w jedną, albo w drugą stronę.

Jeśli postawimy dwa detektory to kliknie albo jeden, albo drugi.

Jak to opisać? Przypuśćmy, że mamy dwie ścieżki biegnące równolegle, które w sumie zawierają jeden foton. Analogicznie do poprzedniego wykładu:

zespolone $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$|\alpha|^2$ – prawdopodobieństwo, że kliknie w górę

$|\beta|^2$ – prawdopodobieństwo, że kliknie na bok.

$|\alpha|^2+|\beta|^2 = 1$ – bo musi kliknąć gdziekolwiek.

NAZWA: AMPLITUDY PRAWDOPODOBIEŃSTWA.

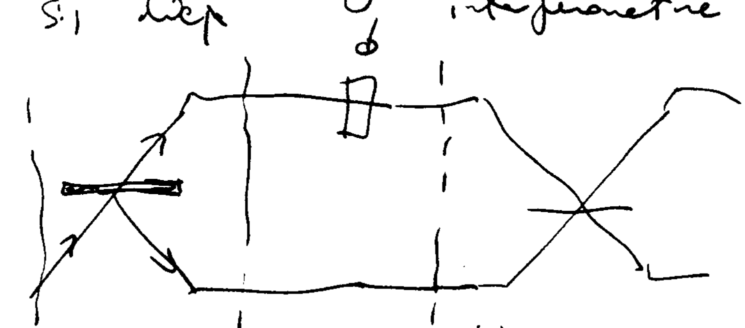
~~Na początku~~ $\cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$, ~~po płytce światłodzielącej~~ $\cancel{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$.

Co się dzieje na elemencie optycznym? Dokładnie to samo, co w przypadku klasycznym. Na przykład:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{światłodzieląca}]{\text{płytka}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

To ma sens, bo wiązka makroskopowa = dużo fotonów i z prawdopodobieństw odtwarzamy klasyczne natężenia.

Dlaczego nie używamy po prostu prawdopodobieństw? Zobaczmy co się dzieje w interferometrze:



$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

Ustawmy $\phi = 0$ albo $\phi = \pi$.

Foton wtedy pewnie wyjdzie tym samym portem.

Śmieszne: wcześniej można ~~być~~ by go wykryć albo na górze, albo na dole. Ale na drugiej płytce światłodzielącej te dwie amplitudy się spotykają i interferują destruktywnie w jednym porcie, konstruktywnie w drugim porcie.

Prawdopodobieństwo na wyjściu:

$$p_1 = \cos^2\frac{\phi}{2}$$

$$p_2 = \sin^2\frac{\phi}{2}.$$

W takim razie jak liczymy wiązkę to tak naprawdę wpuszczamy pewną liczbę fotonów. Jeśli wpuścimy n, to prawdopodobieństwo że zobaczymy n_1 fotonów na górze, n_2 na dole to

$$p(n_1, n_2 | n) = \underbrace{\delta_{n, n_1+n_2}}_{\text{dla pełnej zgody}} \binom{n}{n_1} p_1^{n_1} p_2^{n_2}$$

Ile fotonów jest w wiązce z lasera? Okazuje się, że dobrym przybliżeniem jest statystyka poissonowska:

$$p(n) = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} \qquad \bar{n} \text{ - średnia liczba fotonów.}$$

$$p(n_1, n_2) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n_1, n_2 | n)\, p(n) =$$

$$= e^{-p_1 \bar{n}} \frac{(p_1 \bar{n})^{n_1}}{n_1!} e^{-p_2 \bar{n}} \frac{(p_2 \bar{n})^{n_2}}{n_2!}$$

Niezależne rozkłady, na górze wychodzi średnio $p_1 \bar{n}$, na dole $p_2 \bar{n}$.

Natężenie różnicowe $\equiv$ różnica liczby fotonów.

$$n_- = n_2 - n_1 \qquad \langle n_- \rangle = \bar{n}(p_2 - p_1) = -\bar{n} \cos\phi$$

uśredniamy po rozkładzie $p(n_1, n_2)$

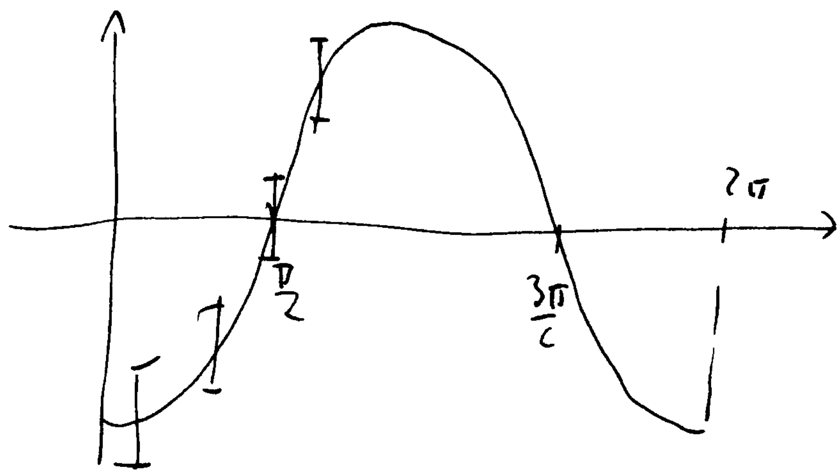
Uwaga, wariancji!

$$(\Delta n_-)^2 = \langle n_-^2\rangle - \langle n_-\rangle^2$$

$$\langle n_-^2\rangle = \langle (n_1-n_2)^2\rangle = \langle n_1^2\rangle - 2\langle n_1 n_2\rangle + \langle n_2^2\rangle$$

$$= (p_1\bar{n})^2 + p_1\bar{n} - 2\, p_1\bar{n}\, p_2\bar{n} + (p_2\bar{n})^2 + p_2\bar{n}$$

$$(\Delta n_-)^2 = (p_1+p_2)\,\bar{n} = \bar{n}.$$



Stosunek sygnału do szumu:

$$SNR = \frac{\bar{n}\,\delta\phi}{\sqrt{\bar{n}}} = \sqrt{\bar{n}}\,\delta\phi$$

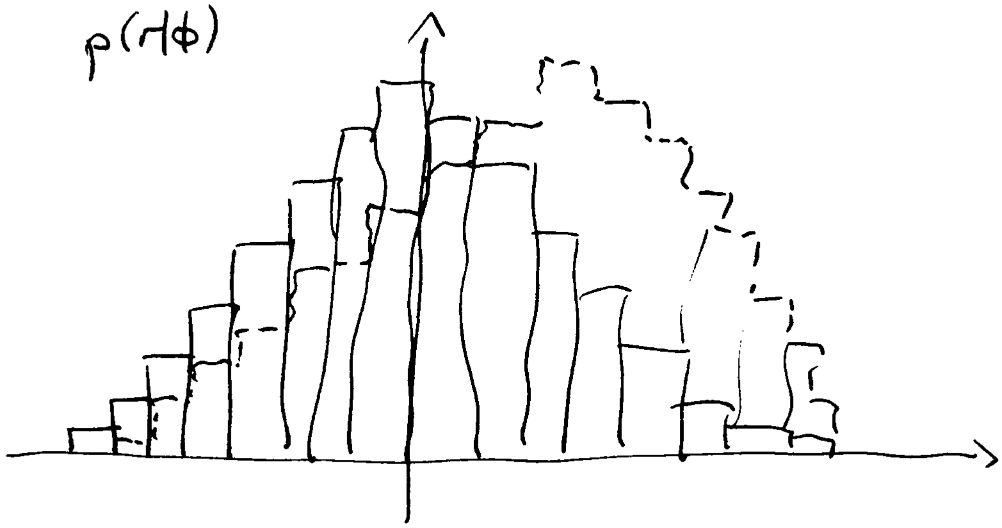
$$SNR \gg 1 \qquad \delta\phi \gg \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$$

Im więcej fotonów tym lepiej.
Nieoznaczoność skaluje się jak $\frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$

SZUM ŚRUTOWY
(SHOT NOISE).

Czy da się lepiej?

To, co obserwujemy, to pewne zmienne losowe r (jak rezultat), w naszym przypadku to jest n_- albo ogólniej pewne (n_1, n_2). Rozkład zależy od ϕ: $p(r|\phi)$. Jak dobrze da się wyznaczyć ϕ? Jeśli w ogóle nie zależy od ϕ, to kompletna klapa.



Względna zmiana w jednym binie:

$$\frac{1}{p(r|\phi)} \frac{\partial p(r|\phi)}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \ln p(r|\phi)$$

Uśredniamy kwadrat:

$$F(\phi) = \sum_r p(r|\phi) \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \ln p(r|\phi) \right)^2$$

INFORMACJA FISHERA

Ta definicja może wyglądać arbitralnie, ale ma dobry statystyczny sens:

Na podstawie r chcemy odgadnąć ϕ. Potrzebna funkcja $\Phi(r)$ – estymator. To też zmienna losowa.

Czego oczekujemy:

$$\sum_r \Phi(r)\, p(r|\underset{\text{ustalone}}{\phi}) = \phi$$

Estymator nieobciążony.

Okazuje się, że

$$(\Delta\Phi)^2 \geq \frac{1}{F(\phi)}$$

Ograniczenie Cramera-Rao.

Okazuje się, że dla naszego pomiaru jest tak dobrze jak się da.

Pomyślmy co się dzieje z jednym fotonem. Wyobraźmy, że mamy wiązkę o ustalonej częstości, kierunku propagacji, itd. Jak opisywać stan kwantowy.

Na razie dość gadania, ale model prosty: KWANTOWY OSCYLATOR HARMONICZNY:

$$\left.\begin{array}{l} |0\rangle \\ |1\rangle \\ |2\rangle \\ |3\rangle \\ \vdots \end{array}\right\}$$

dla matematyków: wektory bazowe w nieskończenie wymiarowej przestrzeni.

Operator anihilacji

$$\hat{a}|0\rangle = 0$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

Sprzężenie hermitowskie: (operator kreacji).

$$\hat{a}^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

Bardzo pożyteczny operator:

$$\hat{a}^{+}\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$$

operator liczby fotonów.

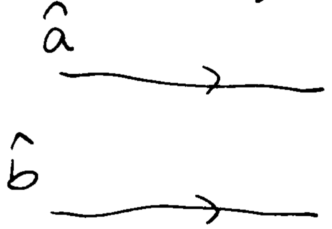
Ogólnie mamy superpozycję:

$$\psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle + \psi_2|2\rangle + \dots$$

Pożyteczny wzór:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^{+})^{n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle$$

Dwa mody:



Ogólny stan:

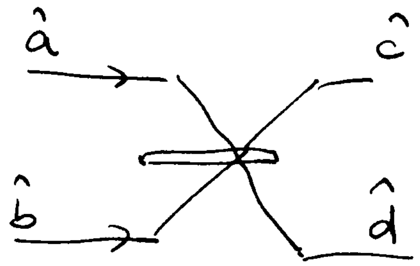
$~~|m\,n\,\mathrm{vac}\rangle~~$

$$|m\,n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^m (\hat{b}^\dagger)^n}{\sqrt{m!\,n!}} \underbrace{|00\rangle}_{|\mathrm{vac}\rangle}$$

Poprzednio nas interesowały superpozycje:

$$\alpha|10\rangle + \beta|01\rangle = \alpha\,\hat{a}^\dagger|\mathrm{vac}\rangle + \beta\,\hat{b}^\dagger|\mathrm{vac}\rangle$$

Element optyczny, np. płytka światłodzieląca



$$\begin{pmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\end{pmatrix}$$

Co z tego wynika?

$$\begin{pmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{pmatrix}$$

Przypuśćmy, że mamy:

$$\frac{(\hat{b}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|\mathrm{vac}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}(\hat{c}^\dagger + \hat{d}^\dagger)^n|\mathrm{vac}\rangle$$

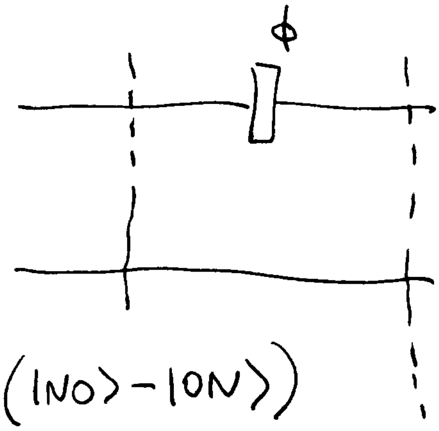
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\binom{n}{k}(\hat{c}^\dagger)^k(\hat{d}^\dagger)^{n-k}|\mathrm{vac}\rangle =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}}\;|k, n-k\rangle.$$

Prawdopodobieństwo, że k poszło do góry, $n-k$ do dołu: $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ ← rozkład dwumianowy.

Można to policzyć do końca,
wyjdzie to samo, co poprzednio.

Po co to wszystko?



Przesunięcie fazowe:

$$\hat{c} = e^{i\phi}\hat{a}$$

$$\frac{(\hat{a}^{+})^{n}}{\sqrt{n!}} \rightsquigarrow \frac{e^{in\phi}}{\sqrt{n!}}(\hat{c}^{+})^{n}$$

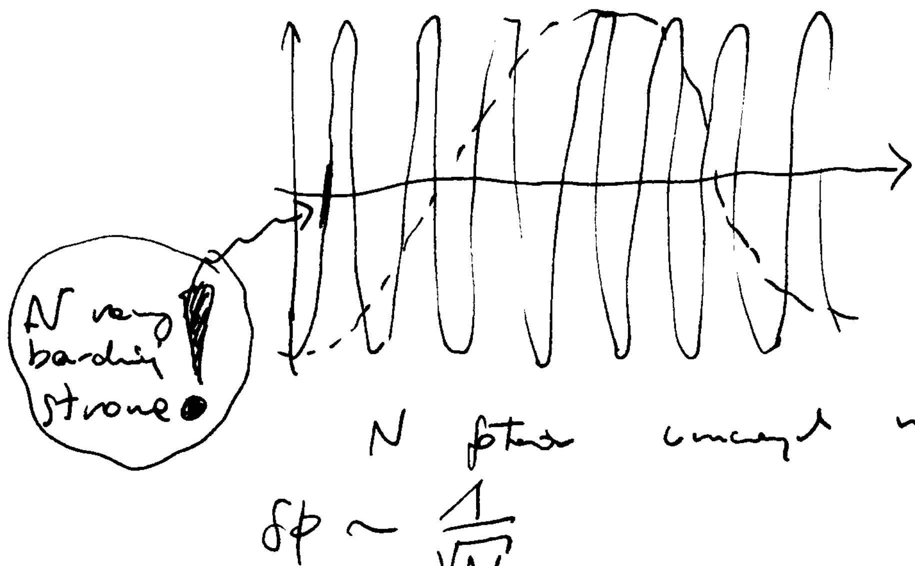
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|N0\rangle - |0N\rangle\right)$$

$$|\psi(\phi)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{iN\phi}|N0\rangle - |0N\rangle\right)$$

$$\langle\psi_{-}|\psi(\phi)\rangle = \frac{1}{2}\left(e^{iN\phi} + 1\right)$$

$$|\langle\psi_{-}|\psi(\phi)\rangle|^{2} = \cos^{2}\frac{N\phi}{2}$$

$$|\langle\psi_{+}|\psi(\phi)\rangle|^{2} = \sin^{2}\frac{N\phi}{2}.$$



$P_{+} - P_{-}$

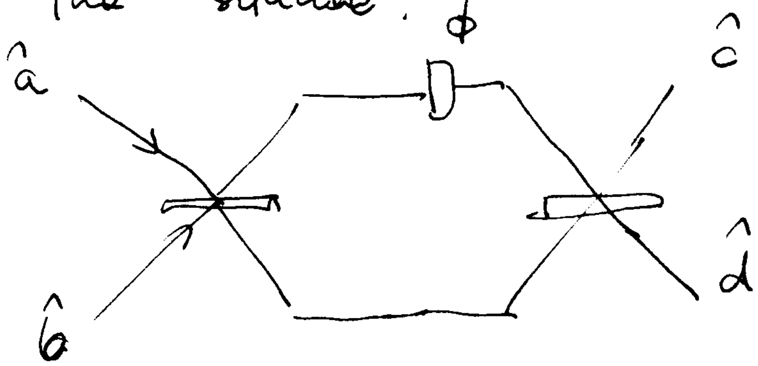
N fotonów niezależnych:

$$\delta\phi \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$$

N fotonów w stanie $|\psi\rangle$ $\sim \frac{1}{N}$

Dużo, dużo lepiej.

Inna sytuacja:



$$\begin{pmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{pmatrix} = e^{i\phi/2}\begin{pmatrix} i\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} \\ -\cos\frac{\phi}{2} & -i\sin\frac{\phi}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\end{pmatrix}$$

Różnica liczby fotonów

$$\hat{n}_- = \hat{d}^\dagger\hat{d} - \hat{c}^\dagger\hat{c} = \left(\hat{a}^\dagger\cos\frac{\phi}{2} - i\hat{b}\sin\frac{\phi}{2}\right)\left(\hat{a}\cos\frac{\phi}{2} + i\hat{b}\sin\frac{\phi}{2}\right)$$

$$-\left(-i\hat{a}^\dagger\sin\frac{\phi}{2} + \hat{b}^\dagger\cos\frac{\phi}{2}\right)\left(i\hat{a}\sin\frac{\phi}{2} + \hat{b}\cos\frac{\phi}{2}\right)$$

$$\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{b}^\dagger\hat{b}\right)\cos\phi + i\left(\hat{a}^\dagger\hat{b} - \hat{a}\hat{b}^\dagger\right)\sin\phi$$

Pierwszy rz.: $\phi = \frac{\pi}{2} + \delta\phi$

$$\hat{b} \rightsquigarrow \sqrt{\bar{n}}$$

$$\hat{n}_- \approx \bar{n}\,\delta\varphi + \sqrt{2\bar{n}}\,\underbrace{\frac{\hat{a}-\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}i}}_{\hat{p}}$$

$$(\Delta\hat{n}_-)^2 = 2\bar{n}(\Delta\hat{p})^2$$

Prosty rachunek: $(\Delta\hat{p})^2 = \frac{1}{2}$.

To samo co poprzednio, ale inna interpretacja.

$$\frac{dA}{dz} = k\underset{\text{RZECZYWISTE}}{C} A^*$$

Rozwiązanie

$$A(z) = A(0)\cosh(\underbrace{kCz}_{r}) + A^*(0)\sinh(kCz)$$

$$A(r) = A(0)\cosh r + A^*(0)\sinh r$$

Kwantowo:

$$\hat{a}(r) = \hat{a}\cosh r + \hat{a}^+\sinh r$$

$\hat{a}$

$$\hat{a}(r) - \hat{a}^+(r) = \hat{a}(\cosh r - \sinh r) - \hat{a}^+(\cosh - \sinh r) =$$

$$= e^{-r}(\hat{a} - \hat{a}^+)$$

$$\hat{p}(r) = e^{-r}\hat{p}(0)$$

$$(\Delta\hat{p}(r))^2 = e^{-2r}(\Delta\hat{p})^2 = \frac{1}{2}e^{-2r}$$

Ile fotonów?

$$\hat{a}^+(r)\hat{a}(r) = \sinh^2 r$$

Mało?